89. *Sur l'approximation de la solution du probleme de Dirichlet.*

Par Masao INOUE.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Kyusyu.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1943.)

1. Etant donné un domaine quelconque dans le plan, on se donne une équation aux dérivées partielles $R(u)=0$ avec des conditions sur la frontière du domaine. Il s'agit alors de trouver une fonction vérifiant $R(u)=0$ dans ce domaine et satisfaisant aux conditions données sur la frontière.

Pour cela, voilà une idée. Faisons correspondre l'equation aux différences finies $R_h(u)=0$ à l'équation $R(u)=0$ par un passage formel des dérivées aux différences finies et formons une fonction u_h sur des nœuds d'un réseau régulier, vérifiant $R_h(u_h)=0$ et remplissant des conditions convenables sur les nœuds-frontière. Pour $h \to 0$, c'est-à-dire, lorsque la densité du réseau croît indéfiniment, u_h tend vers une fonction u. Sous quelques conditions, on prouve que cette fonction u vérifie $R(u)=0$ dans le domaine et satisfait aux conditions données sur la frontière du domaine. Ainsi l'existence de la solution du problème sera établie.

De telles méthodes sont déjà proposées, chacune d'une manière un peu différente, par divers auteurs: MM. Le Roux, Richardson, Phillips, Wiener, Courant, Friedrichs et Lewy[1]. A côté du grand intérêt que cette idée offre dans le champ théorique, on ne doit pas négliger l'importance qu'elle présente aussi dans le champ pratique: en effet, elle ouvre une route directe pour le calcul numérique de la solution du problème. Par exemple, elle a conduit M. Liebmann à une méthode—aujourd'hui appelée de son nom—pour le calcul numérique de la solution du problème de Dirichlet[2].

Si l'on se met exclusivement dans l'usage pratique de cette méthode, des résultats déjà publiés seront suffisants pour l'assurer. Mais, au point de vue purement mathématique, je pense qu'il y a encore des choses à ajouter.

Dans cette Note, en me bornant à l'équation de Laplace et à

---

1) J. Le Roux: Sur le problème de Dirichlet, Journ. math. pures et appl., t. **10** (1914).

R. G. D. Richardson: A new method in boundary problems for differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., v. **18** (1917).

H. B. Phillips and N. Wiener: Nets and the Dirichlet Problem, Journ. Math. and Phys. Mass. Inst. Tech., Ser. II, nº **55** (1923).

R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann., Bd, **100** (1928).

2) H. Liebmann: Die angenäherte Ermittlung harmonischer Funktion und konformer Abbildungen, Sitz. der Bayer. Akad. der Wiss., Math.-Phys. (1918). Voir aussi G. H. Shortley and T. Weller: The numerical solution of Laplace's equation, Journ. appl. Physics, v. **9** (1938) et C. Sunatani and S. Negoro: On a method of approximate solution of a plane harmonic function, Tech. Rep. Tohoku Univ., v. **12** (1937).

l'équation de Poisson (Problème de Dirichlet), je vais le justifier dans toute sa rigueur à l'aide de quelques renseignements sur la solution du problème[1]

2. Couvrons le plan entier d'un réseau de carrés égaux (pour $k=1$; triangles équilatéraux égaux pour $k=2$; hexagones équilatéraux égaux pour $k=3$). Ce réseau devra être constitué de telle façon que deux polygones ne se superposent pas, même partiellement, et que deux polygones contigus qui ont en commun une portion de côté aient aussi en commun les deux sommets situés sur le côté considéré. Supposons que la longueur du côté soit $h<1$ et qu'un côté soit parallèle à x-axe de coordonnées.

Désignons par I_h^k un nombre fini de nœuds et par Γ_h^k l'ensemble des nœuds $P(x, y)$ qui n'appartiennent pas à I_h^k et tels qu'il existe au moins un nœud P_i appartenant à I_h^k parmi les quatre (pour $k=1$; six pour $k=2$; trois pour $k=3$) nœuds voisins de P: pour $k=1$, $P_1(x+h, y)$, $P_2(x, y+h)$, $P_3(x-h, y)$ et $P_4(x, y-h)$; pour $k=2$, $P_1(x+h, y)$, $P_2(x+h/2,\ y+\sqrt{3}\,h/2)$, $P_3(x-h/2,\ y+\sqrt{3}\,h/2)$, $P_4(x-h, y)$, $P_5(x-h/2,\ y-\sqrt{3}\,h/2)$ et $P_6(x+h/2,\ y-\sqrt{3}\,h/2)$; pour $k=3$, $P_1(x+h, y)$, $P_2(x-h/2,\ y+\sqrt{3}\,h/2)$ et $P_3(x-h/2, y-\sqrt{3}\,h/2)$ ou $P_1(x-h, y)$, $P_2(x+h/2, y+\sqrt{3}\,h/2)$ et $P_3(x+h/2, y-\sqrt{3}\,h/2)$. Posons $L_h^k=I_h^k+\Gamma_h^k$.

