71. *Bemerkungen über das Weilsche Mass auf einer abelschen Gruppe.*

Von Yukiyosi KAWADA.
Mathematisches Institút, Tokyo Bunrika Daigaku.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1943.)

Im folgenden sollen die Weilschen Sätze[1] über die Beziehungen zwischen den Massen und den Topologien in einer Gruppe für den Fall, wo diese Gruppe abelsch ist, als Anwendung der Theorie der normierten Ringe hergeleitet werden. Als Muster gelten dabei die Arbeiten von I. Gelfand, D. Raikov und M. Krein[2] über die Theorie der Charaktere der abelschen Gruppen. Ihre Methode gilt teilweise auch in unserm Fall.

1. G sei eine abelsche Gruppe mit Elementen $0, x, y, \dots$

Def. 1. Ein auf G definiertes Carathéodorysches reguläres äusseres Mass m heisst *Weilsch*[3], falls es die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $$m(E+a)=m(E) \quad \text{für alle} \quad E\subset G,$$

(ii) $f(x-y)$ ist messbar in bezug auf das Produktmass $m\times m$ auf $G\times G$, falls $f(x)$ eine reellwertige m-messbare Funktion auf G ist,

(iii) $$G=\vee_{n=1}^{\infty}E_n, \quad m(E_n)<\infty \quad (n=1, 2, \dots).$$

Wir nennen ein Mass m *Weilsch im weiteren Sinne*, wenn statt (iii) die folgende Bedingung (iii′) erfüllt ist:

(iii′) Aus $A=\vee_{n=1}^{\infty}A_n$, $B=\vee_{n=1}^{\infty}B_n$, $m(A_n)<\infty$, $m(B_n)<\infty$ folgt $A-B=\{x-y;\ x\in A,\ y\in B\}=\vee_{n=1}^{\infty}C_n$, $m(C_n)<\infty$ $(n=1, 2, \dots)$.

Def. 2. Es sei μ ein Carathéodorysches reguläres äusseres Mass auf Ω, und m sei ein Weilsches Mass im weiteren Sinne auf G. Wir heissen $\{T_x;\ x\in G\}$ *eine messbare Strömung* mit dem Parameter $x\in G$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) T_x ist eine eineindeutige Abbildung von Ω auf sich mit $\mu(E)=\mu(T_xE)$,

---

1) A. Weil, [I] Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés, C. R. Acad. Sci. Paris, **202** (1936), 1147–1149. [II] L'integration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualité, **863** (1940). K. Kodaira, [I] Über die Beziehungen zwischen den Massen und Topologien in einer Gruppe, Proc. Phy-math. Soc. Japan, **23** (1941), 67–119. [II] Über die Gruppe der messbaren Abbildungen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17** (1941), 18–23.

2) I. Gelfand und D. Raikov, On the theory of characters of commutative topological groups, C. R. Acad. Sci. URSS., **28** (1940), 195–198. D. Raikov, [I] Positive definite functions on commutative groups with an invariant measure, ibid., **28** (1940), 296–300. M. Krein, Sur une géneralisation du théorème de Plancherel au cas des integrales de Fourier sur les groupes topologiques commutatifs, ibid., **30** (1941), 484–488. D. Raikov, [II] Generalized duality theorem for commutative groups with an invariant measure, ibid., **30** (1941), 589–591.

3) Vgl. K. Kodaira, [I] loc. cit. 1), S. 91.

(ii) $$T_x T_y = T_{x+y}\,, \qquad T_0 = I\,,$$

(iii) Falls $f(\omega)$ eine reellwertige μ-messbare Funktion auf Ω ist, so ist $f(T_x\omega)$ eine $m\times\mu$-messbare Funktion auf $G\times\Omega$[4].

Z. B. definieren also die Abbildungen $T_x y = y \pm x$ von G auf sich eine messbare Strömung von G mit dem Parameter $x \in G$.

