53. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme, VI.**

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

§ 19 *θ-auflösbare Systeme.* Wir werden die Resultaten vom Teil V weiter verallgemeinern. Dadurch erhält man eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der auflösbaren Systeme und der nilpotenten Systeme.

Es sei $\mathfrak{A}$ ein primitives A-algebraisches System. Einem Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ ordnen wir je eine Untermenge $\mathfrak{B}'$ und ein $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ umfassendes Untersystem $\mathfrak{B}^*$ zu. Zunächst werden wir diese Zuordnung festsetzen und sie mit θ bezeichnen. Besteht B aus den Verknüpfungsgleichungen mit den Elementen $x_1, \dots, x_m, x_1', \dots x_n'$, so betrachten wir B mit x aus $\mathfrak{B}$ und x' aus $\mathfrak{B}'$ als Relationen von $\mathfrak{B}^*$. Dadurch erhält man ein Restklassensystem von $\mathfrak{B}^*$ und folglich ein von $\mathfrak{B}$. Das erste bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\theta)$. Durch kleine Modifizierung kann man die im Teil V angegebenen Sätze auf unseren allgemeinen Fall übertragen, wie folgt.

Es sei $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph. Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_1^*$ die Bilder von $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}^*$ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$, so erhält man eine Zuordnung θ_1 in $\mathfrak{A}_1$, wenn man dem Untersystem $\mathfrak{B}_1$ die Bilder $\mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_1^*$ zuordnet. θ_1 wird offenbar durch θ nicht eindeutig bestimmt. Wir haben nur ein θ_1 beliebig festzusetzen. Dann ist $\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph. Ist nämlich $\overline{\mathfrak{B}}^*$ das zu $\mathfrak{B}_1^*$ isomorphe Restklassensystem von $\mathfrak{B}^*$, so ist die durch B definierte Kongruenz in $\mathfrak{B}_1^*$ gleichbedeutend mit der durch B definierten Kongruenz in $\mathfrak{B}^*$ nach $\overline{\mathfrak{B}}^*$. D. h. $\mathfrak{B}_1(\theta_1)$ ist zur Vereinigung von $\mathfrak{B}(\theta)$ und $\overline{\mathfrak{B}}^*$ isomorph, also ist es zu $\mathfrak{B}(\theta)$ homomorph.

Sind ferner $\mathfrak{B}(\theta)=\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$, $\mathfrak{B}_1(\theta_1)=\mathfrak{B}_1^*/\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$, so ist $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ zu $\mathfrak{B}^\theta$ homomorph. Setzt man nämlich $\mathfrak{B}_1^*=\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{B}_1^*/\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ zur Vereinigung $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta \cup \mathfrak{D}$ der beiden Restklassensysteme $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{B}^\theta$ und $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$ isomorph. Berüchsichtigt man die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{B}_1^*$ und $\mathfrak{B}^*/\mathfrak{D}$, so erkennt man den Isomorphismus von $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ auf $\mathfrak{B}^\theta \cup \mathfrak{D}/\mathfrak{D}$, also nach dem zweiten Isomorphiesatz den von $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ auf ein $\mathfrak{B}^\theta/\mathfrak{B}^\theta \cap \mathfrak{D}$. Damit ist der Homomorphismus von $\mathfrak{B}^\theta$ auf $\mathfrak{B}_1^{\theta_1}$ bewiesen.

Sind $\mathfrak{B}_1' \leq \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}_1^* \leq \mathfrak{B}^*$ für $\mathfrak{B}_1 \leq \mathfrak{B}$, so heisst die Zuordnung θ eine *ordnungshomomorphe*. Dann ist $\mathfrak{B}_1^\theta \leq \mathfrak{B}^\theta$. Definitionsgemäss besteht $\mathfrak{B}_1^\theta$ bzw. $\mathfrak{B}^\theta$ nämlich aus den mit dem Nullelement kongruenten Elemente aus $\mathfrak{B}_1^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$. Ist B_1^* bzw. B^* die Menge aller Folgerelationen von B in $\mathfrak{B}_1^*$ bzw. $\mathfrak{B}^*$, so ist ersichtlich $B_1^* \leq B^*$, also ist $\mathfrak{B}_1^\theta \leq \mathfrak{B}^\theta$.

