

Les Applications Monomiales en Deux Dimensions

CHARLES FAVRE

Introduction

Soit $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une application rationnelle de l'espace projectif, de degré topologique $e \geq 1$, et dont l'action sur le groupe de Picard est donnée par un entier $\deg(\varphi)$ que l'on supposera toujours plus grand que 2. On vérifie que la suite des degrés $\deg(\varphi^n)$ est sous-multiplicative; on notera $\lambda_1 = \lim_n \deg(\varphi^n)^{1/n}$ le premier degré dynamique de φ (voir [6]). Les principales propriétés ergodiques de φ dépendent étroitement du rapport λ_1/e (voir [4]). Lorsque $\lambda_1 > e$ (resp. $\lambda_1 < e$), il est ainsi conjecturé que la plupart des points périodiques sont de type hyperboliques selles (resp. répulsifs). Il apparaît donc important de comprendre précisément la nature de la suite $\deg(\varphi^n)$. De manière générique, cette suite est multiplicative $\deg(\varphi^n) = \deg(\varphi)^n$, et par suite $\lambda_1 = \deg(\varphi)$. En général cependant, la situation est perturbée par l'existence de courbes contractées par φ ou l'un de ses itérés sur un point d'indétermination. On est donc amené à introduire la définition suivante [2].

DÉFINITION. Une application $\varphi: X \dashrightarrow X$ d'une surface rationnelle est dite algébriquement stable (AS en abrégé) si $\bigcup_{k \geq 0} \varphi^{-k} I(\varphi)$ est une union dénombrable de points, où $I(\varphi)$ dénote l'ensemble d'indétermination de φ .

Il est équivalent de supposer que l'action naturelle φ^* de φ sur $\text{Pic}(X)$ est composable au sens où $\varphi^{n*} = \varphi^{*n}$ pour tout $n \geq 1$. Lorsque φ est AS, λ_1 s'identifie au rayon spectral de φ^* (voir par exemple [1]), le type de croissance des degrés se ramène alors à la description du spectre de φ^* . Pour les applications birationnelles de surfaces, on peut montrer l'existence d'un modèle birationnel de \mathbb{P}^2 dans lequel φ devient AS, et ainsi décrire précisément la nature de $\deg(\varphi^n)$ [1]. Nous nous proposons de décrire des exemples simples d'applications rationnelles pour lesquels il est impossible de trouver un modèle birationnel dans lequel celles-ci deviennent AS. Cependant la croissance des degrés de ces applications est complètement élémentaire à décrire, et confirme les conjectures suivantes.

CONJECTURE A. Soit $\varphi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ une application rationnelle telle que $e^2 < \lambda_1$. Alors il existe un modèle birationnel \tilde{X} de \mathbb{P}^2 , et un revêtement ramifié $h: X \rightarrow \tilde{X}$ tels que φ se relève à X et devient AS.

CONJECTURE B. Si $\varphi: \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$ est induit par une application polynomiale de \mathbb{C}^2 , il existe une suite d'éclatements $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, telle que φ se relève à X en une application AS.

CONJECTURE C. Pour toute application rationnelle $\varphi: \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$, le premier degré dynamique est un entier algébrique.

Soit $A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, \mathbb{Z})$, une matrice à coefficients entiers. On lui associe l'application monomiale φ_A définie dans \mathbb{C}^2 par

$$\varphi_A(z, w) = (z^a w^b, z^c w^d).$$

Le degré topologique de φ_A est $|\det A|$, son premier degré dynamique est le rayon spectral de A . Si $|\rho_1| \geq |\rho_2|$ sont les deux valeurs propres de A , notons que l'inégalité $\lambda_1 > e^2$ équivaut à $|\rho_1| > |\rho_2|$. Lorsque $|\rho_1| = |\rho_2|$, soit ces deux nombres complexes sont conjugués et non réels, soit $\rho_1 = \pm \rho_2$.

Nous nous proposons de montrer le

THÉORÈME PRINCIPAL. Soit $\varphi_A: \mathbb{P}^2 \circlearrowleft$ une application monomiale de matrice associée $A \in M(2, \mathbb{Z})$ de déterminant non nul.