Wir nennen eine auf G definierte Funktion $F(x)$, deren Wert in einem Banachschen Raum liegt, *Bochner-messbar*[5], wenn $F(x)$ auf jede Menge $E \subset G$ mit $m(E) < \infty$ fast überall eine Grenzfunktion von endlichwertigen Funktionen ist. Wir bezeichnen nun mit $L^i(\Omega)$ den Banachschen Raum $\left\{f(\omega);\ f(\omega) \text{ komplex und } \int_\Omega |f(\omega)|^i \mu(d\omega) < \infty\right\}$ $(i=1, 2)$.

Satz 1. Es sei $f \in L^i(\Omega)$ $(i=1,2)$ und $\{T_x\}$ sei eine messbare Strömung mit dem Parameter $x \in G$. Dann ist $F_f(x) = f(T_x\omega)$ eine Bochner-messbare Funktion[6].

Kor. 1. Wenn L ein lineares Funktional auf $L^i(\Omega)$, dann ist $L\big(F_f(x)\big)$ messbar. Insbesondere ist $\|F_f(x)\|$ messbar.

Kor 2. Wenn m Weilsch ist, dann ist $\{T_x f;\ x \in G\}$ für jede $f \in L^i(\Omega)$ separabel[7].

Nun sei G eine im Kleinen bikompakte topologische Gruppe. Wir bezeichnen mit $\Gamma(G)$ die Gesamtheit aller reellen stetigen Funktionen $\varphi(x)$ auf G, für die $\{x;\ \varphi(x) \neq 0\}$ eine total-beschränkte Menge ist; und mit $\mathfrak{B}(G)$ den kleinsten Borelschen Mengenkörper, welcher alle Menge $\{x;\ \varphi(x) \neq 0\}$, $\varphi \in \Gamma(G)$ enthält. Wir nennen jede Menge $B \in \mathfrak{B}(G)$ Borelsch.

Def. 3. Ein auf G definiertes Carathéodorysches äusseres Mass m heisst *Haarsches*, wenn m folgende Eigenschaften hat:

(i) $$m(E+a) = m(E)\,,$$

(ii) Jede Borelsche Menge ist m-messbar,

(iii) $$m(E) = \inf_{E \subset B \in \mathfrak{B}} m(B)$$

(iv) $m(E) < \infty$ für jede total-beschränkte Menge E.

Nach H. Cartan[8] ist das Haarsche Mass von G bis auf Konstantenmultiplikation eindeutig bestimmt.

Satz 2. Jedes Haarsche Mass ist Weilsch im weiteren Sinne[9].

---

4) Vgl. E. Hopf, Ergodentheorie, Ergebnisse, (1937), S. 9.

5) Vgl. S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math., **20** (1933), 262–276.

6) Man beweist Satz 1 etwa zuerst für die charakteristische Funktion von E, dann für die endlichwertige Funktion und schliesslich für allgemeine Funktion $f(\omega) \in L^i(\Omega)$.

7) Vgl. K. Kodaira, [II] loc. cit. 1), S. 20.

8) H. Cartan, Sur la mesure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris, (1940). Vgl. auch I. Konisi, Über das Haarsche Mass, Nippon Sugaku-Buturigaku-Kaisi, **16** (1942), 325–338, (Japanisch).

9) Man beweist die (iii′) wie folgt: aus $m(A) < \infty$, $m(B) < \infty$ folgt $A = \vee_n A_n$, $B = \vee_n B_n$ (A_n und B_n sind totalbeschränkt), also $A - B = \vee_{m,n}(A_m - B_n)$, wobei $A_m - B_n$ sicher totalbeschränkt also $m(A_m - B_n) < \infty$ gilt.

2. G sei eine abelsche Gruppe und m ein Weilsches Mass im weiteren Sinne mit $m(G)=\infty$ und $m(x)=0$ für $x\in G$. Für $f, g \in L^1(G)$ $\left(\text{mit der Norm } \|f\|=\int_G |f(x)|\, m(dx)\right)$ setzen wir

$$(f\times g)(x)=\int_G f(x-y)g(y)m(dy),$$

dann ist $f\times g\in L^1(G)$ und $\|f\times g\|\leqq\|f\|\cdot\|g\|$[10].

