3. *Sur les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs des paths, II.*

Par Kentaro YANO.
Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 12, 1945.)

§ 1. Dans une Note précédente[1] portant le même titre que celle-ci, nous avons étudié les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs généralisés de M. O. Veblen[2] et ceux de MM. D. van Dantzig[3] et J. Haantjes[4].

Pour représenter leur espace projectif généralisé P_n à n dimensions, on prend un espace à connexion affine A_{n+1} à $n+1$ dimensions sans torsion qui contient un champ de vecteur concourant et qui admet une collinéation affine dans la direction donnée par ce champ de vecteur, les points de l'espace projectif généralisé étant représentés par les rayons, c'est-à-dire par les courbes dont les tangentes sont dans la direction du champ de vecteur concourant, et les paths par les surfaces totalement géodésiques à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1}[5].

Un tel espace à connexion affine à $n+1$ dimensions peut bien représenter un espace projectif des paths de MM. O. Veblen, D. van Dantzig et J. Haantjes. Inversement, si l'on se donne un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions contenant un champ de vecteur, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que cet espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions puisse représenter un espace projectif P_n des paths à n dimensions ? Pour qu'un espace à connexion affine à $n+1$ dimensions contenant un champ de vecteur puisse représenter un espace projectif des paths à n dimensions, il faut et il suffit que toutes les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths de A_{n+1} soient totalement géodésiques, les rayons étant définis comme les courbes dont les tangentes sont toujours dans la direction du champ de vecteur donné.

En désignant par $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}(\lambda, \mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, \cdots, n)$ les composantes de

1) K. Yano: Sur les espaces à connexion affine qui peuvent représenter les espaces projectifs des paths. Proc. **20** (1944), 631-639.

2) O. Veblen: Generalized projective geometry. Journal of the London Math. Soc. **4** (1929), 140-160.

3) D. van Dantzig: Theorie des projektiven Zusammenhangs n-dimensionaler Räume. Math. Ann. **106** (1932), 400-454.

4) J. Haantjes: On the projective geometry of paths. Proc. Edinburgh Math. Soc. **5** (1937), 103-115.

5) J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces. Annals of Math. **32** (1931), 327-360.

D. van Dantzig: Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie, I et II. Proc. Akad. Amsterdam, **35** (1932), 524-534 et 535-542.

K. Yano: Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des paths. Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **24** (1938), 395-464.

la connexion affine de A_{n+1} et par ξ^λ les composantes du champ de vecteur donné, nous avons montré que, pour qu'un espace à connexion affine A_{n+1} puisse représenter un espace projectif des paths P_n, il faut et il suffit que

$$\xi^\lambda{}_{;\mu;\nu}+\Pi^\lambda{}_{.\mu\nu\omega}\xi^\omega=\delta^\lambda_\mu\varphi_\nu+\delta^\lambda_\nu\varphi_\mu+\varphi_{\mu\nu}\xi^\lambda, \tag{1.1}$$

$$\xi^\lambda{}_{;\nu}=p\delta^\lambda_\nu+q_\nu\xi^\lambda, \tag{1.2}$$

p, φ_ν, q_ν et $\varphi_{\mu\nu}$ étant respectivement un scalaire, deux vecteurs covariants et un tenseur symétrique covariant, où nous avons désigné par le point-virgule la dérivée covariante par rapport aux composantes $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de la connexion affine et par $\Pi^\lambda{}_{.\mu\nu\omega}$ le tenseur de courbure

$$\Pi^\lambda{}_{.\mu\nu\omega}=\frac{\partial\Pi^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\omega}-\frac{\partial\Pi^\lambda_{\mu\omega}}{\partial x^\nu}+\Pi^a_{\mu\nu}\Pi^\lambda_{a\omega}-\Pi^a_{\mu\omega}\Pi^\lambda_{a\nu}. \tag{1.3}$$

Dans une Note précédente[1] nous avons donné une interprétation géométrique des équations (1.1) et (1.2). L'équation (1.1) montre que l'espace A_{n+1} à connexion affine admet une collinéation sousprojective dans la direction de ξ^λ. L'équation (1.2) dit que le champ de vecteur ξ^λ est cohérent, c'est-à-dire, si l'on développe ξ^λ le long d'une courbe quelconque de A_{n+1}, les directions successives données par ξ^λ se coupent et elles forment une surface réglée développable sur le plan.

