

MECANIQUE HAMILTONIENNE EN PRESENCE DE CONTRAINTES

P. DAZORD

Le but de cet article est de donner une formulation hamiltonienne de la mécanique de systèmes de solides en présence de contraintes. Le cadre est celui de la mécanique “indépendante du temps” ce qui signifie que les forces données ne dépendent pas du temps et que le temps n’apparaît pas explicitement dans les équations de liaisons (éventuellement après dérivation par rapport au temps). La mise en équation utilisera la forme générale du principe de d’Alembert [2]. Les difficultés rencontrées dans l’application de ce principe tiennent pour une part à l’utilisation d’une forme restreinte du principe, énoncé seulement pour les *déplacements virtuels compatibles avec les liaisons* (cf. [1] par exemple), ce qui n’est légitime que si les liaisons sont *holonomes parfaites*, c’est-à-dire, grossièrement parlant, des liaisons holonomes dont la nature mécanique (consommation d’énergie) est déterminée par leur nature géométrique. Ces difficultés tiennent pour une autre part au fait qu’en présence de frottements entre solides on se trouve—dans le cadre de la mécanique des solides—aux frontières de validité de la théorie (cf. §1 hypothèse H.).

Du point de vue mécanique, on distingue parmi les liaisons, les liaisons actives et les liaisons passives.

Les liaisons actives comportent un dispositif, intérieur ou extérieur au système, lui fournissant, au sens algébrique, de l’énergie. Le type même de ces liaisons est constitué par les mécanismes de contrôle ou liaisons d’asservissement: afin d’imposer à un système mécanique certaines restrictions à son mouvement on introduit un mécanisme—et donc des paramètres géométriques supplémentaires—et des liaisons entre certains de ces paramètres. Ainsi pour stabiliser un bateau soumis à la houle place-t-on dans le bateau un gyroscope dont le carter est mobile par rapport à un axe perpendiculaire à l’axe longitudinal du bateau. Un moteur, fixé sur le bateau et agissant sur le carter, réalise la liaison d’asservissement et fournit l’énergie nécessaire à la stabilisation (cf. infra §7).

Received February 24, 1992.

1991 Mathematics Subject Classification. Primary 58F05; Secondary 73A05, 93B27, 70H05.

© 1994 by the Board of Trustees of the University of Illinois
Manufactured in the United States of America

Les autres liaisons sont appelées **liaisons passives**. Sont de ce type, les liaisons de contact, de roulement sans glissement etc. Ces liaisons, a priori, consomment de l'énergie; cependant dans le déplacement réel cette consommation peut être nulle: c'est le cas des contacts sans frottements, du roulement sans glissement sur un obstacle fixe.

Du point de vue géométrique il est d'usage de classer les liaisons en *liaisons holonomes* et *non holonomes*: les premières sont définies, après intégration éventuelle, sur l'espace de configuration, les secondes sur l'espace des phases (sans être les dérivées de relations holonomes).

A cette classification nous préférons la classification, que nous introduisons, en *liaisons hamiltoniennes* et *liaisons nonhamiltoniennes*, qui conduit à un formalisme agréable dans le cadre symplectique. La totalité des liaisons holonomes, les liaisons non holonomes que nous rencontrerons sont de type hamiltonien.

Les trois classifications des liaisons (parfaites ou non, actives ou passives, hamiltoniennes ou non) sont indépendantes; la théorie proposée concerne les *liaisons hamiltoniennes (actives ou non, parfaites ou non)*.

La présence de contraintes va introduire des *paramètres mécaniques* qui s'ajoutent aux *paramètres cinématiques*. En effet ce qui distingue des forces données agissant sur le système, les forces de liaisons c'est que ces dernières —ou leur travail—ne sont pas fixées a priori, mais dépendent du mouvement. Ainsi pour des liaisons avec ou sans frottement la réaction de l'obstacle sur le système dépend du système et de son mouvement et les lois du frottement introduisent des limitations ou conditions de possibilité. Dans le cas de liaisons d'asservissement—ou mécanismes de contrôle—on connaît les déplacements virtuels bloquant le mécanisme (ceux fixant le carter sur le pont dans le cas du stabilisateur) mais l'énergie à fournir par le mécanisme pour obtenir l'effet désiré est une inconnue du problème.

Mathématiquement, on a donc, un système d'équations qui comporte des *paramètres cinématiques* et des *paramètres mécaniques*, les équations étant déterminées par le principe de d'Alembert et l'espace des déplacements virtuels dans lesquels les liaisons ne travaillent pas. Pour les systèmes usuels, cet espace a la nature d'un fibré vectoriel sur l'espace des phases. Il est préférable d'introduire son annulateur qui représente l'espace des travaux virtuels de la liaison, espace fibré dont le rang est le nombre d'inconnues mécaniques introduites par les liaisons. Le système aura donc autant d'inconnues que d'équations si le rang de ce fibré est égal au nombre de conditions de liaisons introduites.

En présence de frottements ceci n'est pas toujours assuré ou du moins exige des hypothèses plus précises sur la nature du frottement, par exemple sur la nature géométrique des contacts.

La possibilité de résoudre, de manière unique, le système n'est pas assuré pour autant: il n'y a par exemple aucune raison pour qu'un dispositif donné permette de contrôler le mouvement du système comme on le souhaite. La

condition mathématique de résolution du système est, dans le formalisme choisi et pour les problèmes traités, la condition mécanique de possibilité. Cette condition (condition C infra) est appelée *condition de couplage* dans la mesure où elle indique sur quelle variables agir pour contrôler celles que l'on souhaite contrôler. Cette condition sera automatiquement vérifiée si la liaison est *parfaite*.

La tentative d'obtenir une formulation hamiltonienne de la mécanique en présence de contraintes a fait l'objet de deux articles importants. Le premier [12] de J. Marsden, R. Montgomery et R. Ratiu concerne le cas des liaisons holonomes parfaites.

C. M. Marle [11] a étendu le formalisme précédent à certains types de liaisons non-holonomes parfaites (résultats annoncés dans [10]). Ce formalisme présente l'avantage d'inclure également certains problèmes de contrôle.

Dans notre note [4] nous avons étendu le formalisme précédent à des situations plus générales incluant la plupart des liaisons non holonomes parfaites ou non ou des problèmes de contrôle. Une remarque de C. M. Marle sur la formulation choisie en [4], nous a conduit à dégager la notion de liaison hamiltonienne à laquelle cet article est consacré et pour laquelle la plupart des résultats de [4] sont établis. On obtient ainsi une théorie dont la généralité semble suffisante pour inclure nombre de situations rencontrées.

Le premier paragraphe est consacré à une discussion de l'axiomatique utilisée pour établir les équations du mouvement tandis que le paragraphe 7 est consacré à l'étude d'exemples classiques illustrant la méthode proposée.

Notations. 1. On fait systématiquement la convention des indices muets.