---

* I in Proc. **17** (1941), 323–327; II ebenda **18** (1942), 179–184; III ebenda **18** (1942), 227–232; IV ebenda **18** (1942), 276–279; V ebenda **19** (1943), 120–124.

Wir setzen nun $(\mathfrak{B}^{\theta^i})^\theta = \mathfrak{B}^{\theta^{i+1}}$. $\mathfrak{B}$ heisst θ-auflösbar nach B, wenn $\mathfrak{B}^{\theta^r}=0$ für gewisse r ist. Ist $\mathfrak{B}^{\theta^{r-1}} \neq 0$, so heisst r die θ-Länge nach B. Im allgemeinen braucht keinesweg $\mathfrak{B}^{\theta^i} \geqq \mathfrak{B}^{\theta^{i+1}}$ zu sein. Das gilt aber sicher, wenn θ eine ordnungshomomorphe Zuordnung ist, und, wenn $\mathfrak{B}^\theta \leqq \mathfrak{B}$ ist. Dann heisst die Reihe $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}^\theta \supset \cdots \supset \mathfrak{B}^{\theta^r}=0$ die absteigende θ-Reihe von $\mathfrak{B}$ nach B.

Wie im Teil V beweist man leicht unabhängig von der Bedingung des Ordnungshomomorphismus: Ist $\mathfrak{A}_1$ zu $\mathfrak{A}$ homomorph und ist $\mathfrak{B}_1$ das Bild eines Untersystems $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ bei der honomorphen Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_1$, so ist $\mathfrak{B}_1$ θ_1-auflösbar, wenn $\mathfrak{B}$ θ-auflösbar ist. Dabei bedeutet θ_1 die durch die Zuordnung θ induzierte Zuordnung in $\mathfrak{A}_1$. Die θ_1-Länge von $\mathfrak{B}_1$ ist nicht grösser als die θ-Länge von $\mathfrak{B}$.

Wir setzen nunmehr voraus, dass die Zuordnung θ eine ordnungshomomorphe ist und, dass $\mathfrak{B}^\theta \leqq \mathfrak{B}$ ist. Dann ist jedes Untersystem $\mathfrak{B}_1$ eines θ-auflösbaren Untersystems $\mathfrak{B}$ auch θ-auflösbar. Die θ-Länge von $\mathfrak{B}_1$ ist nicht grösser als die θ-Länge von $\mathfrak{B}$.

Eine Kette von Untersysteme $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_r = 0$ heisst eine θ-Reihe nach B, wenn $\mathfrak{B}_{i+1}$ ein $\mathfrak{B}_i^\theta$ umfassendes normales Untersystem von $\mathfrak{B}_i^*$ ist. $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann θ-auflösbar, wenn es eine θ-Reihe besitzt. Die Länge jeder θ-Reihe ist nicht kleiner als die θ-Länge.

Eine θ-Reihe $\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_m \supset \cdots \supset \mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_0 = 0$ heisst eine aufsteigende, wenn es keine θ-Reihe $\mathfrak{B} = \mathfrak{c}_n \supset \cdots \supset \mathfrak{c}_1 \supset \mathfrak{c}_0 = 0$ mit $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{c}_i$ und $\mathfrak{b}_{i+1} \subset c_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots$, gibt. Gilt die Maximalbedingung für die Untersysteme von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}$ dann und nur dann θ-auflösbar, wenn es eine aufsteigende θ-Reihe besitzt.

Ist $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}$ für jedes Untersystem $\mathfrak{B}$, so sind die Glieder jeder θ-Reihe alles normal in $\mathfrak{A}$ mit der Ausnahme von $\mathfrak{B}$. Dann gibt es eine aufsteigende θ-Reihe von $\mathfrak{B}$, deren Länge gleich der θ-Länge von $\mathfrak{B}$ ist.