Lorsqu'on parle en même temps de I_h^k, Γ_h^k, L_h^k pour $k=1, 2, 3$, on supprime l'indice k et écrit simplement I_h, Γ_h, L_h.

3. Soit $u_h(P)$ une fonction réelle définie sur des nœuds. On l'appelle *fonction de nœud* et posons

pour $k=1$,

$$\Delta u_h(P)=\frac{1}{h^2}\{\sum_{i=1}^{4} u_h(P_i)-4u_h(P)\} ;$$

pour $k=2$,

$$\Delta u_h(P)=\frac{2}{3h^2}\{\sum_{i=1}^{6} u_h(P_i)-6u_h(P)\} ;$$

pour $k=3$,

$$\Delta u_h(P)=\frac{4}{3h^2}\{\sum_{i=1}^{3} u_h(P_i)-3u_h(P)\} .$$

Les équations aux différences finies $\Delta u_h=0$ correspondent à l'équation de Laplace.

Alors, les théorèmes suivants sont faciles à établir.

Théorème 1. Une fonction de nœud définie sur L_h vérifiant $\Delta u_h=0$ sur I_h, ne prend ni maximum ni minimum sur I_h (au sens étroit).

Théorème 2. Il existe une et une seule fonction de nœud u_h prenant des valeurs données sur Γ_h et vérifiant $\Delta u_h+\varphi_h=0$ sur I_h, où φ_h est une fonction de nœud définie sur I_h.

En particulier, on désigne par $G_{L_h}(Q, P)$ la fonction de nœud s'annulant sur Γ_h et vérifiant $\Delta G_{L_h}(Q, P)=0$ si $P\neq Q$ et $\Delta G_{L_h}(Q, P)+1/h^2=0$ si $P=Q$.

1) Le détail de cette Note sera publié dans "Reports of the Faculty of Science, Kyûsyû Imperial University". J'aurai prochainement l'occasion de discuter le même sujet concernant le problème de Neumann.

Théorème 3. Soit u_h une fonction de nœud s'annulant sur Γ_h et vérifiant $\Delta u_h \leqq 0$ sur I_h. On a alors $u_h \geqq 0$ sur I_h. De plus, si $\Delta u_h < 0$ en un nœud, on a $u_h > 0$ sur I_h.

4. On arrive ensuite à un fait très important.

Théorème 4. Soient L_h et $\varphi_h \geqq 0$ bornés uniformément par rapport à h[1]. Alors, pour les fonctions de nœud u_h s'annulant sur Γ_h et vérifiant $\Delta u_h + \varphi_h = 0$ sur I_h, il existe une constante positive C indépendant de h, telle qu'on ait sur L_h

$$0 \leqq u_h < C.$$

Démontrons ce théorème pour $k=1$. Il suffit de prouver la proposition dans le cas de $\varphi_h \equiv 1$. A cet effet, choisissons convenablement (ξ, η) de manière que $\bar{I}_h : (\xi + ih, \eta + jh)\big(i, j = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)\big)$ contienne I_h, où $nh = \lambda < l$, l étant une constante positive. $\bar{I}_h$ déterminera $\bar{\Gamma}_h$ et on posera $\bar{L}_h = \bar{I}_h + \bar{\Gamma}_h$. Si l'on désigne par $\bar{u}_h$ la fonction de nœud qui s'annule sur $\bar{\Gamma}_h$ et vérifie $\Delta \bar{u}_h + 1 = 0$ sur $\bar{I}_h$, on a sur L_h

$$0 \leqq u_h \leqq \bar{u}_h.$$

Cela étant, formons une fonction de nœud $v_{i,h}$ sur $\bar{L}_h$ $\big(i=0, \pm 1, \dots, \pm(2n-1)\big)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) si $(x, y) \in \bar{\Gamma}_h$,