2. Pour tout fibré vectoriel $E \rightarrow M$ on note $E^* \rightarrow M$ le fibré dual et on désigne, par abus de notation, leurs projections par la même lettre. Si $f: M \rightarrow Q$ est une application C^∞ , et $E \rightarrow Q$ un fibré vectoriel, on note $f^{-1}E \rightarrow M$ le fibré image réciproque par f .

1. Du principe de d'Alembert au formalisme Lagrangien

Les systèmes étudiés sont des systèmes de solides indéformables soumis à des contraintes et à des forces données indépendantes du temps. L'espace de configuration du système est donc le produit d'un certain nombre d'exemplaires du groupe des déplacements de l'espace euclidien. C'est une variété M_0 .

Ces systèmes sont soumis à des liaisons, c'est-à-dire à un certain nombre de relations auxquelles est astreinte la vitesse dx/dt du système où $x \in M_0$ représente le système. Autrement dit ces relations sont définie sur TM_0 , où éventuellement sur M_0 si elles ne concernent que la position du système. On suppose dans la suite qu'on peut les formaliser ainsi: il existe une variété Q

et une application fibrée (Y_1, f)

$$\begin{array}{ccc} TM_0 & \xrightarrow{Y_1} & TQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

telles que la liaison s'écrive

$$(1) \quad \frac{d}{dt}f(x) = Y_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

A l'utilisation près du théorème des fonctions implicites, cette formulation n'introduit aucune restriction: par exemple si $g: TM_0 \rightarrow \mathbf{R}$ est une contrainte régulière, c'est-à-dire que g est une submersion quand on restreint g aux fibres de $TM_0 \rightarrow M_0$, on peut localement écrire g dans des coordonnées locales naturelles de TM_0 ,

$$\dot{q}^1 = g_0(q_1, \dots, q^n, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n)$$

liaison du type (1) avec Q intervalle de \mathbf{R} et $Y_1(q, \dot{q}) = (q^1, g_0)$.

Cette modélisation a été introduite par Marle [10] dans le cas où Y_1 se factorise à travers Q , c'est-à-dire dans le cas où la liaison est donnée par un champ de vecteurs Y_0 sur Q et s'écrit, pour $y \in Q$, $\dot{y} = Y_0(y)$.

Pour éviter des complications, anecdotiques ici, on supposera toujours que f est à fibres connexes.

On distingue usuellement

les liaisons holonomes si $Y_1 = 0$ et dans ce cas ne subsiste que la submersion $f: M_0 \rightarrow Q$

les liaisons non holonomes si $Y_1 \neq 0$

les liaisons non holonomes linéaires si Y_1 est un morphisme (non nul) de fibrés vectoriels.

On dira que la liaison est presque (resp. semi-) holonome si Y_1 se factorise à travers Q (resp. M_0).

Une liaison du point de vue mécanique n'est pas seulement définie par sa nature géométrique. Il faut encore connaître les déplacements virtuels dans lesquels le travail virtuel de la liaison est nul. Par exemple, pour le stabilisateur de houle ce sont ceux fixant le carter sur le pont. Ceci est formalisé par la donnée d'un sous fibré F de $\pi^{-1}TM_0 \rightarrow TM_0$. Si on considère la suite exacte canonique de fibrés sur TM_0 ,

$$0 \rightarrow \pi^{-1}TM_0 \xrightarrow{i} TTM_0 \xrightarrow{j} \pi^{-1}TM_0 \rightarrow 0,$$

où

$$i(x, X) = \frac{d}{dt}(x + tX) \Big|_{t=0}, \quad j(Z) = (p(Z), T\pi Z)$$

(p est la projection naturelle $TTM_0 \rightarrow TM_0$), et si on désigne par F° l'annulateur de $j^{-1}(F)$ (F° a pour sections sur TM des formes semi-basiques), F° représente l'espace des travaux virtuels de la liaison. Autrement dit si (ω_α) est une base locale de sections de F° , le travail virtuel de la liaison est a priori $\mu^\alpha \omega_\alpha$, les μ^α étant des paramètres mécaniques inconnus.

On suppose que les forces, hors forces de liaisons, sont prises en compte dans un lagrangien $L: TM_0 \rightarrow \mathbf{R}$ c'est-à-dire que le travail virtuel des forces d'inertie et des forces données s'écrit dans une carte locale (q^i) de M_0 ,

$$-\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) dq^i$$

où (q^i, \dot{q}^i) est la carte naturelle de TM_0 associée.

Les équations du mouvement sont obtenues à partir du principe de d'Alembert, non sous la forme donnée par Lagrange [7] et reprise par Arnold [1], mais sous la forme générale suivante [2].

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. Dans tout déplacement virtuel, respectant ou non les liaisons, la somme du travail des forces d'inertie, des forces données et des forces de liaisons est nulle.

Autrement dit en coordonnées locales naturelles, (q^i, \dot{q}^i) de M_0

$$\left(-\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) + \mu^\alpha \omega_{\alpha i} \right) dq^i = 0$$

ce qui conduit aux équations de Lagrange avec multiplicateurs

$$(1i) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = \mu^\alpha \omega_{\alpha i}$$

auxquelles il convient d'ajouter les relations de liaisons.

Si la carte locale de M_0 est choisie, ce qui est toujours possible, de façon que $f: M_0 \rightarrow Q$ s'écrive

$$(q^i)_{1 \leq i \leq m_0} = ((q^\beta)_{1 \leq \beta \leq m_0 - n}, (q^j)_{(1 \leq j \leq n)})$$

où $f((q^i)) = (q^\beta)$, ces relations s'écrivent:

$$(1ii) \quad \dot{q}^\beta = Y_1^\beta(q^i, \dot{q}^i).$$

On aura autant d'équations que d'inconnues si l'on fait l'hypothèse suivante:

(H₀) le rang du fibré $F^0 \rightarrow TM_0$ est égal à la dimension de Q .