Dans la Note précédente, nous avons choisi, pour obtenir les équations (1.1) et (1.2), un système de coordonnées spécial dans lequel le champ de vecteur a les composantes $\xi^\lambda=\delta^\lambda_0$, et nous avons transformé les résultats obtenus dans les formes tensorielles (1.1) et (1.2). Dans cette Note, nous déduirons ces résultats d'une manière générale et ajoutons quelques remarques sur les paramètres projectifs sur les paths de l'espace projectif généralisé.

§ 2. Considérons un espace A_{n+1} à connexion affine à $n+1$ dimensions dont les composantes de la connexion sont $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ et qui contient un champ de vecteur ξ^λ et cherchons les conditions nécessaire et suffisantes pour que toutes les surfaces S_2 à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant les mêmes paths soient toujours totalement géodésiques, les rayons étant les courbes définies par les équations différentielles

$$\frac{dx^\lambda}{dr}=\xi^\lambda(x), \tag{2.1}$$

c'est-à-dire, les tangentes aux rayons sont toujours dans les directions déterminées par le champ de vecteur ξ^λ.

Soient

$$x^\lambda=x^\lambda(u^0, u^1)=x^\lambda(u^a), \qquad (a, b, c, \dots, f=0, 1) \tag{2.2}$$

les équations paramétriques d'une surface S_2. La surface S_2 étant totalement géodésique, ses équations paramétriques (2.2) doivent satisfaire aux équations différentielles de la forme

1) K. Yano: Subprojective transformations, subprojective spaces and subprojective collineations. Proc. **20** (1944), 671–675.

$$(2.3)\qquad \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^b \partial u^c}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^b}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}\Gamma^a_{bc},$$

et les fonctions Γ^a_{bc} de u^a définissent la connexion affine induite sur la surface S_2 totalement géodésique.

D'autre part, la surface S_2 étant engendrée par les rayons définis par les équations différentielles (2.1), le champ de vecteur ξ^λ doit être toujours tangent à la surface S_2. Donc, on doit avoir l'équation de la forme

$$(2.4)\qquad \xi^\lambda=\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}v^a,$$

où les v^a sont des fonctions de u^a.

Les conditions d'intégrabilité des équations différentielles (2.3) sont

$$(2.5)\qquad \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^b}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}\frac{\partial x^\omega}{\partial u^d}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}R^a{}_{\cdot bcd},$$

où $R^a{}_{\cdot bcd}$ sont les composantes du tenseur de courbure de la connexion affine Γ^a_{bc}:

$$(2.6)\qquad R^a{}_{\cdot bcd}=\frac{\partial \Gamma^a_{bc}}{\partial u^d}-\frac{\partial \Gamma^a_{bd}}{\partial u^c}+\Gamma^f_{bc}\Gamma^a_{fd}-\Gamma^f_{bd}\Gamma^a_{fc}.$$

D'autre part, en prenant la dérivée de (2.4) par rapport à u^c, et en substituant dans les équations dérivées les équations (2.3), on trouve

$$(2.7)\qquad \xi^\lambda{}_{;\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}=\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}v^a{}_{;c},$$

où

$$(2.8)\qquad \xi^\lambda{}_{;\nu}=\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\nu}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\xi^\mu \quad \text{et} \quad v^a{}_{;c}=\frac{\partial v^a}{\partial u^c}+\Gamma^a_{bc}v^b.$$

Si toutes les surfaces à deux dimensions engendrées par les rayons rencontrant un path arbitraire sont toujours totalement géodésiques, les équations (2.5) et (2.7) doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}$ telles que (2.4) soient valables.

Donc, prenons $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}$ de manière qu'on ait

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^0}=\xi^\lambda \quad \text{et} \quad \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^1}=\eta^\lambda,$$

où η^λ est un vecteur arbitraire. Alors, les équations (2.5) nous donnent

$$(2.9)\qquad \begin{cases} \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\mu\eta^\nu\xi^\omega=\xi^\lambda R^0{}_{\cdot 010}+\eta^\lambda R^1{}_{\cdot 010}, \\ \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\eta^\mu\eta^\nu\xi^\omega=\xi^\lambda R^0{}_{\cdot 110}+\eta^\lambda R^1{}_{\cdot 110}, \end{cases}$$

et les équations (2.7)

$$\text{(2.10)} \qquad \begin{cases} \xi^\lambda_{;\nu}\xi^\nu = \xi^\lambda v^0_{:0} + \eta^\lambda v^1_{:0}, \\ \xi^\lambda_{;\nu}\eta^\nu = \xi^\lambda v^0_{:1} + \eta^\lambda v^1_{:1}. \end{cases}$$