$$v_{i,h} = 0;$$

(2) si $(x, y) \in \bar{I}_h$,

$$\Delta v_{i,h} + 1 = 0,$$

pour (x, y) situé sur $\mathfrak{L}_1 : y - \eta - ih = x - \xi$ ou sur $\mathfrak{L}_2 : y - \eta - ih = \xi - x$;

$$\Delta v_{i,h} = 0$$

pour (x, y) non situé ni sur $\mathfrak{L}_1$, ni sur $\mathfrak{L}_2$. On vérifie alors sur $\bar{L}_h$

$$v_{i,h} \leqq \lambda h.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \bar{u}_h(P) &= \sum_{Q \in \bar{I}_h} G_{\bar{L}_h}(Q, P) \\ &< \sum_{i=-2(n-1)}^{2(n-1)} v_{i,h}(P) \\ &< 4\lambda^2 < 4l^2 \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante positive C indépendant de h, telle qu'on ait sur L_h

$$0 \leqq u_h < C.$$

5. Soient D un domaine borné de frontière F et U une fonction harmonique dans D et continue sur $\bar{D} = D + F$. Supposons que cette fonction U satisfasse à la condition suivante (I): on a dans D

---

1) Il existe un nombre positif R indépendant de h et un point P_h dépendant de h tels que L_h soit contenu dans le cercle de centre P_h et de rayon R, et que $|\varphi_h| < R$,

$$\left| \frac{\partial^4 U}{\partial x^i \partial y^{4-i}} \right| < M \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4),$$

où M est une constante positive indépendant de (x, y).

Choisissons maintenant L_h de telle facon que $L_h \subset \bar{D}$, $I_h \subset D$ et que le segment de lier un nœud de I_h à un nœud voisin de I_h ou à un nœud voisin de Γ_h soit contenu dans D, et désignons par u_h la fonction de nœud qui prend des valeurs de U sur Γ_h et vérifie $\Delta u_h = 0$ sur I_h. On a alors le

Théorème 5. Il existe une constante positive K indépendant de h, telle qu'on ait sur L_h

$$|u_h - U| < K h^{\tau},$$

où $\tau = 2$ pour $k = 1, 2$ et $\tau = 1$ pour $k = 3$.

Au lieu de la condition (I), on suppose la suivante (II): pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction U_ε harmonique dans D et continue sur $\bar{D}$ satisfaisant aux conditions: on a sur $\bar{D}$

$$|U_\varepsilon - U| < \varepsilon$$

et dans D

$$\left| \frac{\partial^4 U_\varepsilon}{\partial x^i \partial y^{4-i}} \right| < M_\varepsilon \qquad (i=0, 1, 2, 3, 4),$$

où M_ε est une constante positive ne dépendant que de ε.

On a alors le

Théorème 6. Etant donné un nombre positif ε, on a sur L_h

$$|u_h - U| < \varepsilon$$

pour tout h assez petit.

Désignons par $\mathfrak{F}$ un prolongement continu des valeurs de U sur F et par u_h^* la fonction de nœud qui prend $\mathfrak{F}$ sur Γ_h et verifie $\Delta u_h^* = 0$ sur I_h, et choisissons L_h de manière que, Δ_i étant un domaine complètement contenu dans D, Γ_h soit contenu dans $\bar{D} - \Delta_i$ pour tout h assez petit. On a alors le

Théorème 7. Etant donné un nombre positif ε, on a sur L_h

$$|u_h^* - U| < \varepsilon$$

pour tout h assez petit.

6. Considérons maintenant le cas où D est limité par un nombre fini de courbes jordaniennes simples et fermées. Au lieu d'avoir restreint le domaine, on va diminuer les restrictions pour L_h: c'est-à-dire, abandonnant les restrictions pour L_h posées dans le numéro précédent, on suppose que, Δ_e étant un domaine contenant $\bar{D}$ et Δ_i un domaine contenu complètement dans D, $L_h \subset \Delta_e$ et $\Gamma_h \subset \Delta_e - \Delta_i$ pour tout h assez petit—autrement dit, Γ_h tende uniformément par rapport à h vers F. On a alors le

Théorème 8. Etant donné un nombre positif ε, on a sur les nœuds de L_h situés sur $\bar{D}$

$$|u_h^* - U| < \varepsilon$$

pour tout h assez petit.