Remarque sur l'hypothèse (H₀). Pour une liaison d'asservissement cette hypothèse signifie, grosso modo, qu'il faut agir sur autant de paramètres géométriques qu'on désire en contrôler. Des difficultés apparaissent par contre pour des liaisons faisant intervenir des *phénomènes de frottement* comme le montre l'exemple suivant: on considère un pavé cubique glissant avec frottement sur un plan horizontal. Dans le cadre de la mécanique du solide, le travail de la liaison dans un déplacement virtuel est représenté par un torseur c'est-à-dire un élément du dual de l'algèbre de Lie du groupe des déplacements, ce qui introduit 6 paramètres mécaniques. La liaison introduit 3 paramètres cinématiques, le mouvement étant décrit par le sous groupe G du groupe des déplacements extension par les translations horizontales des rotations verticales. Le nombre de paramètres mécaniques est réduit à 3 si le contact est sans frottement car alors le torseur des forces appartient à l'annulateur de l'algèbre de Lie de G . En présence de frottements on pourra réduire à 3 le nombre des inconnues mécaniques en utilisant les lois (élémentaires) du frottement si l'on suppose que le contact n'a lieu qu'en 3 points deux à deux distincts, les inconnus mécaniques étant alors, par exemple, les composantes verticales en ces 3 points des réactions. On notera que ceci n'est pas totalement surprenant; ou bien le pavé et le plan sont parfaitement lisses et alors le contact a lieu suivant un carré mais est, soit sans frottements, soit avec tellement de frottements que le pavé est immobile; ou bien les contacts ne sont pas parfaits et dire que le pavé et le plan sont en contact signifie géométriquement que 3 points de l'un sont en contact avec 3 points de l'autre. De même un contact d'un cylindre avec un plan suivant une génératrice ne rentrera dans ce cadre que si l'on suppose, soit le contact sans frottement, soit, s'il y a du frottement, que le contact a lieu en 2 points [cf. 13].

Soit donc

$$(M_0, L, f: M_0 \rightarrow Q, Y, F)$$

un système de solides soumis à des contraintes. Soit

$$VM_0 = \text{Ker } Tf \text{ et } \pi^{-1}VM_0$$

son image réciproque par $\pi: TM_0 \rightarrow M_0$.

DÉFINITION 1.1. Une liaison est parfaite si $F = \pi^{-1}VM_0$.

Dans ce cas l'hypothèse H_0 est automatiquement vérifiée.

Remarque. Une situation physique étant donnée, il y a un certain arbitraire dans la formalisation des contraintes. En particulier une liaison $g(q) = 0$ où $g: M \rightarrow \mathbf{R}$ est une submersion peut être considérée comme non holonome de différentes manières dans notre formalisme. Si $q = (q^1, \dots, q^n)$ est un système de coordonnées locales U telles que $g(q) = 0$ s'écrive $q^1 = G(q^2, \dots, q^n)$, on pourra considérer $f: U \rightarrow \mathbf{R}, q \rightarrow q^1$ et

$$Y_1(q) = \sum_{j \geq 1} \frac{\partial G}{\partial q^j} \dot{q}^j.$$

Il pourra arriver (cf. §7) que suivant le formalisme choisi la liaison soit parfaite ou non.

Supposons *toutes les liaisons holonomes et parfaites*: $Y = 0$ et $F = \pi^{-1}VM_0$. Soit M la sous variété de M_0 , $M = f^{-1}(y_0)$ où $y_0 \in Q$ est la position initiale. Soit $(q^k)_{1 \leq k \leq m-n}$ une carte de M . Il résulte, par un simple calcul, des hypothèses précédentes que le mouvement sur M est régi par les équations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad 1 \leq k \leq m - n.$$

Autrement dit on peut toujours réduire le nombre de variables en utilisant les liaisons holonomes parfaites ou, si l'on préfère, énoncer ainsi le principe de d'Alembert:

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. *Dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons holonomes parfaites, la somme des travaux des forces d'inertie, des forces données et des forces de liaison est nulle.*

En particulier si toutes les liaisons sont holonomes parfaites on retombe sur l'énoncé de Lagrange [7] ou Arnold [1].

Pour étudier un système mécanique en présence de contraintes on commence donc par réduire éventuellement le nombre de paramètres en utilisant des liaisons holonomes parfaites. Ceci fournit un espace de configuration M qui sera une variété de dimension m .

Les liaisons restantes seront représentées par l'application fibrée (Y_1, f)

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Y_1} & TQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

ou f est une submersion à fibres connexes, et les travaux virtuels des liaisons par un sous-fibré F^0 de $T^*TM \rightarrow TM$ de rang la dimension de Q (hypothèse H_0) et contenu dans $j^*(\pi^{-1}T^*M)$.

Enfin les forces d'inertie et les forces données sont représentées par un lagrangien L . Un système mécanique est donc un quadruplet (M, Y_1, F^0, L) . Le principe de d'Alembert appliqué aux déplacements virtuels de M conduit dans une carte $(q^i)_{1 \leq i \leq m}$ de M , telle que $(q^i) = (q^\alpha, q^j)_{|\alpha \leq m-n| \leq j \leq m}$ et $f((q^i)) = (q^\alpha)$, aux équations

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \mu^\alpha \omega_{\alpha i}$$

$$\dot{q}^\alpha = Y^\alpha(q^i, \dot{q}^i)$$

aux inconnues (q^i) et (μ^α) .

Remarques. 1. On ne peut se servir des liaisons *non* parfaites pour opérer cette réduction, comme le montre l'exemple suivant. Soit P un point matériel *mobile avec frottement* sur un plan horizontal et soumis à la seule action de la pesanteur. Si $oxyz$ est un repère fixe tel que oz soit vertical et oxy le plan horizontal donné, le lagrangien est $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$ (ou g est l'accélération de la pesanteur, m la masse du point) et la liaison est $z = 0$. Compte tenu des lois du frottement F^0 est le sous-fibré de T^*TM dont une base au point $\dot{q} \in TM$ (ou $\dot{q} = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$) est la 1-forme $dz - \nu(\dot{x}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}) dx - \nu(\dot{y}/\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}) dy$ ou ν est le coefficient de frottement. Les équations du mouvement sont donc

$$\ddot{x} = -\nu N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\ddot{y} = -\nu N \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$$

$$\ddot{z} = -g + N$$

$$z = 0$$

aux inconnues (x, y, z, N)

On en déduit immédiatement que $N = g$ et que le mouvement est rectiligne uniformément décéléré d'accélération constant $-\nu g$.

Si l'on avait appliqué le principe de d'Alembert aux seuls déplacements virtuels compatibles avec la liaison $z = 0$, on aurait $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ et obtenu le résultat, expérimentalement faux, que le mouvement est rectiligne uniforme.

2. Si on essaie de traiter de la même façon le cas du mouvement *avec frottement* sur un axe horizontal on tombe sur un système—compatible—de 5 équations à 4 inconnues. Q dans ce cas est \mathbf{R}^2 mais F^0 est comme précédemment de dimension 1. On a les équations précédentes auxquelles il convient de rajouter $y = 0$ ce qui fournit, la deuxième équation étant triviale alors, un système de 4 équations à 4 inconnues et pour P un mouvement rectiligne uniformément décéléré d'accélération $-\nu g$. Nous avons exclu de notre théorie les cas de ce type ou F^0 à un rang différent de la dimension de Q . Si l'on suppose (par exemples) la liaison $y = 0$ parfaite, on peut réduire par $y = 0$ et on retrouve un exemple rentrant dans le cadre de la théorie générale. On notera que l'on fait *toujours* une hypothèse de ce type en mécanique à 2 dimensions!