Les équations (2.9) et (2.10) doivent être valables pour n'importe quelle direction η^λ en un point quelconque de A_{n+1}. Donc, on obtient respectivement de (2.9)

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad \Pi^\lambda{}_{\mu\nu\omega}\xi^\mu\xi^\omega = \theta\delta^\lambda_\nu + \theta_\nu\xi^\lambda, \\ \text{(ii)} \quad \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega + \Pi^\lambda{}_{\cdot\nu\mu\omega}\xi^\omega = \delta^\lambda_\mu\psi_\nu + \delta^\lambda_\nu\psi_\mu + \psi_{\mu\nu}\xi^\lambda, \end{cases}$$

et de (2.10)

$$\text{(2.12)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} \quad \xi^\lambda_{;\nu}\xi^\nu = a\xi^\lambda, \\ \text{(ii)} \quad \xi^\lambda_{;\nu} = p\delta^\lambda_\nu + q_\nu\xi^\lambda, \end{cases}$$

où θ, θ_ν, ψ_ν, $\psi_{\mu\nu}$, a, p et q_ν sont les fonctions de x^λ.

On voit que les équations (2.11) (i) sont les conséquences de (2.11) (ii) et les équations (2.12) (i) celles de (2.12) (ii).

Or, en substituant les équations

$$\text{(2.13)} \qquad \xi^\lambda_{;\mu;\nu} = p_{;\nu}\delta^\lambda_\mu + pq_\mu\delta^\lambda_\nu + (q_{\mu;\nu} + q_\mu q_\nu)\xi^\lambda$$

tirées de (2.12) (ii) dans les identités

$$\xi^\lambda_{;\mu;\nu} - \xi^\lambda_{;\nu;\mu} = \xi^\omega \Pi^\lambda{}_{\cdot\omega\mu\nu},$$

on trouve

$$\text{(2.14)} \qquad (p_{;\nu} - pq_\nu)\delta^\lambda_\mu - (p_{;\mu} - pq_\mu)\delta^\lambda_\nu + (q_{\mu;\nu} - q_{\nu;\mu})\xi^\lambda = \xi^\omega \Pi^\lambda{}_{\cdot\omega\mu\nu}.$$

Les équations (2.11) (ii), (2.14) et les identités

$$\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega} + \Pi^\lambda{}_{\cdot\nu\omega\mu} + \Pi^\lambda{}_{\cdot\omega\mu\nu} = 0$$

nous donnent

$$\text{(2.15)} \qquad \begin{aligned} 2\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega = {} & \delta^\lambda_\mu(\psi_\nu - p_{;\nu} + pq_\nu) + \delta^\lambda_\nu(\psi_\mu + p_{;\mu} - pq_\mu) \\ & + (\psi_{\mu\nu} - q_{\mu;\nu} + q_{\nu;\mu})\xi^\lambda. \end{aligned}$$

Donc, on a, des équations (2.13) et (2,15),

$$\begin{aligned} 2(\xi^\lambda_{;\mu;\nu} + \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega) = {} & \delta^\lambda_\mu(\psi_\nu + p_{;\nu} + pq_\nu) + \delta^\lambda_\nu(\psi_\mu + p_{;\mu} + pq_\mu) \\ & + (\psi_{\mu\nu} + q_{\mu;\nu} + q_{\nu;\mu} + 2q_\mu q_\nu)\xi^\lambda. \end{aligned}$$

En définitive, nous avons obtenu

$$\text{(2.16)} \qquad \xi^\lambda_{;\mu;\nu} + \Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega = \delta^\lambda_\mu\varphi_\nu + \delta^\lambda_\nu\varphi_\mu + \varphi_{\mu\nu}\xi^\lambda,$$

et

$$\text{(2.17)} \qquad \xi^\lambda_{;\nu} = p\delta^\lambda_\nu + q_\nu\xi^\lambda,$$

comme les conditions nécessaires pour que les équations (2.5) et (2.7) soient valables pour les valeurs quelconques satisfaisant aux (2.4), où φ_ν et $\varphi_{\mu\nu}$ sont respectivement un vecteur et un tenseur ainsi définis.