- (1) Lorsque le spectre de A est réel, on peut trouver une suite d'éclatements $\pi: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$, et un revêtement ramifié $h: X \rightarrow \bar{X}$ tels que φ se relève à X et devient AS.
- (2) Lorsque le spectre de A est non réel, ses deux valeurs propres s'écrivent $|\lambda_1| \cdot \exp(2i\pi\theta)$ avec θ réel (en particulier $\lambda_1 = e^2$).
 - (a) Si θ est rationnel, la conclusion précédente s'applique. Plus précisément, on peut relever φ en une application holomorphe de X .
 - (b) Si θ est irrationnel, φ_A ne se relève jamais de manière AS dans un modèle birationnel de \mathbb{P}^2 . Plus généralement, si on se donne une application surjective $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ telle que φ_A se relève à X en une application rationnelle ψ , alors cette dernière n'est pas AS.

REMARQUE. Lorsque le spectre de A est réel, la preuve du théorème montre que l'on peut toujours trouver un morphisme birationnel $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de telle sorte que $\pi \circ \varphi_A \circ \pi^{-1}$ devienne AS.

La preuve du théorème s'appuie sur des notions élémentaires de géométrie torique (voir [3; 5]). Nous faisons tout d'abord quelques rappels succints avant de présenter la démonstration de notre résultat. Nous concluons cet article par quelques exemples.

1. Surfaces Toriques et Morphismes Toriques

On se donne un réseau $N \subset \mathbb{R}^2$ et on note son dual $M := \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$. On pose $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$. Un éventail Δ est la donnée du singleton $\{0\}$ et d'une collection finie de semi-droites $\mathbb{R}_+ v_1, \dots, \mathbb{R}_+ v_s$ avec $v_i \in N$ et de cônes

C_1, \dots, C_r stricts ($C_i \cap -C_i = \{0\}$) de dimension 2 bordés par des vecteurs dans $\{v_1, \dots, v_s\}$. On notera l'éventail ainsi défini

$$\Delta := \{0\}, \mathbb{R}_+ v_1, \dots, \mathbb{R}_+ v_s, C_1, \dots, C_s\}.$$

On associe naturellement à tout éventail une surface complexe que l'on note $T_N \text{emb}(\Delta)$. Une surface de ce type sera dite torique.

Chaque cône $\sigma \in \Delta$ définit une variété torique affine comme suit. Considérons le cône dual $\check{\sigma} := \{m \in M_{\mathbb{R}}, \langle m, n \rangle \geq 0 \text{ pour tout } n \in \sigma\}$ et notons $\mathcal{S}_{\sigma} := \check{\sigma} \cap M = \{m \in M, \langle m, n \rangle \geq 0 \text{ pour tout } n \in \sigma\}$, l'ensemble des points de ce cône appartenant au réseau M . C'est un semi-groupe pour la loi additive engendré par un nombre fini d'éléments par le Lemme de Gordon. On pose $U_{\sigma} := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathcal{S}_{\sigma}]$. De manière concrète, un point $u \in U_{\sigma}$ est défini par un morphisme

$$u: \mathcal{S}_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tel que } u(0) = 1 \text{ et } u(m + m') = u(m)u(m') \text{ pour tout } m, m' \in \mathcal{S}_{\sigma}.$$

Si (m_1, \dots, m_p) est une partie génératrice de \mathcal{S}_{σ} , l'application de U_{σ} à valeurs dans \mathbb{C}^p donnée par $u \mapsto (u(m_1), \dots, u(m_p))$ induit un plongement de U_{σ} dans \mathbb{C}^p . Lorsque $\dim(\sigma) = 0, 1$, la surface U_{σ} est lisse. Lorsque $\dim(\sigma) = 2$, la surface U_{σ} est lisse ssi $\sigma = \mathbb{R}_+ v_1 + \mathbb{R}_+ v_2$ où (v_1, v_2) engendre le réseau N . Lorsque U_{σ} est lisse, on dit que σ est un cône régulier.