Dorénavant, compte tenu des remarques précédentes, un système mécanique est un quadruplet $(M, (Y_1, f), F^0, L)$ ou M est une variété de dimension m , (Y_1, f) une application fibrée

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Y_1} & TQ \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

ou f est une *submersion*, F^0 un sous-fibré de $T^*TM \rightarrow TM$ de rang la dimension de Q et contenu dans $j^*(\pi^{-1}T^*M)$.

L'orthogonal de F^0 est le fibré des déplacements virtuels annulant le travail de la liaison. La donnée des liaisons est la donnée du couple $((Y_1, f), F^0)$.

Remarque sur les liaisons parfaites. Soit $(M, (Y_1, f))$ un système mécanique à liaisons parfaites. Soit

$$(q^i) = (q^\alpha, q^j) \xrightarrow{f} (q^\alpha)$$

un système de coordonnées adaptées. Les liaisons étant parfaites $F = \pi^{-1}VM$ et le travail des liaisons est $\mu_\alpha dq^\alpha$ ce qui conduit aux équations

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \mu_\alpha$$

$$\dot{q}^\alpha = Y^\alpha(q^i, \dot{q}^i)$$

Les équations se scindent en deux: le deuxième groupe détermine les paramètres mécanique μ_α , le premier et le troisième groupe le mouvement. Dans le cas holonome parfait les équations se réduisent au premier groupe pour $q^\alpha = q_0^\alpha$ constante. La suite va consister, plus ou moins, à la généralisation aux liaisons (hamiltoniennes) du cas des liaisons parfaites.

2. Du formalisme Lagrangien au formalisme Hamiltonien

Afin de donner une formulation hamiltonienne des équations (2) on suppose le système *régulier*, c'est-à-dire que la transformation de Legendre est un difféomorphisme de TM sur T^*M . Cette hypothèse est toujours vérifiée pour les systèmes classiques. On note H le hamiltonien associé. En coordonnées locales naturelles (q^i, \dot{q}^i) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i) &= \left(q^i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \\ H(q^i, p_i) &= \left(\dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) \circ \mathcal{L}^{-1} \end{aligned}$$

Dans T^*M les équations (2) s'écrivent, en notant $Y = Y_1 \circ \mathcal{L}$,

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} + \mu^\alpha \omega_{\alpha i} \\ \dot{q}^\alpha &= Y^\alpha(q^i, p_i) \end{aligned}$$

On munit, comme il est d'usage, T^*M de la structure symplectique de 2-forme $\sigma = d\lambda$ ou λ est la forme de Liouville.

\mathcal{L} induit un isomorphisme de fibrés vectoriels de $TTM \rightarrow TM$ sur $TT^*M \rightarrow T^*M$ dans lequel on note \mathcal{V} l'image de $j^{-1}(F)$.

F^0 se transforme en l'annulateur \mathcal{V}^0 de \mathcal{V} . On note \mathcal{V}^σ l'orthogonal symplectique de \mathcal{V} . Par construction \mathcal{V}^σ est contenu dans le sous fibré lagrangien de $TT^*M \rightarrow T^*M$, $\text{Ker } T\pi$, ou l'on note, par abus de notation, π la projection de T^*M sur M .

Pour toute fonction $\varphi: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ on note X_φ le champ de hamiltonien φ défini par

$$\iota(X_\varphi) d\lambda = -d\varphi.$$

Les équations (3) s'écrivent alors, ξ désignant un point de T^*M , et $\tilde{\pi} = f_0\pi: T^*M \rightarrow Q$

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} - X_H(\xi) &\in \mathcal{V}^\sigma \\ \frac{d}{dt} \tilde{\pi}(\xi) &= Y(\xi) \end{aligned}$$

Ces équations vont prendre une forme agréable dans le cas des *liaisons hamiltoniennes*.

DÉFINITION 2.1. *Une liaison $((Y, f), F)$ est hamiltonienne si il existe $h \in C^\infty(T^*M, \mathbf{R})$ telle que*

$$Y = T\tilde{\pi} \circ X_h$$

En général, même à une constante additive près, h n'est pas unique.

Compte tenu de la première relation (4) et de $T\pi(\mathcal{V}^\sigma) = 0$ le système (4) est équivalent à

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{\xi} - X_H(\xi) &\in \mathcal{V}^\sigma \\ T\tilde{\pi}(X_H - X_h) &= 0 \end{aligned}$$

3. Exemples de liaisons Hamiltoniennes

Toutes les liaisons holonomes sont hamiltoniennes puisqu'alors $Y \equiv 0$ et on prend $h = 0$.

Plus généralement supposons que Y se factorise à travers V^*M par la projection $\zeta: T^*M \rightarrow V^*M$ duale de l'inclusion $i: VM \rightarrow TM$ ou $VM = \text{Ker } Tf$. Soit \mathcal{H}_0 une connexion d'Ehresmann sur $f: M \rightarrow Q$ [6], c'est-à-dire un sous fibré vectoriel de $TM \rightarrow M$ supplémentaire de VM . \mathcal{H}_0 est isomorphe par Tf à $\pi^{-1}TQ$ ce qui permet de construire le relevé horizontal Y_h de Y dans TM . Y_h est défini par $Y_h \in \mathcal{H}_0$ et

$$Tf \circ Y_h = Y$$

soit $h: T^*M \rightarrow \mathbf{R}$ l'application définie par

$$h(\xi) = (\xi, Y_h(\xi)).$$

On vérifie aisément que $T\tilde{\pi} \circ X_h = Y$ si Y se factorise à travers V^*M .

C'est en particulier le cas si Y se factorise à travers M , i.e., si Y est de la forme $Y_0 \circ \pi$ ou $Y_0: M \rightarrow TQ$ se projette sur f . Dans [4] ces liaisons ont été appelées *semi-holonomes*. Ce cas contient le cas *presque holonome* étudié par Marle [10] [11] ou $Y = U_0\tilde{\pi}$ et U est un champ de vecteurs sur Q .

Remarques. (1) Dans de nombreux problèmes mécaniques il y aura une façon naturelle de choisir \mathcal{H}_0 .

(2) Connexion d'Ehresmann et phase de Berry:

Si \mathcal{H} est une connexion d'Ehresmann sur $f: M \rightarrow Q$ il n'y a aucune raison pour que l'on puisse relever globalement les courbes de Q en chemins horizontaux de M . On ne peut donc parler dans cette situation générale d'holonomie, de phase de Berry, etc., même si le fibré $M \rightarrow Q$ est trivial, comme le montre l'exemple suivant: $M = \mathbf{R}^2$, $Q = \mathbf{R}$, $f(x, y) = x$ et $\mathcal{H}(x, y)$ a pour base le champ de vecteurs $X(x, y) = (1, y^2)$ dont les courbes intégrales ont une asymptote verticale. Ainsi on ne peut relever la courbe $x \rightarrow x!$ On obtient un contre-exemple à base S^1 compacte en quotientant l'exemple précédent par l'action de $\mathbf{Z}: n.(x, y) = (x + n, y)$. Ceci devient par contre possible dans deux cas, si $M \rightarrow Q$ est un fibré G -principal et \mathcal{H} est une connexion de fibrés principaux [8] ou si f est une submersion à fibres compactes (et dans ce cas f est un fibré localement trivial à fibres compactes).