Ces conditions sont suffisantes. Parce que, si l'on a (2.16) et (2.17), en substituant les valeurs de $\xi^\lambda_{;\mu;\nu}$ tirées de (2.17) dans (2.16), on trouve

$$(2.18) \qquad \Pi^{\lambda}{}_{.\mu\nu\omega}\xi^{\omega}=\delta^{\lambda}_{\mu}(\varphi_{\nu}-p_{;\nu})+\delta^{\lambda}_{\nu}(\varphi_{\mu}-pq_{\mu})+(\varphi_{\mu\nu}-q_{\mu;\nu}-q_{\mu}q_{\nu})\xi^{\lambda}.$$

Par conséquent, en tenant compte de (2.17) et de (2.18) on voit que les équations (2.5) et (2.7) sont toujours satisfaites par les valeurs quelconques de $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}$ satisfaisant aux (2.4).

Donc, nous avons redémontré le

Théorème : Pour qu'un espace A_{n+1} à connexion affine $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ à $n+1$ dimensions contenant un champ de vecteur ξ^{λ} puisse représenter un espace projectif des paths, soit, pour que toutes les surfaces dans A_{n+1} à deux dimensions engendrées par les rayons définis par le champ de vecteur et rencontrant un path arbitraire de A_{n+1} soient totalement géodésiques, il faut et il suffit que les composantes $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion affine et celles de vecteur ξ^{λ} satisfassent aux deux conditions (2.16) et (2.17).

§ 3. Dans une Note précédente[1], nous avons montré que les équations (2.16) expriment géométriquement que l'espace A_{n+1} admet une collinéation sousprojective dans la direction de ξ^{λ} et les équations (2.17) que si l'on développe ξ^{λ} le long d'une courbe quelconque, les directions définies par ξ^{λ} en chaque point de la courbe forment une surface développable.

Cela étant, multiplions (2.5) par v^{d} et sommons par rapport à l'indice d, on trouve

$$(3.1) \qquad \Pi^{\lambda}{}_{.\mu\nu\omega}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{b}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}\xi^{\omega}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}R^{a}{}_{.bcd}v^{d}$$

en vertu de (2.4). D'autre part, des équations (2.3) et (2.7), on trouve

$$(3.2) \qquad \xi^{\lambda}{}_{;\mu;\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{b}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}v^{a}{}_{;b;c},$$

donc, en substituant (3.1) et (3.2) dans (2.16) contractées par $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{b}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}$, on trouve

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}(v^{a}{}_{;b;c}+R^{a}{}_{.bcd}v^{d})=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{b}}\phi_{c}+\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{c}}\phi_{b}+\phi_{bc}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}v^{a},$$

d'où $\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}$ étant linéairement indépendants, on obtient

$$(3.3) \qquad v^{a}{}_{;b;c}+R^{a}{}_{.bcd}v^{d}=\delta^{a}_{b}\phi_{c}+\delta^{a}_{c}\phi_{b}+\phi_{bc}v^{a},$$

où nous avons posé

$$\phi_{c}=\varphi_{\nu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}} \quad \text{et} \quad \phi_{bc}=\varphi_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{b}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}.$$

Cela étant, multiplions (2.17) par $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}$ et sommons par rapport à c, alors on trouve, grâce à (2.7),

1) K. Yano: Subprojective transformations, subprojective spaces and subprojective collineations, déjà cité.

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} v^a{}_{;c} = p\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^c} + q_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} v^a ,$$

d'où, $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}$ étant linéairement indépendants,

$$v^a{}_{;c} = p\delta^a_c + r_c v^a ,$$

où nous avons posé

$$r_c = q_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial u^c} .$$

Donc, on voit que la surface S_2 totalement géodésique à connexion affine induite Γ^a_{bc} et contenant le champ de vecteur v^a, satisfait aux mêmes conditions que celles satisfaites par l'espace A_{n+1} ambiant.