Ein θ-auflösbares System $\mathfrak{B}$ heisst auflösbar oder stark auflösbar oder nilpotent[1], je nachdem $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^*$ oder $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}^* = \mathfrak{A}$. Ordnet man einem Untersystem $\mathfrak{B}$ eine Untermenge $\mathfrak{B}''$ und ein $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}''$ umfassendes Untersystem $\mathfrak{B}^{**}$ zu, so möge man eine andere Zuordnung θ' in $\mathfrak{A}$ enthalten. Sind $\mathfrak{B}' \geqq \mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{B}^* \geqq \mathfrak{B}^{**}$ für jedes $\mathfrak{B}$, so ist jedes θ-auflösbares System stets θ'-auflösbar[2].

§ 20 *Vereinigung der θ-auflösbaren Systeme.* Es sei $\mathfrak{A}$ das direkte Produkt $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_k)$. Sind die $\mathfrak{B}_i$ Untersysteme von $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i'$ und $\mathfrak{B}_i^*$ die Bilder von $\mathfrak{B}_i$ bei der Zuordnug θ_i, so möge man eine Zuordnung θ von $\mathfrak{A}$ erhalten derart, dass $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_1 \ldots \mathfrak{B}_k)$, $\mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}_1' \ldots \mathfrak{B}_k')$, $\mathfrak{B}^* = (\mathfrak{B}_1^* \ldots \mathfrak{B}_k^*)$ sind. Dann und nur dann ist $\mathfrak{B}$ θ-auflösbar, wenn die direkten Faktoren $\mathfrak{B}_i$ alles θ_i-auflösbar sind. Die θ-Länge von $\mathfrak{B}$ ist gleich dem grössten Länge unter den Faktoren $\mathfrak{B}_i$.

---

1) Diese drei speziale Fälle werden im Teil V betrachtet.

2) Daher ist jedes nilpotentes System stark auflösbar und jedes stark auflösbares System ist auflösbar.

Wir werden nunmehr an, dass $\mathfrak{B}'$ stets Untersystem von $\mathfrak{A}$ ist und, dass θ nicht nur eine ordnungshomomorphe Zuordnung sondern auch eine *vereinigungshomomorphe* Zuordnung ist[3]. Die oben festgesetzte Zuordnung im direkten Produkt $\mathfrak{A}$ ist dann eine Folgerung. Wir beweisen nun den analogen Satz für die direkte Vereinigung. $\mathfrak{A}$ sei die direkte Vereinigung $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2\cup\cdots\cup\mathfrak{A}_k$, $(\mathfrak{A}_1\cup\cdots\cup\mathfrak{A}_i)\frown\mathfrak{A}_{i+1}=0$. Dann kann man aus den Scharen $[\mathfrak{A}], [\mathfrak{A}_1], \cdots, [\mathfrak{A}_k]$ Restklassensysteme $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{A}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{A}}_k$ so auswahlen, dass $\bar{\mathfrak{A}}$ das direkte Produkt $(\bar{\mathfrak{A}}_1\ldots\bar{\mathfrak{A}}_k)$ ist[4]. Ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2\cup\cdots\cup\mathfrak{B}_k$ mit den Untersysteme $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{A}_i$, so sind nach der Voraussetzung $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}_1'\cup\mathfrak{B}_2'\cup\cdots\cup\mathfrak{B}_k'$, $\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}_1^*\cup\mathfrak{B}_2^*\cup\cdots\cup\mathfrak{B}_k^*$. Das Bild $\bar{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B}$ in $\bar{\mathfrak{A}}$ ist das direkte Produkt von den Bilder $\bar{\mathfrak{B}}_i$ von $\mathfrak{B}_i$ und dasselbe gilt auch für $\bar{\mathfrak{B}}'$ und $\bar{\mathfrak{B}}^*$. Sind die $\mathfrak{B}_i$ alles θ-auflösbar, so sind $\bar{\mathfrak{B}}_i$ $\bar{\theta}$-auflösbar, wo $\bar{\theta}$ die induzierte Zuordnung von θ in $\bar{\mathfrak{A}}$ bedeutet. Nach oben folgt hieraus, dass $\bar{\mathfrak{B}}$ $\bar{\theta}$-auflösbar ist. Das Urbild der absteigenden $\bar{\theta}$-Reihe von $\bar{\mathfrak{B}}$ ist aber ersichtlich eine θ-Reihe von $\mathfrak{B}$. Daher ist $\mathfrak{B}$ auch θ-auflösbar. Damit ist gezeigt: Die direkte Vereinigung der θ-auflösbaren Untersysteme $\mathfrak{B}_i$ ist auch θ-auflösbar wenn $\mathfrak{B}_i'$ und $\mathfrak{B}_i^*$ in $\mathfrak{A}_i$ enthalten sind. Die Umkehrung ist auch klar.