Nach I. Gelfand und D. Raikov[11] ist $R=\{z;\ z=\lambda e+f,\ f\in L^1(G),$ λ komplexe Zahl$\}$ mit der Norm $\|z\|=|\lambda|+\|f\|$, und mit der Multiplikationsregel $(\lambda_1 e+f_1)\times(\lambda_2 e+f_2)=(\lambda_1\lambda_2)e+(\lambda_1 f_2+\lambda_2 f_1+f_1\times f_2)$ ein normierter Ring mit der Einheit e. R hat dann kein verallgemeinertes nilpotentes Element. Es gilt nun

Satz 3. X sei die Gesamtheit aller m-messbaren Charaktere χ von G: $|\chi(x)|=1$ und $\chi(x+y)=\chi(x)\cdot\chi(y)$. Dann ist.

$$\varphi_z(\chi)=\lambda+\int_G f(y)\overline{\chi(y)}m(dy)$$

ein Ringhomomorphismus von R auf dem Körper K aller komplexen Zahlen. $M_\chi=\{z:\varphi_z(\chi)=0\}$, $(\chi\in X)$ und $M_0=\{\lambda e\}$ sind maximale Ideale von R.

Satz 4. Es sei M ein maximales Ideal von R mit $M\neq M_0$, und $z\equiv(z, M)e$ (mod. M), $(z, M)\in K$.. Dann ist für jedes $f\in L^1(G)$ mit $(f, M)\neq 0$

$$\chi_M(y)=\big(F_f(y), M\big)\cdot(f, M)^{-1},\qquad F_f(y)=f(x+y)$$

ein messbarer Charakter von G. Dabei ist χ_M von der Wahl von f unabhängig. Die Zuordnung $X\ni\chi_M\leftrightarrow M_\chi(\neq M_0)$ ist umkehrbar eindeutig[12].

Es sei $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller maximalen Ideale von R. Wir identifisieren χ_M mit $M_\chi(M_\chi\neq M_0)$, dann ist $\mathfrak{M}$ ein bikompakter Raum und $\mathfrak{M}-M_0\cong X$ ein im Kleinen bikompakter topologischer Raum mit folgendem Umgebungssystem von $\chi_0\in X$

$$(a)\quad U(\chi_0; f_1,\dots,f_n,\varepsilon)=\left\{\chi;\ \left|\int_G f_i(y)\big(\overline{\chi(y)}-\overline{\chi_0(y)}\big)m(dy)\right|<\varepsilon,\ i=1,\dots,n\right\}$$

$$\big(f_i\in L^1(G),\ \varepsilon \text{ eine positive Zahl}\big).$$

Ferner ist dann X sogar eine topologische Gruppe mit der Multiplikation $\chi_1(x)\chi_2(x)=(\chi_1\chi_2)(x)$.

Jede $f\in L^1(G)\subset R$ wird dann eine stetige Funktion $\varphi_f(\chi)=(f, M_\chi)$ mit $\varphi_f(\chi_a)\to 0$ für $M_{\chi_a}\to M_0$; und umgekehrt jede komplexwertige stetige Funktion $g(\chi)$ auf X mit $g(M_{\chi_a})\to 0$ für $M_{\chi_a}\to M_0$ durch $\varphi_f(\chi)$,

10) Nach der Bedingung (iii') können wir den Funbinischen Satz auf $\int_{A-B}\int_B f(x-y)$ $g(y)m(dx)m(dy)$ $\big(A=\{x; f(x)\neq 0\},\ B=\{y;\ g(y)\neq 0\}\big)$ anwenden.

11) Vgl. I. Gelfand und D. Raikov, loc. cit. 2).

12) Vgl. I. Gelfand und D. Raikov, loc. cit. 2). Wir brauchen aber Kor. 1 von Satz 1 für die Messbarkeit von $\chi(y)$.