4. Condition de couplage et equations reduites

Dorénavant on ne s'intéresse qu'aux liaisons hamiltoniennes. Ces liaisons sont caractérisées par \mathcal{V}^σ et h .

Pour résoudre (5) on considère

$$W = \{ \xi \in T^*M \mid T\tilde{\pi} \circ X_{H-h}(\xi) = 0 \}.$$

Nécessairement les solutions de (5) sont des courbes tracées sur W . On fait l'hypothèse suivante, souvent réalisée dans la pratique, et équivalente à celle utilisée par Marle [10], [11]:

(H) W est l'image dans T^*M de V^*M par un morphisme s de fibrés sur M tel que $\zeta \circ s$ soit l'identité de V^*M .

La formulation utilisée dans [4] (s est une section de ζ) est ambiguë et laisse supposer, ce qui n'est pas toujours le cas, que s est un morphisme de fibrés vectoriels.

On suppose (H) toujours vérifiée dans la suite.

Il est alors clair que, sous cette hypothèse, le système a une solution unique si la condition (C) suivante, appelée *condition de couplage*, est réalisée:

$$(C) \quad TW \cap \mathcal{V}^\sigma|_W = \{0\}.$$

Compte tenu de l'hypothèse sur le rang de F^0 et donc de \mathcal{V}^σ, TW et \mathcal{V}^σ sont supplémentaires dans $TT^*M|_W$. Si (C) est réalisée les paramètres

mécaniques seront donc déterminés en projetant $X_H|_W$ sur $\mathcal{V}^\sigma|_W$ parallèlement à TW puisque $\dot{\xi} \in TW$ et $\dot{\xi} - X_H(\xi) \in \mathcal{V}^\sigma$.

Exemple. (C) est automatiquement vérifiée pour les liaisons parfaites. En effet on vérifie aisément le lemme suivante.

LEMME. Une liaison est parfaite si et seulement si $\mathcal{V}^\sigma = \text{Ker } T\zeta$.

(C) découle alors de ce que s est un inverse à droite de ζ sous l'hypothèse H.

Pour poursuivre un peu de géométrie symplectique est nécessaire. On note $\pi_V: V^*M \rightarrow M$ la fibration naturelle de V^*M .

$\pi_V = \pi|_{V^*M}$. Soit $\tilde{\pi}_V = f_0\pi_V$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 & T^*M & \\
 \tilde{\pi} \swarrow & & \searrow \zeta \\
 Q & \xleftarrow{\tilde{\pi}_V} & V^*M
 \end{array}$$

on vérifie que ζ étant la transposée de $i: VM \rightarrow TM$ et VM étant $\text{Ker } Tf$, $\text{Ker } T\tilde{\pi}$ est un sous fibré coïso trope de TT^*M d'orthogonal le sous-fibré isotrope $\text{Ker } T\zeta$. $(\tilde{\pi}, \zeta)$ est une paire duale particulière au sens de Weinstein [14] appelée réalisation isotrope de Libermann [3], [5] et

$$Q \xleftarrow{\tilde{\pi}} T^*M \xrightarrow{\zeta} V^*M$$

est un affinoïde symplectique au sens de [5], [15] (Exemple 1 de [5]). En particulier $\zeta: T^*M \rightarrow V^*M$ munit V^*M d'une structure de Poisson Λ , ce qui avait été antérieurement observé par Lichnerowicz [9], dont le feuilletage symplectique est $\text{Ker } T\tilde{\pi}_V$ et l'espace des feuilles Q , car f est à fibres connexes.

(C) étant réalisée on décompose X_H suivant TW et $\mathcal{V}^\sigma|_W$: $X_H = \tilde{X}_H + \tilde{Z}$ ou $\tilde{Z} \in \mathcal{V}^\sigma|_W$.

Le système (5) équivaut alors à l'unique équation sur W , $\dot{\xi} = \tilde{X}_H(\xi)$, \tilde{Z} étant entièrement déterminé par la projection de X_H sur \mathcal{V}^σ .

Remarques. (1) La méthode de résolution choisie généralise celle indiquée pour les liaisons parfaites (Remarque 2 à la fin du §1). La condition (C), automatiquement vérifiée pour les liaisons parfaites, apparaît comme une condition mathématique suffisante pour assurer l'existence et l'unicité des solutions. La puissance consommée par le système est $dH/dt = -\iota_{X_H} d\lambda(\dot{\xi})$ soit $-\iota_{\tilde{Z}} d\lambda(\dot{\xi})$.

(2) W ne dépend pas de h mais seulement de $Y: T^*M \rightarrow TQ$.

Pour résoudre l'équation différentielle $\dot{\xi} = \tilde{X}_H(\xi)$ sur W on la projette par ζ sur V^*M .

ζ est un difféomorphisme de W sur V^*M .

DÉFINITION 4.1 [10]. $D_Y = T\zeta\tilde{X}_H|_W$ s'appelle le champ dynamique du système.

La seule équation à résoudre est donc sur V^*M ,

$$\dot{\zeta} = D_Y(\zeta).$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à l'obtention d'une décomposition canonique de D_Y sur V^*M .

Pour toute application $\varphi: V^*M \rightarrow \mathbf{R}$ on note $X_\varphi = -[\Lambda, \varphi]$ son hamiltonien; soit $\hat{H} = s^*H$. Comme $\tilde{\pi}$ et ζ sont σ -orthogonale, $T\tilde{\pi}(X_{(H-h)}) = 0$ si et seulement si

$$d(H-h)(\text{Ker } T\zeta|_W) = 0.$$

Comme $\zeta_0 s = \text{Id}_{V^*m}$

$$d(H-h - (\zeta^*\hat{H} - \zeta^*s^*h))|_{TW} = 0.$$

Comme TW et $\text{Ker } T\zeta|_W$ sont supplémentaires le long de W , les deux relations précédentes entraînent que

$$d(H-h - \zeta^*(\hat{H} - s^*h))|_W = 0.$$

Il en résulte que le long de W ,

$$X_H = X_h + X_{\zeta^*(\hat{H}-s^*h)}.$$

Soit $Z = T\zeta\tilde{Z}|_W$ ($\tilde{Z}|_W$ est la projection sur \mathcal{V}^σ de X_H). En projetant par ζ on obtient

$$D_Y = X_{\hat{H}} - Z + T\zeta X_h \circ s - X_{s^*h}.$$

Soit alors $\theta = s^*\lambda$.