Lorsque $\sigma_1 \subset \sigma_2$ sont deux cônes de Δ , le point $u \in U_{\sigma_1}$ induit par restriction sur $\mathcal{S}_{\sigma_2} \subset \mathcal{S}_{\sigma_1}$ un point $u \in U_{\sigma_2}$. Le morphisme ainsi construit est un plongement $U_{\sigma_1} \hookrightarrow U_{\sigma_2}$ et U_{σ_1} forme un ouvert de Zariski dense dans U_{σ_2} . En particulier, tout cône contient $\{0\}$ donc U_{σ} contient le tore algébrique complexe $U_{\{0\}} = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^2$ comme ouvert dense. On construit alors la variété $T_N \text{emb}(\Delta) := \bigcup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma}$ en recollant chaque couple $(U_{\sigma_1}, U_{\sigma_2})$ le long de $U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}$. On vérifie que $T_N \text{emb}(\Delta)$ est compacte ssi le support de l'éventail est \mathbb{R}^2 . On dira alors que Δ est complet. Notons par ailleurs que $T_N \text{emb}(\Delta)$ contient $(\mathbb{C}^*)^2$ comme ouvert dense et est donc toujours une surface rationnelle.

Les surfaces toriques supportent une action naturelle du tore algébrique complexe

$$T_N := \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^2.$$

Si $t \in T_N$ et $u \in U_{\sigma} \subset T_N \text{emb}(\Delta)$, on pose $(t \cdot u)(m) := t(m) \times u(m) \in U_{\sigma}$. Notons que le tore T_N agit sur $U_{\{0\}} = T_N$, par translation.

Il est important de comprendre la décomposition en orbite de $T_N \text{emb}(\Delta)$ sous l'action de T_N . Chaque cône $\sigma \in \Delta$ correspond de manière biunivoque à une orbite $\text{orb}(\sigma)$ de dimension $\dim(\sigma) + \dim(\text{orb}(\sigma)) = 2$. Au singleton $\{0\}$, correspond le tore T_N ; à une semi-droite $\mathbb{R}_+ v$ correspond une courbe isomorphe à \mathbb{C}^* ; à un cône C de dimension 2 correspond un point.

Plus précisément, on définit $\text{orb}(\sigma) := \{u: M \cap \sigma^{\perp} \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ homo. de groupes}\}$. C'est un tore algébrique complexe de dimension $2 - \dim(\sigma)$. Un point $u \in \text{orb}(\sigma)$ s'identifie à un point de U_{σ} naturellement $\tilde{u}: \mathcal{S}_{\sigma} \rightarrow \mathbb{C}$ en posant $\tilde{u}(m) = 0$ si $m \in \mathcal{S}_{\sigma} \setminus \sigma^{\perp}$ et $\tilde{u}(m) = u(m)$ si $m \in \sigma^{\perp}$. On vérifie que sous cette identification $\text{orb}(\sigma)$ est l'orbite d'un point de U_{σ} et que les T_N -orbites sont toutes de cette forme.

Décrivons maintenant les morphismes de surfaces toriques préservant cette structure. Soient Δ_1, Δ_2 deux éventails définis respectivement sur des réseaux

N_1, N_2 . Une application holomorphe $\varphi: T_{N_1} \text{emb}(\Delta_1) \rightarrow T_{N_2} \text{emb}(\Delta_2)$ est dite torique si elle préserve l'action du tore, i.e., ssi pour tout $t \in T_{N_1}$ et $u \in T_{N_1} \text{emb}(\Delta_1)$, on a

$$\varphi(t \cdot u) = \varphi(t) \cdot \varphi(u), \quad (1)$$

pour un morphisme de groupe $\phi \in \text{Hom}(T_{N_1}, T_{N_2})$. Ce morphisme est déterminé par une application \mathbb{Z} -linéaire $N_1 \rightarrow N_2$ que l'on note encore ϕ . L'application φ est alors holomorphe ssi pour tout élément de l'éventail $\sigma_1 \in \Delta_1$, on a $\phi(\sigma_1) \subset \sigma_2$ pour un $\sigma_2 \in \Delta_2$.

L'intérieur relatif d'un cône $\sigma_i \in \Delta_i$ est par définition $\text{Int}(\sigma_i) = \sigma_i \setminus \bigcup \{\tau \text{ face de } \sigma\}$. L'intérieur relatif d'un cône \mathcal{C} de dimension 2 coïncide avec son intérieur; $\text{Int}(\mathbb{R}_+ v) = \mathbb{R}_+^* v$, et $\text{Int}(\{0\}) = \{0\}$.