$f \in L^1(G)$ gleichmässig auf X approximiert werden, weil in R $\varphi_z(\chi) = \overline{\varphi_{z^*}(\chi)}$ für $z = \lambda e + f(x)$ und $z^* = \bar{\lambda} e + f^*(x)$ mit $f^*(x) = \overline{f(-x)}$ gilt[13].

Satz 5. $\chi(y)$ ist für jedes $y \in G$ eine stetige Funktion auf X[14].

Satz 6. Falls G im Kleinen bikompakt und m Haarsch, dann ist jeder messbare Charakter $\chi(y)$ auf $G \times X$ stetig. Also ist das folgende Pontrjaginsche Umgebungssystem (β) mit dem System (α) äquivalent:

$$(\beta) \qquad U(\chi_0; A, \varepsilon) = \{\chi; \, |\chi(y) - \chi_0(y)| < \varepsilon, \ \text{für alle} \ \ y \in A\},$$

wobei $A \subset G$ eine bikompakte Menge und ε eine positive Zahl ist.

Nunmehr sei m Weilsch. Es sei $C(\mathfrak{M})$ die Gesamtheit aller stetigen Funktionen auf $\mathfrak{M}$.

Satz 7. $\varphi(x)$ sei eine m-messbare positiv-definite Funktion auf G, d. h. wes. max $|\varphi(x)| < \infty$, $\varphi(x) = \overline{\varphi(-x)}$ und

$$\iint \varphi(x-y) q(x) \overline{q(y)} m(dx) m(dy) \geqq 0 \ \text{für alle} \ q \in L^1(G).$$

Dann ist das lineare Funktional von R

$$L(z) = \lambda + \int \varphi(x) f(x) m(dx), \qquad (z = \lambda e + f)$$

auf $C(\mathfrak{M})$ eindeutig erweitert werden, so dass

$$\text{(i)} \qquad L\big(\psi(M)\big) \geqq 0 \ \text{für} \ 0 \leqq \psi(M) \in C(\mathfrak{M}),$$

$$\text{(ii)} \quad \big|L\big(\psi(M)\big)\big| \leqq \|L\| \max |\psi(M)|, \qquad \|L\| = \text{wes. max} \, |\varphi|,$$

$$\text{(iii)} \qquad L(z^*) = \overline{L(z)}$$[15].

Satz 8. $\varphi(x)$ sei positiv-definit. Dann gibt es ein Radon-Lebesguesches Mass μ_φ auf $\mathfrak{B}(X)$, so dass

$$\varphi(y) = \int_X \chi(y) \mu_\varphi(d\chi)$$

fast überall auf G. μ_φ ist eindeutig durch φ bestimmt. $\chi(y)$ ist im allgemeinen nicht $\mathfrak{B}(X)$-messbar, aber ist immer μ^*_φ-messbar, wobei μ^*_φ

---

13) I. Gelfand, Normierter Ring, Rec. Math., **9** (1940), 1-23.

14) $\Xi < X$ sei eine beliebige totalbeschränkte offene Menge, dann gibt es ein $f \in L^1(G)$ mit $\varphi_f(\chi) > \frac{1}{2}$ für $\chi \in \Xi$, wenn wir den Approximationssatz auf die stetige Funktion $g(\chi)$ ($g(\chi) = 1$ für $\chi \in \Xi$ und $g(\chi_a) \to 0$ für $M_{\chi_a} \to M_0$) anwenden. Da $\chi(y) = \varphi_f(\chi)^{-1} \cdot \varphi_{F_f(y)}(\chi)$ ist, ist $\chi(y)$ stetig auf X.

15) Vgl. D. Raikov, [I] loc. cit. 2). Wir müssen aber statt einer totalbeschränkte offene Menge U in einer topologische Gruppe G die Menge $U = U(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{y : \|F_{f_i}(y) - F_{f_i}(0)\| < \varepsilon, \ i = 1, \ldots, n\}$ $(\infty > m(U) > 0)$ benützen. Dabei brauchen wir Kor. 2 von Satz 1 (Vgl. K. Kodaira, [I] loc. cit. 1), S. 105). Deshalb nehmen wir an, dass m ein (eigentliches) Weilsches Mass ist.

das Carathéodorysche äussere Mass mit $\mu_\varphi^*(E) = \inf_{E < B \in \mathfrak{B}(X)} \mu_\varphi(B)$ ist[16].