L'essentiel de la démonstration de ce fait est dû au théorème suivant:

Théorème 9. Soient D un domaine limité par un nombre fini de courbes jordaniennes simples et fermées F et U une fonction harmonique dans D et continue sur $\bar{D}=D+F$. Pour n'importe quel $\varepsilon>0$, il existe alors un domaine Δ_ε contenant $\bar{D}$ et une fonction harmonique U_ε dans Δ_ε, telle qu'on ait sur $\bar{D}$

$$|U_\varepsilon - U| < \varepsilon$$

et dans Δ_ε

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n U_\varepsilon}{\partial x^i \partial y^{n-i}}\right| < M_\varepsilon \delta_\varepsilon^n \qquad \binom{n=0,1,2,\dots}{i\leqq n},$$

où M_ε et δ_ε sont des constantes positives ne dépendant que de ε.

En effet, considérons une suite de domaines D_m limités par un nombre fini de courbes jordanniennes simples et fermées, décroissants (au sens étroit) de limite $\bar{D}$ et supposons que tout D_m soit contenu dans un domaine fermé Ω contenant $\bar{D}$ dans son intérieur.

$\mathfrak{F}$ étant continue sur Ω, elle sera approchée à moins de ε par un polynôme $\mathfrak{P}$: $|\mathfrak{F}-\mathfrak{P}|<\varepsilon$ sur Ω. Ce polynome $\mathfrak{P}$ est la différence entre deux fonctions sousharmoniques $\mathfrak{P}_1$ et $\mathfrak{P}_2$: $\mathfrak{P}=\mathfrak{P}_1-\mathfrak{P}_2$ sur Ω. Désignons par $U_m^{(i)}$ la solution du problème de Dirichlet pour D_m et $\mathfrak{P}_i$ $(i=1,2)$ et posons $U_{(m)}=U_m^{(1)}-U_m^{(2)}$. On a alors sur $\bar{D}$

$$|U_{(m)}-U|<\varepsilon$$

pour tout m assez grand[1].

Désignons maintenant par $\sum_m$ le contour extérieur de D_m et par D_m^* le domaine borné limité par $\sum_m$. Définissons les fonctions $V_m^{(i)}$ pour $i=1,2$ sur $\bar{D}_m^*$ $(=D_m^*+\sum_m)$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} V_m^{(i)}(P) &= \mathfrak{P}_i(P) \quad \text{si} \quad P(x,y)\in D_m^*-D_m=E_m, \\ &= U_m^{(i)}(P) \quad \text{si} \quad P(x,y)\in \bar{D}_m^*-E_m. \end{aligned}$$

Evidemment, $V_m^{(i)}$ est continue sur $\bar{D}_m^*$, sousharmonique dans D_m^* et harmonique dans $D_m^*-E_m$. Il existe donc une distribution de masse positive μ_i sur E_m telle que

$$V_m^{(i)}(P)=H_m^{(i)}(P)-\int_{E_m}\log\frac{1}{PQ}d\mu_i(e_Q),$$

où $H_m^{(i)}$ est la fonction harmonique dans D_m et continue sur $\bar{D}_m^*$ qui prend des valeurs de $V_m^{(i)}$ sur $\sum_m$.

Or, D_m^* étant un domaine borné limité par une courbe jordanienne, $H_m^{(i)}$ est approchée à moins de ε par un polynôme harmonique $J_m^{(i)}$: $|J_m^{(i)}-H_m^{(i)}|<\varepsilon$ sur $\bar{D}_m^*$ $(i=1,2)$.

D'autre part, on peut choisir un nombre fini de points distincts $Q_1^{(i)}, Q_2^{(2)}, \dots, Q_r^{(i)}$ sur E_m et des nombres positifs $\nu_j^{(i)}$ correspondant à $Q_j^{(i)}$ de manière à avoir sur $\bar{D}_{m+1}$

---

1) M. Inoue: Sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques, Proc. **15** (1939)

$$\left|\int_{E_m}\log\frac{1}{PQ}d\mu_i(e_Q)-\sum_{j=1}^{r}\nu_j^{(i)}\log\frac{1}{PQ_j^{(i)}}\right|<\varepsilon \qquad (i=1,2).$$

Ensuite, si l'on définit la fonction U_{m+1} sur $\bar{D}_{m+1}$ par

$$U_{m+1}(P)=\left(J_m^{(1)}(P)-J_m^{(2)}(P)\right)-\sum_{j=1}^{r}\left(\nu_j^{(1)}\log\frac{1}{PQ_j^{(1)}}-\nu_j^{(2)}\log\frac{1}{PQ_j^{(2)}}\right),$$