On vérifie alors que $\varphi(\text{orb}(\sigma)) = \bigcup \text{orb}(\tau)$ où τ parcourt l'ensemble des cônes tels que $\text{Int}(\tau) \cap \phi(\sigma) \neq \emptyset$. De même, on a $\varphi^{-1}(\text{orb}(\sigma)) = \bigcup \text{orb}(\tau)$ pour $\text{Int}(\sigma) \cap \phi(\tau) \neq \emptyset$.

Notons que le degré topologique de φ est donné par son degré sur le tore, i.e., $e = |\det(\phi)|$.

Une application méromorphe $\varphi: T_{N_1} \text{emb}(\Delta_1) \dashrightarrow T_{N_2} \text{emb}(\Delta_2)$ est dite torique si Γ le graphe de φ est une variété torique et si les projections naturelles $\pi_i: \Gamma \rightarrow T_{N_i} \text{emb}(\Delta_i)$ pour $i = 1, 2$ sont des applications toriques. Notons N_Γ le réseau sur lequel l'éventail Δ_Γ définissant Γ est construit; et $\phi_i: N_\Gamma \rightarrow N_i$ pour $i = 1, 2$ les applications \mathbb{Z} -linéaire induisant π_1, π_2 . L'application π_1 est une modification propre donc $|\det(\phi_1)| = 1$ et on peut poser $\phi := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}: N_1 \rightarrow N_2$. En particulier dans le cas où $\Delta := \Delta_1 = \Delta_2$ et $N := N_1 = N_2$ on obtient le fait suivant.

Un morphisme méromorphe $f: T_N \text{emb}(\Delta) \dashrightarrow T_N \text{emb}(\Delta)$ est déterminé de manière unique par une application \mathbb{Z} -linéaire de $\phi: N \rightarrow N$, i.e., dans une base de N par une matrice 2×2 à coefficients entiers relatifs.

Notons que l'équation (1) appliqué au point $u = (1, 1)$ montre qu'un morphisme torique φ induit une application monomiale sur le tore T_N .

On déduit aisément des remarques précédentes:

- (i) une courbe $C = \text{orb}(\mathbb{R}_+ v)$ est contractée sur un point ssi $\phi(v)$ est dans l'intérieur relatif d'un cône de Δ de dimension 2;
- (ii) un point $p = \text{orb}(C)$ est d'indétermination ssi $\phi(\text{Int } C)$ contient une demi-droite $\mathbb{R}_+ v \in \Delta$.

Supposons que Δ soit régulier (i.e., $T_N \text{emb}(\Delta)$ est lisse) et prenons un cône de dimension 2 dans Δ donné par $\mathcal{C} = \mathbb{R}_+ v_1 + \mathbb{R}_+ v_2$. Soit $v := v_1 + v_2$ et considérons Δ' le raffinement de Δ obtenu en remplaçant \mathcal{C} par les deux cônes, $\mathbb{R}_+ v_1 + \mathbb{R}_+ v$ et $\mathbb{R}_+ v + \mathbb{R}_+ v_2$. L'application linéaire $\text{id}: N \rightarrow N$ induit une modification propre $\pi: T_N \text{emb}(\Delta') \rightarrow T_N \text{emb}(\Delta)$ qui s'identifie à l'éclatement de $T_N \text{emb}(\Delta)$ au point $\text{orb}(\mathcal{C})$.

Nous utiliserons un autre exemple de morphismes toriques. Pour un sous-réseau $N_1 \subset N$ d'indice fini, l'injection canonique $N_1 \hookrightarrow N$ induit un revêtement

$$\phi : T_{N_1} \text{emb}(\Delta) \rightarrow T_N \text{emb}(\Delta)$$

de degré l'indice $[N_1 : N]$.

Dans toute la suite, on se place dans le cadre suivant: Δ est un éventail régulier complet défini sur un réseau $N \subset \mathbb{R}^2$, et $\phi : N \rightarrow N$ une application \mathbb{Z} -linéaire. On notera toujours φ l'application méromorphe induite sur $T_N \text{emb}(\Delta)$. On notera de plus $|\rho_1| \geq |\rho_2|$ les deux valeurs propres de ϕ . On a $\lambda_1 = |\rho_1|$ et $e = |\rho_1 \times \rho_2|$. En particulier, on a toujours $\lambda_1^2 \geq e$ et $\lambda_1^2 = e$ ssi $|\rho_1| = |\rho_2|$.