3. In diesem Paragraphen sei X ein abstrakter Raum, $\mathfrak{B}(X)$ ein Borelscher Mengenkörper auf X und $\mathfrak{H}$ ein Hilbertscher Raum.

Def. 4. $\{P(E); E \in \mathfrak{B}(X)\}$ heisst *Massoperatorensystem*[17], wenn

(i) $P(E)$ ist ein Projektionsoperator von $\mathfrak{H}$,

(ii) $$P(X) = I,$$

(iii) Aus $\mathfrak{B}(X) \ni E_i$, $E_1 \frown E_2 = 0$ folgt $P(E_1)P(E_2) = 0$ und $P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$,

(iv) Aus $\mathfrak{B}(X) \ni E_n$, $E_1 < E_2 < \cdots$, $\vee_n E_n = E_0$ folgt $\lim P(E_n) = P(E_0)$.

Dann ist $m_f(E) = \| P(E)f \|^2$, $E \in \mathfrak{B}(X)$ für jedes $f \in \mathfrak{H}$ ein gewöhnliches Radon-Lebesguesches Mass auf $\mathfrak{B}(X)$. Wir definieren dann ein Carathéodorysches äusseres Mass $m_f^*(E)$ mit $m_f^*(E) = \inf_{E < B \in \mathfrak{B}(X)} m_f(B)$. Wir können dann das Integral $\int_X \psi(x) dP(E) f = g \in \mathfrak{H}$ für m_f^*-messbare komplexwertige Funktion $\psi(x)$ wie üblich definieren[18].

---

16) Vgl. D. Raikov, [II], loc. cit. 2). Für Weilsches Mass im weiteren Sinne beweist man diesen Satz wie folgt: es sei $L(\psi)$, $\psi \in \Gamma(X)$ wie im Satz 7 definiert. Dann gibt es nach dem F. Rieszschen Satz ein positives Radon-Lebesguesches Mass μ mit $\mu(X) < \infty$ auf $\mathfrak{B}(X)$, so dass (*) $L(\psi) = \int_X \psi(\chi)\mu(d\chi)$, $\psi \in \Gamma(X)$ gilt. μ ist eindeutig durch L bestimmt. Wir brauchen nun einen Hilfssatz: μ^* sei das zu μ gehörige Carathéodorysche reguläre äussere Mass auf X, dann ist jeder m-messbare Charakter $\chi(y)$ auf $G \times X$ $m \times \mu^*$-messbar. Nach diesem Hilfssatz folgt aus dem Fubinischen Satz $\iint f(y)\overline{\chi(y)} m(dy)\mu(d\chi) = \int \left(\int f(y)\overline{\chi(y)} m(dy) \right) \mu(d\chi)$ für $f(y) \in L^1(G)$. Daher ist $\varphi_f(\chi)$ μ^*-messbar und das Integaral $\int \varphi_f(\chi)\mu(d\chi)$ existiert. Wir zeigen nun (**) $L(\varphi_f) = \int \varphi_f(\chi)\mu(d\chi)$. Dafür wählen wir eine bikompakte Menge $\Xi < X$ mit $|\varphi_f(\chi)| > \epsilon$ für $\chi \in \Xi$, und $\psi_\Xi(\chi) \in \Gamma(X)$ mit $0 \leqq \psi_\Xi(\chi) \leqq 1$, $\psi_\Xi(\chi) = 1$ für $\chi \in \Xi$. Aus $|\varphi_f(\chi) - \varphi_f(\chi)\psi_\Xi(\chi)| < \epsilon$ folgt $|L(\varphi_f - \varphi_f\psi_\Xi)| \leqq \|L\| \cdot \epsilon$, und andererseits gilt $\left| \int (\varphi_f - \varphi_f\psi_\Xi)\mu(d\chi) \right| \leqq \epsilon \cdot \mu(X)$. Wenn wir ϵ nach 0 rücken lassen, dann folgt (**) aus (*). Also haben wir nach dem Fubinischen Satz $\int \varphi(y) f(y) m(dy) = L(\varphi_f) = \int \left(\int f(y)\overline{\chi(y)} m(dy) \right) \mu(d\chi) = \int \left(\int \chi(y)\mu(d\chi) \right) f(y) m(dy)$. Da wir $f \in L^1(G)$ beliebig wählen können, gilt Satz 8 für $\mu_\varphi(E) = \mu(-E)$.