Ist $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'\to\mathfrak{B}^*$ eine Zuordnung θ in $\mathfrak{A}$, so kann man in jedem Untersystem $\mathfrak{B}$ eine Zuordnung $\theta_{\mathfrak{B}}$ aufstellen, indem man einem Untersystem $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}$ die Untersysteme $\mathfrak{C}'\frown\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}^*\frown\mathfrak{B}$ zuordnet. Ist $\mathfrak{C}$ ein normales Untersystem von $\mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{B}$ dann und nur dann θ-auflösbar, wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ θ-auflösbar sind. Daraus folgt umittelbar, dass $\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{B}_2$ für ein θ-auflösbares Untersystem $\mathfrak{B}_1$ und ein θ-auflösbares normales Untersystem $\mathfrak{B}_2$ stets θ-auflösbar ist. Diese Tatsache enthält natürlich die oben angegebenen Resultate über die direkte Vereinigung. Die obigen Beweise sind aber auch zugänglich, wenn $\mathfrak{B}_i$ $\theta_{\mathfrak{B}_i}$-auflösbar sind und, wenn die Zuordnung $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'\frown\mathfrak{B}$ eine vereinigungshomomorphe ist[5].

Wir nehmen in folgenden an[6]: $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}_1\cup\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{B}_1$ für normales Untersystem $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ auch normal in $\mathfrak{A}$ und die Zuordnung $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}_1$ eine vereinigungshomomorphe ist. $\mathfrak{N}$ ist ein festes normales Untersystem von $\mathfrak{A}$ mit der Bedingung $(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{G})\frown\mathfrak{N}=(\mathfrak{F}\frown\mathfrak{N})\cup(\mathfrak{G}\frown\mathfrak{N})$

3) D. h. $(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})'=\mathfrak{B}'\cup\mathfrak{C}'$, $(\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C})^*=\mathfrak{B}^*\cup\mathfrak{C}^*$.

4) Vgl. § 14.

5) $\mathfrak{A}$ sei eine Gruppe, B die Kommutativität, θ die Zuordnung $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}$. Dann erhält man als θ-auflösbare Gruppe den Begriff der auflösbaren Gruppe im üblichen Sinne. In diesem Fall ist $\theta_{\mathfrak{B}}=\theta$ als eine Zuordnung in $\mathfrak{B}$. Im allgemeinen ist aber $\theta_{\mathfrak{B}}$ von θ verschieden. Bedeutet nämlich θ die Zuordnung $\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}'=\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}^*=\mathfrak{A}$, so erhält man als θ-auflösbare Gruppe den Begriff der nilpotenten Gruppe im üblichen Sinne. Ist $\mathfrak{B}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{A}$, so bedeutet die Nilpotentheit von $\mathfrak{B}$ gerade die $\theta_{\mathfrak{B}}$-Auflösbarkeit von $\mathfrak{B}$.

6) Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ zwei nilpotente Normalteiler einer Gruppe $\mathfrak{A}$, so gelten diese drei Voraussetzungen. Sie gelten auch, wenn $\mathfrak{A}$ ein assoziativer bzw. Liescher Ring ist und, wenn $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ nilpotente Ideale sind. Vgl. hierzu H. Fitting, Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung **48** (1938), 77–145. H. Zassenhaus, Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Hamburger Abh. **13** (1940), 1–100.

für alle normale $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}$. Aus $\mathfrak{D} \geqq \mathfrak{C}^{\theta_{\mathfrak{B}_1}} \cup \mathfrak{C}^{\theta_{\mathfrak{B}_2}}$ für zwei normale Untersysteme $\mathfrak{D} \leqq \mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{D} \geqq \mathfrak{C}^{\theta_{\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2}}$. Sind $\mathfrak{C} \leqq \mathfrak{B}$ normal in $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{C}^{\theta_{\mathfrak{B}}}$ normal in A.