2. Le Cas $\lambda_1^2 > e$

Dans cette section, on suppose que $|\rho_1| > |\rho_2|$ (en particulier $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$). Cette inégalité est équivalente à $\lambda_1^2 > e$. On notera w_1 et w_2 les deux vecteurs propres associés à ces valeurs propres. En général, ils ne sont pas à coordonnées entières mais sont définis sur une extension quadratique de \mathbb{Q} .

Montrons la

PROPOSITION 1. *On peut raffiner Δ en un éventail Δ' de telle sorte que $\varphi : T_N \text{emb}(\Delta') \circlearrowleft$ soit AS. De plus, il existe un sous-réseau $N' \subset N$ dans lequel Δ' devient régulier.*

Le reste de cette partie est consacrée à la preuve de ce résultat. On posera $\kappa := \rho_2/\rho_1 \in (-1, 1)$.

On raffine tout d'abord Δ en lui ajoutant les semi-droites $\mathbb{R}_+(-v)$ dès que \mathbb{R}_+v appartient à Δ . L'éventail ainsi obtenu n'est pas nécessairement régulier, mais il est symétrique par rapport à l'origine ce qui permet de raisonner sur les droites de \mathbb{R}^2 de pentes rationnelles au lieu de semi-droites.

Considérons alors les droites D_1 et D_2 de Δ (distinctes de $\mathbb{R}w_1$) les plus proches de $\mathbb{R}w_1$ respectivement dans le quadrant $\mathbb{R}_+w_1 + \mathbb{R}_+w_2$ et $\mathbb{R}_+w_1 - \mathbb{R}_+w_2$. Quitte à raffiner Δ ces droites existent, et on note \mathcal{C} l'union des deux cônes convexes qu'elles définissent. Par construction celui-ci contient $\mathbb{R}w_1$.

On peut raffiner Δ de telle sorte que le cône \mathcal{C} s'envoie strictement dans lui-même $\phi(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{C}$. En général, il n'est cependant pas possible de choisir ce nouvel éventail régulier.

Si $1 > \kappa > 0$, cette propriété est automatiquement vérifiée. Sinon $-1 < \kappa < 0$ ce qui équivaut à $\det \phi < 0$. Dans la base (w_1, w_2) de $N_{\mathbb{R}}$, on écrit $D_1 = \mathbb{R}(1, a)$ et $D_2 = \mathbb{R}(1, -b)$ avec $a, b > 0$. La condition ci-dessus $\phi(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{C}$ est alors équivalente à l'inégalité

$$|\kappa|a < b < |\kappa|^{-1}a. \tag{2}$$

On raffine Δ en lui ajoutant deux droites $\mathbb{R}(1, a')$ et $\mathbb{R}(1, -b')$ avec $a' < a$ et $b' < b$ de telle sorte que le couple (a', b') satisfasse à (2). Pour ce nouvel éventail $\phi(\mathcal{C}) \subsetneq \mathcal{C}$.

De même, considérons les deux droites D'_1 et D'_2 de Δ (distinctes de $\mathbb{R}w_2$) les plus proches de $\mathbb{R}w_2$ respectivement dans le quadrant $\mathbb{R}_+w_1 + \mathbb{R}_+w_2$ et

$\mathbb{R}_+ w_1 - \mathbb{R}_+ w_2$, et \mathcal{D} l'union des deux cônes convexes engendrés par celles-ci. Le même argument montre que quitte à raffiner Δ on a $\phi(\mathcal{D}) \supsetneq \mathcal{D}$.

Pour conclure, on ajoute à Δ toutes les droites $D \not\subset \mathcal{D}$ telles que $\phi^k(D) \in \Delta$ pour un entier $k \geq 0$. Dans la surface torique associée à cet éventail, le morphisme torique φ induit par ϕ possède au plus deux points d'indétermination $\text{orb}(\mathcal{D}_1)$ et $\text{orb}(\mathcal{D}_2)$ où $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sont les deux cônes convexes d'union \mathcal{D} . Les courbes contractées par un itéré de φ sont $\text{orb}(D)$ pour D une semidroite de Δ , et sont donc éventuellement envoyées sur un des deux points $\text{orb}(\mathcal{C}_1)$ et $\text{orb}(\mathcal{C}_2)$ où $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}$. Ceux-ci sont fixes si $\det \phi > 0$ et permutés si $\det \phi < 0$. En général, l'éventail n'est pas régulier, mais on peut toujours trouver un sous-réseau de N dans lequel Δ devient régulier.