17) Vgl. H. Nakano, Über abelsche Ringe von Projektionsoperatoren, Proc. Phymath. Soc. Japan, **12** (1939), 357–374.

18) Es sei $\Delta = (E_1, \ldots, E_n)$, $E_i \frown E_j = 0 (i \neq j)$, $X = E_1 \smile \cdots \smile E_n$ mit $\sum_1^n \mathrm{Osc}(\psi, E_i) \| P(E_i) f \|^2 < \epsilon$ $(\mathrm{Osc}(\psi, E_i) = \sup_{x, y \in E_i} |\psi(x) - \psi(y)|)$. Für $\epsilon_n \to 0$ seien $\Delta_n = (E_1^{(n)}, \cdots, E_{r_n}^{(n)})$ solche Teilung für ϵ_n und zwar Δ_n eine Verfeinerung von Δ_{n-1}. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} \sum_1^{r_n} \varphi(x_i^{(n)}) P(E_i^{(n)}) f = g$ $(x_i^{(n)} \in E_i^{(n)})$ und dieses Element g von $\mathfrak{H}$ ist von der Wahl von Δ_n unabhängig. Wir bezeichnen dann $g = \int \psi(x) dP(E) f$.

Satz 9.

(i) $$\left\| \int \varphi(x) dP(E)f \right\|^2 = \int |\varphi(x)|^2 d\|P(E)f\|^2,$$

(ii) $$\left(\int \varphi(x) dP(E)f, g\right) = \int \varphi(x) d\big(P(E)f, g\big),$$

(iii) $$\int \big(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_2(x)\big) dP(E)f = \alpha \int \varphi_1(x) dP(E)f + \beta \int \varphi_2(x) dP(E)f,$$

(iv) *Aus* $|\varphi_n(x)| \leqq C$, $(n=1, 2, \dots)$, $\lim \varphi_n(x) = \varphi_0(x)$ *fast überall für*

$$m_f\text{-}Mass \ folgt \ \lim \left\| \int \varphi_n(x) dP(E)f - \int \varphi_0(x) dP(E)f \right\| = 0 .$$

Nun sei $\mathfrak{B}(Y)$ ein Borelscher Mengenkörper auf einem Raum Y und μ ein Radon-Lebesguesches Mass mit $\mu(Y) < \infty$. μ^* sei wie oben das zu μ zugehörige Carathéodorysche äussere Mass.

Satz 10. Es sei $\varphi(x, y)$ *auf* $X \times Y$ *beschränkt und* $m_f^* \times \mu^*$*-messbar. Dann gilt folgende.*

(i) $\int \varphi(x, y) dP(E)f = F(y) \in \mathfrak{H}$ *ist Bochner-messbar in bezug auf* μ^*,

(ii) $$\int \left(\int \varphi(x, y)\mu(dy)\right) dP(E)f = \int \left(\int \varphi(x, y) dP(E)f\right)\mu(dy) .$$

Es sei nun G eine abelsche Gruppe mit einem Weilschen Mass m und $\{T_x\}$ sei eine messbare Strömung auf Ω mit dem Carathéodoryschen äusseren Mass μ. Dann gilt

Satz 11. Es sei $U_x f = f(T_x\omega)$ *für* $f \in \mathfrak{H} = L^2(\Omega)$. *Dann gibt es Massoperatorensystem* $\{P(E)\}$ *auf dem Mengenkörper aller Borelschen Menge auf der Charaktergruppe* X *von* G, *so dass*

$$U_y f = \int_X \chi(y) dP(E)f$$

für jedes $f \in \mathfrak{H}$ *gilt*[19].