§ 4. Pour représenter leurs espaces projectifs des paths P_n à n dimensions, MM. J. H. C. Whitehead et J. Haantjes prennent un espace à connexion affine A_{n+1} à $n+1$ dimensions et un champ de vecteur ξ^λ satisfaisant aux conditions

$$\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\xi^\omega = 0 \quad \text{et} \quad \xi^\lambda{}_{;\nu} = \delta^\lambda_\nu . \tag{4.1}$$

On sait que les conditions (4.1) expriment que l'espace à connexion affine A_{n+1} admet une collinéation affine dans la direction de ξ^λ et le champ de vecteur ξ^λ est concourant. Examinons ce cas.

Les paths de P_n étant représentés par les surfaces $x^\lambda(u^0, u^1)$ à deux dimensions totalement géodésiques engendrées par les rayons, on a

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial u^b \partial u^c} + \Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^b}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}\Gamma'^a_{bc} \tag{4.2}$$

et

$$\xi^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} v^a . \tag{4.3}$$

Les conditions d'intégrabilité de ces équations sont

$$\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^b}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}\frac{\partial x^\omega}{\partial u^d} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} R^a{}_{\cdot bcd} , \tag{4.4}$$

$$\xi^\lambda{}_{;\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} v^a{}_{;c} \tag{4.5}$$

En contractant v^d à (4.4) et en tenant compte de (4.3), on trouve

$$\Pi^\lambda{}_{\cdot\mu\nu\omega}\frac{\partial x^\mu}{\partial u^b}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^c}\xi^\omega = \frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} R^a{}_{\cdot bcd} v^d ,$$

d'où, on a, grâce à la première équation de (4.1),

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^a} R^a{}_{\cdot bcd} v^d = 0 ,$$

et, $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial u^a}(a=0, 1)$ étant linéairement indépendants, on en trouve

$$R^a{}_{\cdot bcd} v^d = 0 . \tag{4.6}$$

En écrivant les équations (4.6) pour $c=0$ et $c=1$, on a respectivement

$$R^{a}{}_{\cdot b00}v^{0}+R^{a}{}_{\cdot b01}v^{1}=0 \quad \text{et} \quad R^{a}{}_{\cdot b10}v^{0}+R^{a}{}_{\cdot b11}v^{1}=0\,.$$

Donc, $R^{a}{}_{\cdot b00}$ et $R^{a}{}_{\cdot b11}$ étant nuls et v^0 et v^1 n'étant pas nuls tous les deux, on en trouve

$$R^{a}{}_{\cdot bcd}=0\,. \tag{4.7}$$

D'autre part, en substituant dans (4.5) la deuxième équation de (4.1), on obtient

$$\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{c}}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}v^{a}{}_{;c}\,,$$

d'où, les $\dfrac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}$ étant linéairement indépendants,

$$v^{a}{}_{;c}=\delta^{a}_{c}\,. \tag{4.8}$$

Donc, les surfaces S_2 totalement géodésiques sont les espaces à connexion affine induite sans courbure[1], et le vecteur induit v^a est concourant par rapport à cette connexion affine induite.

La connexion affine induite sur S_2 étant sans courbure, supposons qu'on ait choisi les paramètres u^0 et u^1 de telle manière que les composantes de la connexion affine induite Γ^{a}_{bc} sont toutes nulles. Alors les équations de S_2 prennent la forme

$$\frac{\partial^{2}x^{\lambda}}{\partial u^{b}\partial u^{c}}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^{b}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^{c}}=0\,. \tag{4.9}$$

D'autre part, les équations (4.8) prennent la forme

$$\frac{\partial v^{a}}{\partial u^{c}}=\delta^{a}_{c}\,,$$

d'où on trouve $v^a=u^a+c^a$, c^a étant constantes, ou en écrivant u^a au lieu de u^a+c^a,

$$v^{a}=u^{a}\,, \tag{4.10}$$

c'est-à-dire, dans le système actuel de coordonnées, le vecteur v^a a ses composantes égales aux coordonnées elles-mêmes.

Cela posé, choisissons, avec MM. D. van Dantzig et J. Haantjes, un système de coordonnées x^λ de l'espace ambiant de telle manière que le vecteur ξ^λ a ses composantes $\xi^\lambda=x^\lambda$, alors les équations (4.1) nous donnent

$$\frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\omega}}x^{\omega}=-\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}x^{\mu}=0\,, \tag{4.11}$$

et les équations (4.3) et (4.10)

$$x^{\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^{a}}u^{a}\,,$$

1) J. Haantjes: On the projective geometry of paths, loc. cit.

donc, on en conclut que, dans un tel système de coordonnées, les composantes de la connexion affine $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de l'espace ambiant sont les fonctions homogènes de degré moins un par rapport aux coordonnées x^{λ} de l'espace ambiant et les fonctions $x^{\lambda}=x^{\lambda}(u^0, u^1)$ définissant la surface totalement géodésique S_2 sont homogènes de degré un par rapport aux paramètres u^a.