Aus der $\theta_{\mathfrak{B}}$-Auflösbarkeit von $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ und der $\theta_{\mathfrak{C}}$-Auflösbarkeit von $\mathfrak{C}$ folgt im allgemeinen keine θ-Auflösbarkeit von $\mathfrak{B}$. Trotzdem kann man nach den eben angegebenen drei Voraussetzungen schliessen: *Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ zwei normale Untersysteme, die $\theta_{\mathfrak{B}_1}$-bzw. $\theta_{\mathfrak{B}_2}$-auflösbar sind, so ist $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ stets $\theta_{\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2}$-auflösbar.* Das Restklassensystem $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ ist nämlich die direkte Vereinigung von $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$, die nach der Voraussetzung ersichtlich $\theta_{\mathfrak{B}_1}$- bzw. $\theta_{\mathfrak{B}_2}$-auflösbar sind. Daher ist $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ $\theta_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}$-auflösbar. Wir haben also nur zu zeigen, dass $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$ $\theta_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}$-auflösbar ist. Es sei $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1', \ldots, \mathfrak{D}_1^{(m)}$ bzw. $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_2', \ldots, \mathfrak{D}_2^{(n)}$ die absteigende $\theta_{\mathfrak{B}_1}$- bzw. $\theta_{\mathfrak{B}_2}$-Reihe von $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$. Nach der Voraussetzung sind diese Untersysteme $\mathfrak{D}_i^{(j)}$ alles normal in $\mathfrak{A}$. Wir bilden dann $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2' \cup \mathfrak{D}_2', \ldots, \mathfrak{D}_2^{(n)} \cup \mathfrak{D}_1' = \mathfrak{D}_1'$ und wir beweisen, dass $(\mathfrak{D}_2^{(i)} \cup \mathfrak{D}_1')^{\theta_{\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2}} \leqq \mathfrak{D}_2^{(i+1)} \cup \mathfrak{D}_1'$ ist. Nach der Voraussetzung hat man dafür $(\mathfrak{D}_2^{(i)} \cup \mathfrak{D}_1')^{\theta_{\mathfrak{B}_j}} \leqq \mathfrak{D}_2^{(i+1)} \cup \mathfrak{D}_1'$, $j=1, 2$, zu beweisen. Es ist klar, dass $(\mathfrak{D}_2^{(i)} \cup \mathfrak{D}_1')^{\theta_{\mathfrak{B}_1}} \leqq D_2^{(i+1} \cup \mathfrak{D}_1'$ ist. $\mathfrak{D}_2^{(i)} \cup \mathfrak{D}_1'/\mathfrak{D}_2^{(i+1)} \cup \mathfrak{D}_1'$ ist nach dem zweiten Isomorphiesatz einem $\mathfrak{D}_2^{(i)}/(\mathfrak{D}_2^{(i)} \cap \mathfrak{D}_1') \cup \mathfrak{D}_2^{(i+1)}$ isomorph. Da $\mathfrak{D}_2^{(i)^{\theta_{\mathfrak{B}_2}}} \leqq (\mathfrak{D}_2^{(i)} \cap \mathfrak{D}_1') \cup \mathfrak{D}_2^{(i+1)}$ ist, so ersieht man leicht, dass $(\mathfrak{D}_2^{(i)} \cap \mathfrak{D}_1')^{\theta_{\mathfrak{B}_2}} \leqq \mathfrak{D}_2^{(i+1)} \cup \mathfrak{D}_1'$ ist. Analog kann man für $\mathfrak{D}_1'$ vorgehen, u.s.w. Damit ist der Satz bewiesen.

Nun kann man den folgenden Satz beweisen, der von H. Fitting für Gruppen und von H. Zassenhaus für Liesche Ringe bewiesen ist[7]. Gilt der Teilerkettensatz für normale Untersysteme, so gibt es ein einziges grösstes θ-auflösbares normales Untersystem $\mathfrak{N}$.