4. Nun sei auch G eine abelsche Gruppe mit einem Weilschen Mass m. Wir setzen

$$U_x f(y) = F_f(x) = f(x+y) .$$

Satz 12. Es sei N *die Gesamtheit aller* $x \in G$ *mit* $U_x = I$ N *ist dann offenbar ein Normalteiler von* G. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass* $x \not\equiv y$ (*mod.* N) *ist, ist die Existenz von einem messbaren Charakter* χ *mit* $\chi(x) \neq \chi(y)$[20].

Da die Charaktergruppe X von G eine im Kleinen bikompakte abelsche Gruppe ist, gibt es ein Haarsches Mass μ, und die Resultate

---

19) Vgl. E. Hopf, loc. cit. 4), S. 19. Dass aus $(U_y f, g) = \int \chi(y) d\big(P(E)f, g\big)$ $(f, g \in \mathfrak{H})$ $U_y f = \int \chi(y) dP(E)f$ folgt, ergibt sich aus Satz 9, (ii).

20) Da U_x eine messbare Strömung mit der Parameter $x \in G$ ist, folgt Satz 12 aus Satz 11 und Satz 4. Vgl. J. von Neumann, Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 445–492.

von **2** gelten für X. Es sei $\overline{G}$ die Gesamtheit aller stetigen Charaktere von X. Dann ist $\overline{G} \supset G/N$ und das von dem Umgebungssystem (α) bzw. (β) von $\overline{G}$ induzierte Umgebungssystem von G ist

$$\text{(I)}\quad U_1(x;f_1,\dots,f_n,\varepsilon)=\left\{y;\left|\int f_i(\chi)\left(\overline{\chi(x)}-\chi(y)\right)\mu(d\chi)\right|<\varepsilon,\ i=1,\dots,n\right\},$$

$\left(f_1,\dots,f_n \in L^1(X)\right)$ bzw.

$$\text{(II)}\quad U_2(x;\,\Xi,\varepsilon)=\left\{y;\ |\chi((x)-\chi(y)|<\varepsilon,\ \text{für alle}\ \chi\in\Xi\right\}\quad (\Xi \subset X$$

eine bikompakte Menge).

Wir können auch ein Umgebungssystem von G folgenderweise geben:

$$\text{(III)}\quad U_3(x;f_1,\dots,f_n,\varepsilon)=\left\{x;\int |f_i(x+z)-f_i(y+z)|^2 m(dz)<\varepsilon,\right.$$

$$\left. i=1,\dots n\right\},\ f_j\in L^2(G)^{21)}.$$

Satz 13. Die Umgebungssysteme (I), (II) und (III) sind einander äquivalent[22].

Nun setzen wir voraus, dass $L^2(G)$ separabel ist. Dann wird $X=\bigvee_{n=1}^{\infty}\Xi_n$, $\mu(\Xi_n)<\infty$ $(n=1,2,\dots)$. Also gilt der Beweis von D. Raikov[23] des Pontrjaginschen Dualitätssatzes, der den allgemeinen Plancherelschen Satz von M. Krein[24] benüzt, auch in unserem Falle. Nach diesem Satz liegt G/N überalldicht in der im Kleinen bikompakten topologischen Gruppe $\overline{G}$, und das dadurch induzierte Umgebungssystem von G ist mit dem Umgebungssystem (I) äquivalent. Also haben wir in diesem Falle den Satz von Weil:

Satz 14. Nach der Topologie, welche durch das Umgebungssytem (I) oder (II) oder (III) definiert wird, ist G im Kleinen total-beschränkt, falls $N=I$ ist. Die im Kleinen bikompakte Erweiterungsgruppe von G ist nichts anders als die Charaktergruppe $\overline{G}$ von X. Die Beziehung

---

21) Vgl. A. Weil, loc. cit. 1).