U_{m+1} est harmonique dans D_{m+1}, continue sur $\bar{D}_{m+1}$, où $|U_{m+1}-U|<5\varepsilon$. D'ailleurs, par l'expression de U_{m+1}, on peut déterminer deux nombres positifs M_{m+1}, δ_{m+1} de manière qu'on ait dans D_{m+1}

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n U_{m+1}}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\right|<M_{m+1}\delta_{m+1}^n \qquad \begin{pmatrix} n=0,1,2,\dots \\ i\leqq n \end{pmatrix},$$

d'où résulte la proposition du théorème. Remarquons que, si D_m est limité par une courbe jordanienne, il devient $D_m^*=D_m$; donc dans ce cas la démonstration est très simple.

7. Passons maintenant à l'équation de Poisson. Dans ce cas, l'équation aux différences finies $\Delta u_h+\varphi_h=0$ correspond à l'équation de Poisson $\Delta u+\varphi=0$. Le théorème analogue au 9 s'énonce comme il suit.

Théorème 10. Soient D un domaine limité par un nombre fini de courbes jordaniennes simples et fermées F, φ une fonction régulière dans un domaine contenant $\bar{D}=D+F$, et V une fonction qui est régulière sur $\bar{D}$ et vérifie $\Delta V+\varphi=0$ dans D. Pour n'imorte quel $\varepsilon>0$, il existe alors un domaine Δ_ε contenant $\bar{D}$ et une fonction régulière V_ε vérifiant $\Delta V_\varepsilon+\varphi=0$ dans Δ_ε, telle qu'on ait sur $\bar{D}$

$$|V_\varepsilon-V|<\varepsilon$$

et dans Δ_ε

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{\partial^n V_\varepsilon}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\right|<M_\varepsilon\delta_\varepsilon^n \qquad \begin{pmatrix} n=0,1,2,\dots \\ i\leqq n \end{pmatrix},$$

où M_ε et δ_ε sont des constantes positives ne dépendant que de ε.

Ce théorème nous conduit enfin au résultat suivant. Désignons par v_h la fonction de nœud qui prend $\mathfrak{F}$ sur Γ_h, $\mathfrak{F}$ étant un prolongement continu des valeurs de V sur F, et vérifie $\Delta v_h+\varphi=0$ sur I_h. On a alors le

Théorème 11. Etant donné un nombre positif ε, on a sur les nœuds de L_h situés sur $\bar{D}$

$$|v_h-V|<\varepsilon$$

pour tout h assez petit.

8. Il n'est pas difficile d'étendre des résultats haut acquis au cas de l'espace. Je me contente de signaler quelques remarques.

D'abord il est clair qu'il faut couvre l'espace d'un réseau de cubes égaux. Puis, concernant un théorème qui remplace le théorème 4 qui a joué un rôle fondamental, dans ce qui précède, on voit qu'il suffit dans le cas de l'espace d'assurer $u_h<C/h$ au lieu de $u_h<C$. Cela observé, la démonstration de ce fait sera plus directe et facile que dans le cas du plan: en effet, elle est due au fait suivant digne de

signaler ici : dans le cas du plan, il n'existe pas une fonction de nœud définie sur tout nœud d'un réseau illimité, telle qu'on ait $u_h(Q)=1$ en un nœud Q, $\Delta u_h(P)=0$ en tout nœud $P \neq Q$ et $\lim_{PQ \to \infty} u_h(P)=0$. Or, dans le cas de l'espace (à $n \geqq 3$ dimensions), il existe une et une seule telle fonction de nœud[1]. Cette propriété d'existence facilite quelques démonstrations dans le cas de l'espace (à $n \geqq 3$ dimensions).

Finalement remarquons que, pour la validité d'un théorème correspondant aux 9 et 10, il faut considérer comme D un domaine limité par des surfaces assez régulières[2].

---

1) M. Inoue : Théorèmes asymptotiques concernant une suite de variables aléatoires indépendantes dont les lois de répartition tendent vers celle de Gauss (en japonais), Reports of the Faculty of Science, Kyūsyū Imperial University, T. **1** (1943).

2) Ce travail est soutenu par la dépense de recherche scientifique du Ministère de l'Education Nationale.