θ ne dépend donc que de W . $d\theta$ est une 2-forme fermée prolongeant la forme symplectique des feuilles de (V^*M, Λ) . Soit Σ^0 l'annulateur du feuilletage symplectique de (V^*M, Λ) . Il est classique (cf. [12]) que l'on définit une connexion d'Ehresmann \mathcal{H}_{VW} sur le fibré

$$V^*M \xrightarrow{\tilde{\pi}_V} Q$$

ainsi: $X \in \mathcal{H}_{VW}$ si et seulement si $\iota_X d\theta \in \Sigma^0$. De plus [cf. 12] tout champ \mathcal{H}_{VW} -horizontal relevant un champ sur Q est un automorphisme de Poisson car $d\theta$ est fermée. Soit $Y_W: V^*M \rightarrow TV^*M$ le relevé \mathcal{H}_{VW} -horizontal de Y_0s .

LEMME. $Y_W = T\zeta X_h \circ s - X_{s^*h}$.

Preuve du lemme. Posons $U = X_h \circ s - X_{\zeta^*s^*h}$.

$T\hat{\pi}_V \circ T\zeta U = T\hat{\pi}U = Y \circ s$ puisque, ζ^*s^*h étant constant sur les ζ -fibres, $X_{\zeta^*s^*h} \in \text{Ker } T\hat{\pi}$. Tout revient donc à prouver que pour tout vecteur $S \in \Sigma$ $d\theta(T\zeta U, S) \equiv 0$ soit $d\lambda(TsT\zeta U, TsS) \equiv 0$. Or $Y - TsT\zeta U \in \text{Ker } T\zeta$ puisque $\zeta \circ s = \text{Id}$. Comme $s \in \text{Ker } T\hat{\pi}_V$, $TsS \in \text{Ker } T\hat{\pi}$, $\sigma - \text{orthogonal à Ker } T\zeta$. Il en résulte que

$$d\theta(T\zeta U, S) \equiv d\lambda(U, TsS).$$

Comme $h - \zeta^*s^*h$ est nul sur W , $U \in TW^\sigma$. Comme $T_sS \in TW$, $d\lambda(U, TsS) \equiv 0$ ce qui achève la démonstration.

On a finalement prouvé:

THÉORÈME 4.1. *Si la condition (C) de couplage est réalisée, le champ dynamique D_Y se décompose en la somme de trois termes*

$$D_Y = X_{\hat{H}} + Y_W - Z$$

ou $\hat{H} = s^*H$, Y_W est le relevé \mathcal{H}_{VW} -horizontal de Y et Z , qui est contenu dans le fibré lagrangien $\text{Ker } T\hat{\pi}_V$, dépend des liaisons.

Remarques. (1) $Z = T\zeta\tilde{Z}$ et \tilde{Z} est la projection de $X_H|_W$ sur \mathcal{V}^σ . C'est en ce sens que Z dépend des liaisons.

(2) Ce théorème généralise aux liaisons hamiltoniennes le théorème 3.1 de [10], [11] énoncé dans le cas particulier où $Y: T^*M \rightarrow TQ$ se factorise à travers V^*M .

Cas des liaisons presque holonomes (Y se factorise à travers Q : $Y = Y_0 \circ \pi$).

Soit \mathcal{H}_0 une connexion d'Ehresmann sur $M \rightarrow Q$. On a donc une décomposition en sous-fibrés vectoriels $TM = VM \oplus \mathcal{H}_0$ et par dualité une scission $s_0: V^*M \rightarrow T^*M$ de la suite exacte

$$0 \rightarrow f^{-1}T^*Q \rightarrow T^*M \rightarrow V^*M \rightarrow 0,$$

qui identifie V^*M à l'annulateur de \mathcal{H}_0 .

Comme $h(\xi) = (\xi, Y_h(\xi))$ (cf. §3) $h \circ s_0 = 0$.

LEMME: X_h est ζ -projetable.

Preuve du lemme. Comme les ζ -fibres de

$$T^*M \xrightarrow{\zeta} V^*M$$

sont engendrées par les champs de hamiltonien appartenant à $\tilde{\pi}^* C^\infty(Q, \mathbf{R})$ il suffit de vérifier que pour tout $\varphi \in C^\infty(Q, \mathbf{R})$,

$$[X_h, X_{\tilde{\pi}^*\varphi}] \in \text{Ker } T\zeta$$

or

$$[X_h, X_{\tilde{\pi}^*\varphi}] = X\{h, \tilde{\pi}^*\varphi\} \quad \text{et} \quad \{h, \tilde{\pi}^*\varphi\} = d\varphi \circ Y$$

soit

$$[X_h, X_{\tilde{\pi}^*\varphi}] = X_{\tilde{\pi}^*(d\varphi \circ Y_0)}$$

ce qui entraîne le résultat puisque $\tilde{\pi}$ et ζ sont σ -orthogonales.

Soit \mathcal{H}_V la connexion d'Ehresmann sur V^*M associé à $s_0^* d\lambda = d\theta_0$.

LEMME 2. $T\zeta X_h$ est le relevé \mathcal{H}_V -horizontal de Y .

Preuve du lemme. Il suffit de prouver que pour tout $S \in \Sigma$, $d\lambda(Ts_0 \circ T\zeta X_h, Ts_0 S) = 0$.

Comme $\zeta \circ s_0 = \text{Id}$, $X_h - Ts_0 \circ T\zeta X_h \in \text{Ker } T\zeta$. D'autre part $Ts_0 S \in \text{Ker } T\tilde{\pi}$. Il en résulte que

$$d\lambda(Ts_0 T\zeta X_h, Ts_0 S) = d\lambda(X_h, Ts_0 S) = -\iota_S d(h \circ s_0) = 0$$

car $h \circ s_0 = 0$ ce qui achève la démonstration..

COROLLAIRE. Si la liaison est presque holonome, si \mathcal{H}_0 est une connexion d'Ehresmann sur $M \rightarrow O$ et \mathcal{H}_V la connexion canoniquement associée sur $V^*M \rightarrow Q$, D_Y se décompose en trois termes

$$D_Y = X_{H_1} + Y_V - Z$$

ou X_{H_1} est le champ de Hamiltonien $H_1 = s^*(H - h)$ et Y_V est l'automorphisme de Poisson relevé \mathcal{H}_V -horizontal de Y .

En présence de liaisons parfaites ($Z = 0$) une forme locale du corollaire a été obtenue par Marle [10] dans le cas où Y se réduit à un champ de vecteurs sur Q .

Remarques. (1) Supposons que le système comporte, en sus des forces données représentées par L , des forces \tilde{R} . Leur travail virtuel est représenté dans le formalisme hamiltonien par une 1-forme semi-basique $\iota_{\tilde{R}}\sigma = -\omega$. $\tilde{R} \in \text{Ker } T\pi$. Il en résulte que W ainsi que la condition (C) sont inchangées, ce qui souligne leur caractère géométrique, tandis qu'à l'expression de D_Y se rajoute un terme $R = T\zeta\tilde{R}|_W$. C'est le cas par exemple en présence de viscosité.