22) Beweis der Äquivalenz von (II) und (III). Es sei $U_3(x;f_1,\dots,f_n,\varepsilon)$ gegeben. Wir wählen bikompakte Menge $\Xi_i \subset X$ mit $\|P(\Xi_i^c)f_i\|<\frac{\varepsilon}{3}$ $(i=1,\dots,n)$ und setzen $\Xi=\Xi_1\cup\dots\cup\Xi_n$. Es sei nun $y\in U_2(x;\Xi,\varepsilon_2)$ $\left(\varepsilon_2^2<\frac{\varepsilon}{3}(\|f_1\|^2+\dots+\|f_n\|^2)\right)$, dann folgt aus $U_y f=\int \chi(y)dP(E)f$

$$\|U_x f_i-U_y f_i\|\leqq\int_\Xi|\chi(x)-\chi(y)|^2 d\|P(E)f_i\|+2\|P(\Xi^c)f_i\|^2\leqq\varepsilon_2^2\|f_i\|^2+2\varepsilon_2\leqq\varepsilon,$$

d. h. $U_2(x;\Xi,\varepsilon_2)\subset U_3(x;f_1,\dots,f_n,\varepsilon)$. Umgekehrt sei $U_2(x;\Xi,\varepsilon)$ gegeben. Nach der Fussnote 14) können wir $f\in L^1(G)$ so wählen, dass $|\chi(y)-\chi(x)|\leqq\frac{1}{2}\int|f(x+z)-f(y+z)|$ $m(dx)$ für alle $\chi\in\Xi$. Für diese $f(x)$ wählen wir $f_0(x)\in L^1(G)\frown L^2(G)$, so dass $\int|f(x)-f_0(x)|m(dx)<\frac{1}{4}\varepsilon$ und $m(E)<\infty$ für $\{x;f_0(x)\neq 0\}=E$ gilt. Dann ist $|\chi(y)-\chi(x)|\leqq\frac{1}{2}\int|f_0(x+z)-f_0(y+z)|m(dz)+\frac{\varepsilon}{2}\leqq\frac{1}{2}\left\{\int|f_0(x+z)-f_0(x+z)|^2m(dz)\right\}^{\frac{1}{2}}(2m(E))^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}$ für $\chi\in\Xi$. Also gilt für $(2m(E))^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1<\varepsilon$ $U_3(x;f_0,\varepsilon_1)\subset U_2(x;\Xi,\varepsilon)$, w. z. b. w.

23) Vgl. D. Raikov, loc. cit. 2).

24) Vgl. M. Krein, loc. cit. 2).

von dem Weilschen Mass mit dem Haarschen Mass von $\bar{G}$ oder dem allgemeinen Haarschen Mass von G ist wie bei Weil[25].

Es ist bemerkenswert, dass es formale Analogie zwischen der Dualitätsrelation der Charaktere von einer abelschen Gruppe und der Regularität eines Banachschen Raum gilt.

ein Banchscher Raum R,	eine abelsche Gruppe G,
die Norm $\|f\|$.	das Weilsche Mass $m(E)$,
lineares Funktional L,	messbarer Charakter χ,
konjugierter Raum $\bar{R}$,	Charaktergruppe X,
konjugierter Raum $\bar{\bar{R}}$ von $\bar{R}$,	Charaktergruppe $\bar{G}$ von X,
schwache Topologie von R,	Umgebungssystem (II) von G,
die Bedingung für die Regularität von R ist die Bikompaktheit der Einheitskugel von R in bezug auf die schwache Topologie.	die Bedingung für $\bar{G}=G/N$ ist die im-Kleinen-Bikompaktheit von G in bezug auf dem Umgebungssystem (II) von G.

25) Vgl. A. Weil, und K. Kodaira, loc. cit. 1).