Ceci conclut la preuve de la Proposition 1. \square

3. Le Cas $\lambda_1^2 = e$

Le cas $|\rho_1| = |\rho_2|$ se sépare en 5 sous-cas.

(1) $\phi = \rho \text{ id}$ avec $\rho = \rho_1 = \rho_2$. Pour n'importe quel éventail Δ , l'application $\phi: \mathbb{T}_N \text{emb}(\Delta) \circlearrowleft$ est holomorphe.

(2) $\rho := \rho_1 = \rho_2$ mais ϕ n'est pas diagonalisable. La droite $D := \ker(\phi - \rho \text{ id})$ est rationnelle. Dans ce cas, on applique l'algorithme précédent en modifiant la deuxième étape en remplaçant \mathcal{C} par le cône défini par D et le droite la plus proche de D . On démontre de manière analogue à la preuve de la Proposition 1 que le couple $(\phi, \mathbb{T}_N \text{emb}(\Delta))$ est AS.

(3) $\rho := \rho_1 = -\rho_2 \geq 1$. Notons v_+, v_- les vecteurs propres associés (resp.) à ρ et $-\rho$. Soit σ la réflexion fixant $\mathbb{R}v_+$ et d'axe $\mathbb{R}v_-$. Ajoutons à Δ tous les vecteurs $\pm \mathbb{R}_+ v, \pm \mathbb{R}_+ \sigma(v)$ dès que $\mathbb{R}_+ v \in \Delta$. Dans ce nouvel éventail Δ' (singulier en général), ϕ est holomorphe. Dans le sous-réseau $N' := \mathbb{Z}v_+ + \mathbb{Z}v_-$, l'éventail Δ' devient régulier.

(4) $\rho_1 = \rho \exp(i\pi\theta)$ et $\rho_2 = \bar{\rho}_1$ avec $\rho \geq 1$ et $\theta \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, ϕ est d'ordre fini sur l'ensemble des semi-droites de \mathbb{R}^2 . En ajoutant à Δ toutes les images $\phi^k(\mathbb{R}_+ v)$ pour $\mathbb{R}_+ v \in \Delta$ et $k \geq 0$, on obtient un raffinement de Δ dans lequel ϕ est holomorphe. En général, l'éventail n'est pas régulier.

(5) $\rho_1 = \rho \exp(i\pi\theta)$ et $\rho_2 = \bar{\rho}_1$ avec $\rho \geq 1$ et $\theta \notin \mathbb{Q}$ (dans ce cas on a en fait toujours $\rho > 1$ voir ci-dessous). Supposons que l'on puisse raffiner Δ en un éventail Δ' de telle sorte que le couple $(\phi, \mathbb{T}_N \text{emb}(\Delta'))$ soit AS. Montrons que ceci ne peut être possible.

Soit $\mathbb{R}_+ v \in \Delta'$. Comme $\{\phi^k(\mathbb{R}_+ v), k \geq 0\}$ est dense dans l'ensemble des semi-droites de \mathbb{R}^2 , on peut trouver un entier $k \geq 0$ tel que $\phi^k(\mathbb{R}_+ v) \subset \text{Int } \mathcal{C}$ pour un cône \mathcal{C} de dimension 2. Donc toute courbe torique $\text{orb}(v)$ se contracte sur un point. De même si $\mathcal{C} \in \Delta'$ est un cône de dimension 2, pour un entier $k \geq 0$ on a $\text{Int } \mathcal{C} \supset \mathbb{R}_+ v \in \Delta'$, et il s'ensuit que $\text{orb}(\mathcal{C}) \in \bigcup_{k \geq 0} I(\phi^k)$. On a donc montré que toutes les courbes toriques se contractent sur un point d'indétermination torique après itération.

Supposons maintenant que l'on réalise une suite d'éclatements centrée en des points de $T_N \text{emb}(\Delta)$ qui ne soient pas toriques (i.e. invariant sous l'action du tore). L'application induite par φ ne peut lever les indéterminations toriques, et les courbes toriques contractées restent critiques car elles sont envoyées sur des points toriques.

On a donc montré que l'on ne peut rendre $(\varphi, T_N \text{emb}(\Delta))$ AS en procédant à une suite finie d'éclatements toriques ou non.