(2) Comme le note Arnold [1], le formalisme hamiltonien n'a pas en mécanique, comme seule origine, le formalisme lagrangien transformé par \mathcal{L} : le mouvement d'un fluide incompressible horizontal en fournit un exemple.

5. Cas des systèmes mécaniques classiques

On suppose que l'ensemble des actions agissant sur le système en dehors des liaisons dépend d'un potentiel U . Si T désigne l'énergie cinétique du système, T définit sur M une structure riemannienne. TM , et T^*M par dualité, sont munis d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le Lagrangien L du système s'écrit alors

$$L(v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - U_0\pi(v)$$

et la transformation de Legendre est l'isomorphisme de TM et T^*M défini par le produit scalaire.

Le Hamiltonien H du système s'écrit

$$H(\xi) = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi \rangle + U_0\pi(\xi).$$

Remarque. Dans le cas des systèmes classiques, on pourra éviter le passage au cotangent en utilisant la structure symplectique, tout aussi maniable, sur TM définie par dA ou $A = \mathcal{L}^*\lambda$. Dans ce cas

$$\mathcal{L}^*H = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + U_0\pi(v).$$

On suppose que les liaisons sont telles que l'application fibrée $Y: T^*M \rightarrow TQ$ se factorise à travers V^*M , $Y = Y_0 \circ \zeta$. Soit \mathcal{H}_0 la connexion d'Ehresmann définie sur $M \rightarrow Q$ par l'orthogonal relatif au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par T . La décomposition $TM = VM \oplus \mathcal{H}_0$ fournit en passant au

dual la décomposition

$$T^*M = V^0M \oplus \mathcal{H}_0^0$$

où \mathcal{H}_0^0 , annulateur de \mathcal{H}_0 , s'identifie à V^*M et V^0M à \mathcal{H}_0^* . Soit s_0 l'inclusion: $V^*M = \mathcal{H}_0^0 \rightarrow T^*M$.

Soit $Y_h: V^*M \rightarrow TM$ le relevé horizontal de Y , $h(\xi) = (\xi, Y_h \circ \zeta(\xi))$ et $\rho = \mathcal{L} \circ Y_h$.

W est définie par $(dH - dh)(\text{Ker } T\zeta|_W) = 0$.

Comme $\text{Ker } T\zeta \subset \text{Ker } T\pi$ cette condition s'écrit

$$\forall \hat{X} \in V^0(M) \quad \mathcal{L}_{\hat{X}}(H - h)|_W = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\forall \hat{X} \in V^0(M) \quad \langle \hat{X}, \xi - \rho \circ \zeta(\xi) \rangle = 0$$

W est donc définie par $\xi - \rho \circ \zeta(\xi) \in V^0(M)$. Comme Y_h est horizontal $\rho \circ \zeta(\xi) \in \mathcal{H}_0^0$. Il en résulte que W est l'image de V^*M par l'application $s(\zeta) = \rho(\zeta) + s_0(\zeta)$ ce qui implique que la condition (H) est toujours vérifiée.

Supposons la condition (C) vérifiée et soit \mathcal{H}_V la connexion sur $V^*M \rightarrow Q$ associée à $d\theta_0$ ou $\theta_0 = s_0^*\lambda$. Soit Y_V le relevé de Y dans TV^*M relativement à \mathcal{H}_V

$$Y_W = Y_V + S_0$$

ou S_0 est tangent au feuilletage symplectique $\text{Ker } T\tilde{\pi}_V$.

On note $\tilde{\rho}$ la 1-forme $\tilde{\rho} = \theta - \theta_0 = \rho^*\lambda$.

Y_W et Y_V étant respectivement \mathcal{H}_{VW} et \mathcal{H}_V horizontaux,

$$\forall S \in \Sigma, \quad \iota_{S_0} d\theta_0(S) = -\iota_{Y_W} d\tilde{\rho}(S).$$

Par définition de la forme de Liouville, $\tilde{\rho} \in \Sigma^0$. En effet, $\tilde{\rho}(S) = (\rho(\zeta), T\pi_V(S)) = 0$ car $\rho(\zeta) \in V^0M$ et $T\pi_V(S) \in VM$. D'autre part

$$\tilde{\rho}(Y_W) = (\rho(\zeta), T\pi_V(Y_W)) = \langle Y_h, Y_h \rangle(\zeta).$$

On définit $K_Y: V^*M \rightarrow \mathbf{R}$ en posant $K_Y = \frac{1}{2} \langle Y_h, Y_h \rangle$. Avec ces notations

$$\forall S \in \Sigma \quad \iota_{S_0} d\theta_0(S) = 2\iota_S dK_Y - \tilde{\rho}[S, Y_W].$$

$Y: V^*M \rightarrow TQ$ peut être considérée comme une section du fibré normal du feuilletage Σ dont Y_W est un représentant dans les champs sur V^*M . Comme $\tilde{\rho} \in \Sigma^0$, $\tilde{\rho}[S, Y_W]$ ne dépend que de la projection de $[S, Y_W]$ dans le

fibré normal. Autrement dit ∇ désignant la connexion de Bott du feuilletage Σ , $\tilde{\rho}[S, Y_W] = (\rho, \nabla_S Y)$. Soit $(\nabla_S Y)_h$ le relevé \mathcal{H}_V horizontal de $\nabla_S Y$. De la définition de ρ et λ il résulte que $\langle \tilde{\rho}, \nabla_S Y \rangle = \langle Y_h, (\nabla_S Y)_h \rangle$. Soit η la 1-forme Σ feuilletée sur V^*M définie par $\eta(V) = \langle Y_h, (\nabla_S Y)_h \rangle$, η ne dépend que de Y et \mathcal{H} et

$$\iota_{s_0} d\theta_0(S) = 2\iota_S dK_Y - \eta(S)$$

ce qui entraîne que $S_0 = -2X_{K_Y} + \Lambda^\# \eta$ ou $\Lambda^\# R: T^*V^*M \rightarrow TV^*M$ est le morphisme associé au tenseur de Poisson Λ de V^*M .