Ergänzung zum Teil III.

Der in § 11 angegebene Beweis der Vollständigkeit des Verbandes $[\mathfrak{A}'/\mathfrak{B}']$ ist, wie man sich leicht überzeugt, zugänglich, auch wenn die Voraussetzung III nicht gilt. Also kann man stets von dem grössten Restklassensystem von $\mathfrak{A}'$ nach $\mathfrak{B}'$ sprechen.

Der in § 12 unter der Voraussetzung IV* bewiesene Satz von Schreier gilt auch unter den Grundvoraussetzungen I, II, III. Zum Beweis braucht man nur kleine Modifizierung. Es seien $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{A}_k = 0$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_m = 0$ zwei vorgegebene Normalketten von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{B}_i \geqq \mathfrak{A}_1 \cap \mathfrak{B}_i \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{B}_i = 0$ bzw. $\mathfrak{A}_j \geqq \mathfrak{A}_j \cap \mathfrak{B}_1 \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_j \cap \mathfrak{B}_n = 0$ eine Normalkette von $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{A}_j$. Durch die homomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{A}_j$ auf $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i+1}$ bzw. $\mathfrak{A}_j/\mathfrak{A}_{j+1}$ erhält man aus den Normalketten von $\mathfrak{B}_i$ bzw. $\mathfrak{A}_j$ eine Kette $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}_{0i} \geqq \mathfrak{B}_{1i} \geqq \cdots \geqq \mathfrak{B}_{ki} = \mathfrak{B}_{i+1}$ bzw. $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_{j0} \geqq \mathfrak{A}_{j1} \geqq \cdots \geqq \mathfrak{A}_{jm} = \mathfrak{A}_{m+1}$, wobei $\mathfrak{B}_{ji}$ bzw. $\mathfrak{A}_{ji}$ aus den im Bild von $\mathfrak{A}_j$ $\mathfrak{B}_i$ enthaltenen Elemente besteht. Zum Beweis des Schreierschen Satzes genügt es zu zeigen, dass die

7) Vgl. die in Anmerkung 6) zitierten Arbeiten.

grössten Restklassensysteme $\mathfrak{B}_{j-1\,i-1}/\mathfrak{B}_{j\,i-1}$ und $\mathfrak{A}_{j-1\,i-1}/\mathfrak{A}_{j-1\,j}$ zueinander isomorph sind. Also reduziert sich der Satz auf den folgenden Hilfssatz. $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ sein Untersysteme von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ seien bzw. normale Untersysteme von $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$. Die Bilder von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}$, $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}$ bei der homomorphen Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{U}/\mathfrak{u}$ seien $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^u/\mathfrak{u}$, $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}}^u/\mathfrak{u}$. Analog definieren wir $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^v/\mathfrak{v}$, $\overline{\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}}^v/\mathfrak{v}$. Dann sind die grössten Restklassensysteme $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^u/\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}}^u$ und $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^v/\overline{\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}}^v$ zueinander isomorph. Ersichtlich ist $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^u/\mathfrak{u}$ zu $\mathfrak{u} \smile (\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V})/\mathfrak{u}$, also nach dem zweiten Isomorphiesatz zu $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}/\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}$ isomorph. Daher ist $\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}$ normales Untersystem von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}$. Analog ist $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}$ und folglich $(\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}) \smile (\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v})$ normal in $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}$. Bei der isomorphen Zuordnung von $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}/\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}$ und $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^u/\mathfrak{u}$ entspricht dem normalen Untersystem $(\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}) \smile (\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v})/\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}$ ersichtlich $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}}^u/\mathfrak{u}$, als ist nach dem ersten Isomorphiesatz und seinem Zusatz $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^u/\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v}}^u$ zu $\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}/(\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}) \smile (\mathfrak{U} \frown \mathfrak{v})$ ismorph, wobei die Restklassensysteme stets die grössten in den betreffenden Scharen bedeutet. Dasselbe gilt auch für $\overline{\mathfrak{U} \frown \mathfrak{V}}^v/\overline{\mathfrak{u} \frown \mathfrak{V}}^v$. Damit ist der Satz bewiesen.