Supposons maintenant que l'on se donne un morphisme surjectif entre surfaces lisses $\pi : X \rightarrow T_N \text{emb}(\Delta)$ tel que φ se relève à X en une application ψ . Notons $U = \pi^{-1}T_N$, $\mathcal{C}(\pi) \subset U$ l'ensemble critique de π dans U , et $\mathcal{E}(\pi) \subset \mathcal{C}(\pi)$ l'ensemble des points où π n'est pas localement fini. L'ensemble des valeurs critiques $V_\pi = \pi\mathcal{C}(\pi)$ est un sous-ensemble algébrique propre de T_N . Il n'est pas nécessairement de dimension pure, mais est union d'une courbe W_π et d'un ensemble fini de points $\pi\mathcal{E}(\pi) = F$.

Soit $x \in V_\pi$, et $z \in \varphi^{-1}\{x\}$ une préimage de x par φ . Choisissons $w \in \pi^{-1}\{z\}$ et $y \in \pi^{-1}\{x\}$ dans les fibres respectives au-dessus de z et y . Comme T_N est totalement invariant par φ , $w \in \pi^{-1}T_N = U$.

Si ψ est holomorphe en w , de l'équation $\pi \circ \psi = \varphi \circ \pi$ et du fait que φ induit un revêtement non ramifié de T_N sur lui-même, on déduit que $z \in \pi\mathcal{C}(\pi) = V_\pi$. Lorsque w est un point d'indétermination de ψ , son image totale par ψ dans X est une courbe connexe qui intersecte U , et se contracte par π sur $x = \varphi \circ \pi(w)$. Par suite, x appartient à l'ensemble fini de points $F \subset U$ défini ci-dessus. On a donc démontré que

$$\varphi^{-1}V_\pi \subset V_\pi \cup \varphi^{-1}F.$$

Il est alors apparent que la courbe algébrique $W_\pi \subset V_\pi$ est totalement invariante par φ . On vérifie que φ restreint à T_N n'admet aucune courbe totalement invariante. Donc $\pi : U \setminus \pi^{-1}F \rightarrow T_N \setminus F$ est un revêtement non ramifié. En particulier, $U \setminus \pi^{-1}F$ est isomorphe à $(\mathbb{C}^*)^2 \setminus G$ où G est un nombre fini de points, et π définit un morphisme monomial de $(\mathbb{C}^*)^2 \setminus G$ dans T_N . Par extension, U possède un morphisme birationnel (propre) sur $(\mathbb{C}^*)^2$, et est donc obtenue à partir du tore par composition finie d'éclatements de points.

La surface X' obtenue par contraction de toute les courbes compactes de X incluses dans U est une surface algébrique lisse contenant le tore $(\mathbb{C}^*)^2$ comme ouvert dense. Le morphisme induit par ψ sur X' préserve le tore et comme π est monomial, ψ agit aussi comme une application monomiale.

Par contraction successive des courbes exceptionnelles de première espèce de X' , on obtient une surface rationnelle minimale S c'est-à-dire \mathbb{P}^2 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou une surface de Hirzebruch. Celles-ci sont toutes des compactifications toriques de $(\mathbb{C}^*)^2$. Les courbes exceptionnelles de première espèce de X' sont toutes hors du tore donc ψ induit aussi un morphisme monomial sur le tore $(\mathbb{C}^*)^2 \subset S$.

On est donc ramené à la situation précédente où $\pi : X \rightarrow S$ est un morphisme birationnel sur une variété torique et ψ induit un morphisme torique dans S . On conclut que ψ ne peut être AS. La dernière affirmation du théorème principal est ainsi démontrée.

4. Quelques Exemples

Afin de donner un exemple explicite d'application monomiale qui ne peut être rendu AS dans aucune surface rationnelle, il faut trouver une matrice 2×2 à coefficients entiers dont les valeurs propres sont non-réelles, complexes conjuguées $\rho_1, \rho_2 = \rho \exp(\pm i\pi\theta)$ avec $\rho > 0$ et $\theta \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, le fait d'avoir deux valeurs propres non réelles est équivalent à

$$(a - d)^2 + 2bc < 0. \tag{3}$$

En particulier si $a, b, c, d \geq 0$, c'est-à-dire lorsque φ_A est polynomiale dans \mathbb{C}^2 , cette inégalité n'est jamais vérifiée, et on peut toujours rendre φ_A AS dans une surface torique convenable (voir Conjecture A).