Un path de A_{n+1} sur S_2 étant une ligne droite sur S_2, on peut poser ses équations sous la forme

$$u^a=l^a t+c^a .$$

Alors, les coordonées $x^{\lambda}(u^a)=x^{\lambda}(l^a t+c^a)$ des points de paths de A_{n+1} étant les fonctions de t, on a

$$\frac{dx^{\lambda}}{dt}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^a}l^a, \qquad \frac{d^2x^{\lambda}}{dt^2}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}=\left(\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial u^b \partial u^c}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial u^b}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial u^c}\right)l^b l^c$$

et par conséquent, ces équations et (4.9) nous donnent

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{dt^2}+\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt}=0 ,$$

ce qui montre que le paramètre t est un paramètre affine pour le path de A_{n+1}.

D'autre part, on sait[1] que le paramètre affine pour le path de A_{n+1} est un paramètre projectif pour le path de P_n représenté par A_{n+1}.

Or, les coordonnées $x^{\lambda}=x^{\lambda}(u^0, u^1)=u^1 x^{\lambda}\left(\frac{u^0}{u^1}, 1\right)$ étant homogènes, on peut prendre u^0/u^1 comme paramètre sur le path de P_n, et l'équation

$$\text{(4.12)} \qquad \frac{u^0}{u^1}=\frac{l^0 t+c^0}{l^1 t+c^1}$$

montre que u^0/u^1 est un paramètre projectif comme l'a déjà montré M. J. Haantjes[2].

Cela étant, choisissons cette fois, avec MM. O. Veblen et J. H. C. Whitehead, un système de coordonnées x^{λ} de l'espace ambiant de telle manière que le vecteur ξ^{λ} a ses composantes $\xi^{\lambda}=\delta^{\lambda}_0$, alors les équations (4.1) nous donnent

$$\text{(4.13)} \qquad \frac{\partial \Pi^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^0}=0 \quad \text{et} \quad \Pi^{\lambda}_{0\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu} ,$$

et les équations (4.3) et (4.10)

$$\delta^{\lambda}_0=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial u^a}u^a ,$$

1) K. Yano: Projective parameters in projective and conformal geometries. Proc. **20** (1944), 45-53. J. H. C. Whitehead: The representation of projective spaces, loc. cit.

2) J. Haantjes: On the projective geometry of paths, loc. cit.

ou

$$1=\frac{\partial x^0}{\partial u^a}u^a \quad \text{et} \quad 0=\frac{\partial x^i}{\partial u^a}u^a ,$$

donc, on en conclut que, dans un tel système de coordonnées, les composantes de la connexion affine $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ de l'espace ambiant sont les fonctions indépendantes de la variables x^0, et les fonctions $x^\lambda=x^\lambda(u^0, u^1)$ définissant la surface totalement géodésique S_2 sont données respectivement par

$$x^0=\log\rho(u^a) \quad \text{et} \quad x^i=x^i(u^a) ,$$

où $\rho(u^a)$ et $x^i(u^a)$ sont les fonctions homogènes par rapport aux u^a de degré un et de degré zéro respectivement.

Donc, le point de P_n étant complètement déterminé par les fonctions $x^i(u^0, u^1)$ les relations

$$x^0=\log\rho(u^0, u^1)=\log\rho\left(\frac{u^0}{u^1}, 1\right)+\log u^1, \quad u^i=x^i(u^0, u^1)=x^i\left(\frac{u^0}{u^1}, 1\right)$$

montrent que u^0/u^1 est un paramètre sur le path de P_n.

Comme dans le cas précédent, on peut facilement montré que le rapport u^0/u^1 est un paramètre projectif sur le path et il coïncide avec celui de MM. J. H. C. Whitehead et L. Berwald[1)].

---

1) L. Berwald: On the projective geometry of paths, Annals of Math. **37** (1936), 879-898.