Notre Dame Journal of Formal Logic
Volume XII, Number 4, October 1971
NDJFAM

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE PRÉSERVATION

JEAN DRABBE

1. *Introduction.* Une formule d'un langage du premier ordre est dite *positive* si elle peut être construite à partir des formules atomiques à l'aide de la conjonction, de la disjonction, de quantifications universelles et de quantifications existentielles. Une formule est dite *négative* si elle est la négation d'une formule positive. Nous utiliserons la terminologie de [1] (à une traduction près) et la convention de nous limiter à la considération de structures et de langages du premier ordre. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant:

Quand une formule a-t-elle la propriété d'être valide dans un produit sous-direct de structures chaque fois qu'elle est valide dans au moins une composante de ce produit sous-direct?

Nous montrerons que les formules répondant au problème sont les formules équivalentes à une formule négative et les théorèmes logiques.

2. *Un premier théorème.* Nous pouvons convenir de ne pas prendre en considération les sous-produits directs d'un ensemble vide de structures. Remarquons que les formules négatives répondent au problème car si $\sim P$ (où P est positive) n'est pas valide dans un produit sous-direct, alors $\sim P$ n'est valide dans aucune de ses composantes (voir [2], chapitre 5, exercices 7 et 8). Notons K une théorie du premier ordre et K' la théorie du premier ordre dont les axiomes sont les formules négatives démontrables dans K et les théorèmes logiques de K.

Théorème 1. *Une structure $\mathfrak{A}$ est un modèle de K' si et seulement si il existe une extension élémentaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ qui est un produit sous-direct de structures dont l'une au moins est un modèle de K.*

Démonstration: Supposons que $\mathfrak{A}$ est un modèle de K'. Nous devons prouver qu'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à la condition indiquée (l'autre partie de l'énoncé est triviale, en vertu de la remarque précédente).

Montrons qu'il existe un homomorphisme positif (voir la définition

Received September 13, 1970

dans [2], chapitre 5, exercices 5 et 6) de $\mathfrak{A}$ dans un modèle de K. Il suffit de vérifier que toute disjonction de formules négatives qui est un théorème de K est valide dans $\mathfrak{A}$. Ceci est trivial car $\mathfrak{A}$ est un modèle de K'. Il en résulte qu'il existe une extension élémentaire $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ et un modèle $\mathfrak{B}$ de K tels que $\mathfrak{B}$ est image homomorphe de $\mathfrak{A}'$ (voir [2], chapitre 5, exercice 6). Soit f un épimorphisme de $\mathfrak{A}'$ sur $\mathfrak{B}$. L'application g: $\mathfrak{A}' \to \mathfrak{A}' \times \mathfrak{B}$, définie par: $ga = (a, fa)$ est un isomorphisme de $\mathfrak{A}'$ sur un produit sous-direct de $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque: On ne peut remplacer la condition nécessaire et suffisante de ce théorème par "$\mathfrak{A}$ est un produit sous-direct de structures dont l'une au moins est un modèle de K". Ceci résulte du fait qu'il existe une classe élémentaire S de structures telle que la classe des produits sous-directs de structures dont l'une au moins est dans S n'est pas élémentaire.

3. *Solution du problème*. Nous allons prouver le

Théorème 2. *Une formule a la propriété d'être valide dans un produit sous-direct de structures chaque fois qu'elle est valide dans une composante au moins de ce produit sous-direct si et seulement si elle est équivalente à une formule négative ou à un théorème logique.*

Démonstration: La condition est évidemment suffisante. Supposons que la formule F réponde au problème. Soit K la théorie dont le seul axiome non logique est F. Formons K' comme précédemment. Tout modèle de K' est un modèle de K (en vertu du théorème 1). Donc, les théories K et K' sont équivalentes. On en déduit aisément le théorème.

REFERENCES

[1] Lyndon, R. C., "Properties preserved in subdirect products," *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 9 (1959), pp. 155-164.

[2] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (1967).

Université libre de Bruxelles
Bruxelles, Belgium