De même lorsque φ_A est birationnel, on a $ad - bc = \pm 1$, et (3) est alors équivalent à $|\text{tr } A| \leq 1, \det A = +1$. On vérifie que dans tous les cas, l'action de A sur les droites de \mathbb{R}^2 est d'ordre fini, et φ_A est donc holomorphe dans une surface torique convenable (voir Conjecture A).

Supposons donc que (3) soit vérifiée. Si l'argument θ des valeurs propres de A est rationnel, on a

$$\theta \in \{0, 1/6, 1/3, 1/4\} \text{ mod } (1/2). \tag{4}$$

En effet, on remarque que $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 2\rho^2 \cos(2\pi\theta) = \text{tr}(\phi^2)$ est un entier, ainsi que $\rho^2 = \det(\phi)$. Donc $\cos(2\pi\theta), \theta \in \mathbb{Q}$ ce qui implique (4). Les valeurs propres de A sont dans ce cas toujours dans l'un des corps quadratiques suivants: $\mathbb{Q}, \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$, ou $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{3}$.

EXEMPLE 1. Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, on a $\rho_1, \rho_2 = 1/2(1 \pm i\sqrt{7})$. L'application $\varphi_A(x, y) = (xy^{-1}, x^4)$ ne peut être rendu AS dans un modèle birationnel de \mathbb{P}^2 .

Pour conclure mentionnons l'exemple suivant, qui montre qu'en général on ne peut rendre une application AS simplement en éclatant, mais qu'il est nécessaire de passer à un revêtement ramifié.

EXEMPLE 2. Prenons comme éventail de départ

$$\Delta = \{\{0\}, \pm\mathbb{R}_+(0, 1), \pm\mathbb{R}_+(1, 0), \pm\mathbb{R}_+(0, 1) \pm \mathbb{R}_+(1, 0)\},$$

i.e., $T_N \text{emb}(\Delta) = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Alors, on ne peut raffiner Δ en un éventail Δ' régulier tel que ϕ devienne AS.

En effet supposons que ce soit le cas. Comme A est d'ordre fini d'ordre 8 sur les semi-droites de \mathbb{R}^2 , φ_A est nécessairement holomorphe dans $T_N \text{emb}(\Delta')$. Notons $v = (-1, k)$ avec $k \in \mathbb{Z}_+$ le vecteur le plus proche de $(0, 1)$ dans le cône $\mathbb{R}_+(0, 1) + \mathbb{R}_+(-1, 0)$. Pour un vecteur $w \in \mathbb{Z}^2$, on note \tilde{w} le vecteur dans $\mathbb{R}_+w \cap \mathbb{Z}^2$ de plus petite norme. Comme Δ' est régulier les vecteurs $\widetilde{\phi(0, 1)}$ et $\widetilde{\phi(v)}$ forme une base de \mathbb{Z}^2 . De manière équivalente, on a

$$|\det(\widetilde{\phi}(0, 1), \widetilde{\phi}(v))| = 1.$$

Or $\widetilde{\phi}(0, 1) = (-2, 1)$, et $\widetilde{\phi}(v) = (-8k, 4k - 1)/(8k \wedge 4k - 1)$. On vérifie que ceci aboutit à une contradiction.

REMERCIEMENTS. Je remercie vivement V. Guedj pour les discussions que nous avons eues sur ce travail.

Références

- [1] J. Diller and C. Favre, *Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces*, Amer. J. Math. 123 (2001), 1135–1169.
- [2] J. E. Fornæss and N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension*, Several complex variables (Berkeley, CA, 1995/1996), pp. 273–296, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 1999.
- [3] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud., 131, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [4] V. Guedj, *Dynamics of polynomial mappings of \mathbb{C}^2* , Amer. J. Math. 124 (2002), 75–106.
- [5] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), 15, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [6] A. Russakovskii and B. Shiffman, *Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics*, Indiana Univ. Math. J. 46 (1997), 897–932.

Université Paris VII
 UFR de Mathématiques
 Equipe Géométrie et Dynamique
 F-75251 Paris Cedex 05
 France
 favre@math.jussieu.fr