Ceci va permettre par application du théorème 4.1 d'obtenir dans ce cas une autre décomposition de D_Y . En effet

$$\hat{H}(\zeta) = s^*(H(\zeta)) = \frac{1}{2} \langle s_0(\zeta), s_0(\zeta) \rangle + \frac{1}{2} \langle \rho(\zeta), \rho(\zeta) \rangle - U_0 \pi_V(\zeta)$$

soit

$$\hat{H}(\zeta) = \frac{1}{2} \langle s_0(\zeta), s_0(\zeta) \rangle + K_Y - U_0 \pi_Y(\zeta).$$

on en déduit, par un calcul immédiat:

PROPOSITION 5.1. *Si $Y = Y_0 \circ \zeta$ et si (C) est réalisée*

$$D_Y = X_{H_0} - X_{K_Y} + Y_V + (\Lambda^\# \eta - Z)$$

où

$H_0 = s_0^* H$ est le hamiltonien sur V^*M du cas holonome ($Y = 0$);

$K_Y = \frac{1}{2} \langle Y_h, Y_h \rangle$ dépend de la liaison et de l'énergie cinétique;

Y_V est le relevé horizontal de Y dans la connexion sur V^*M associée à la connexion "riemannienne" sur $M \rightarrow Q$;

Enfin $\Lambda^\# \eta - X_{K_Y} = 0$ si la fibration $f: M \rightarrow Q$ est riemannienne; $\eta = 0$ si Y se factorise à travers Q .

Le dernier point résulte de ce que si la fibration est riemannienne, $x \rightarrow \langle x, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_{0x}}$ se factorise à travers Q ; pour tout $S \in \Sigma$, $S = \text{Ker } T\tilde{\pi}_V$, on a alors

$$\mathcal{L}_S K_Y = \frac{1}{2} \mathcal{L}_S \langle Y_h, Y_h \rangle = \langle Y_h, \mathcal{L}_S Y_h \rangle = \langle Y_h, (\nabla_S Y)_h \rangle = \eta(S).$$

Si Y se factorise à travers Q , $\nabla_S Y = 0$ et donc $\eta = 0$.

Cette proposition étend un résultat de Marle [10] relatif au cas où Y se factorise à travers Q et où les liaisons sont parfaites ($\Lambda^\# \eta = 0 = Z$); si de plus la fibration est riemannienne, $X_{K_Y} = 0$.

Remarque. En présence d'autres forces données que celle retenue dans L , il convient d'ajouter un terme $R \in \text{Ker } T\pi_V$ dans la décomposition de D_Y . C'est par exemple le cas en présence de viscosité. Dans ce cas est donnée une forme quadratique négative sur TM , ou après transformation de Legendre (linéaire dans ce paragraphe), une forme quadratique négative sur T^*M , Φ , la fonction de Rayleigh, et le travail des frictions est représenté par la 1-forme semi basique sur $T^*M \rightarrow M$

$$X \rightarrow \Phi(\xi, T\pi X)$$

qui par dualité symplectique fournit un vecteur \tilde{R} contenu dans $\text{Ker } T\pi$. $R = T\zeta\tilde{R}|_W$ définit dans ce cas un morphisme de fibrés vectoriels de

$$\begin{array}{ccc} V^*M & \longrightarrow & V^*M \times_M V^*M \\ & \searrow & \swarrow \\ & & M \end{array}$$

La condition (C) est agréable à expliciter dans deux cas particuliers, celui où $Y_0: V^*M \rightarrow TQ$ est un morphisme de fibrés vectoriels et celui des liaisons semi-holonomes où Y se factorise à travers M :

1. Y_0 linéaire de $V^*M \rightarrow TQ$ ($Y = Y_0 \circ \zeta$)

$\rho: V^*M \rightarrow T^*M$ est alors un morphisme de fibrés vectoriels prenant ses valeurs dans $\mathcal{H}_0^* = V^0M$. Il en résulte que $s = \rho + s_0$ définit une connexion d'Ehresmann sur $M \rightarrow Q$ notée \mathcal{H} et W est un fibré vectoriel de base M . Pour exprimer la condition (C), $TW \cap \mathcal{V}^\sigma = 0$, on remarque que \mathcal{V}^σ étant contenu dans $\text{Ker } T\pi$ il suffit d'écrire que

$$(TW \cap \text{Ker } T\pi) \cap \mathcal{V}^\sigma = 0.$$

Autrement dit, si l'on considère la suite exacte de fibrés vectoriels sur T^*M ,

$$O \rightarrow T^*M \times_M T^*M \rightarrow TT^*M \xrightarrow{\Psi} \pi^{-1}TM \rightarrow O$$

il suffit d'écrire que $\Psi(\mathcal{V}^\sigma) \cap \psi(TW \cap \text{Ker } T\pi) = 0$: soit $\pi^{-1}\mathcal{H} \cap F = 0$ ou encore $F_0|_{\pi^{-1}\mathcal{H}}$ est isomorphe à $(\pi^{-1}\mathcal{H})^*$.

PROPOSITION 5.2. Si $Y_0: V^*M \rightarrow TQ$ est linéaire, la condition (C) s'écrit $\pi^{-1}\mathcal{H} \cap F = 0$ ou encore, $F_0|_{\pi^{-1}\mathcal{H}}$ est isomorphe à $(\pi^{-1}\mathcal{H})^*$.

2. La liaison est semi-holonome

Dans ce cas $\rho: V^*M \rightarrow T^*M$ se factorise à travers M ce qui implique que $TW \cap \text{Ker } T\pi$ est l'image de Ts_0 . On en déduit:

PROPOSITION 5.3. Si Y est semi-holonyme (C) s'écrit $\pi^{-1}\mathcal{H}_0 \cap F = \{O\}$ et D_Y se décompose en

$$D_Y = X_{H_0} - X_{K_Y} + Y_V + (\Lambda^\# \eta - Z)$$

ou K_Y est cette fois une fonction basique sur $T^*M \rightarrow M$.

Il est intéressant dans ce cas de donner une expression de (C) en coordonnées locales: ceci permettra de justifier la désignation de (C) comme condition de couplage.

On se place dans des coordonnées adaptées à $f, f: (q^j, q^\alpha) \rightarrow q^\alpha$, et on se donne une base locale de $F^0 \rightarrow TM$, $\omega_\alpha = \omega_{\alpha i} dq^i$, et $L = a_{i'j'} \dot{q}^i \dot{q}^{j'} - U(q^i)$ ou $1 \leq i', i'' \leq m, 1 \leq j, j' \leq m, 1 \leq \alpha, \alpha', \beta \leq m - n, VM = (q^\alpha, q^i, 0, \dot{q}^j)$. Ecrire que $\pi^{-1}\mathcal{H} \cap F\{0\}$ revient à écrire que les $\omega_\alpha|_{\pi^{-1}\mathcal{H}}$ forment une base de $\pi^{-1}\mathcal{H}^*$. Soit $(a^{i''})$ la matrice inverse de $(a_{i'j'})$ et $(\gamma_{\alpha\alpha'})$ la matrice inverse de $(a^{\alpha\alpha'})$. La condition (C) s'écrit

$$(C) \quad \det(\omega_{\alpha\alpha'} + \omega_{\alpha j} a^{j\beta} \gamma_{\beta\alpha'}) \neq 0.$$

Supposons, situation fréquente (cf. infra), que l'on veuille contrôler les paramètres (q^α) par un dispositif agissant sur les paramètres (q^j) . Dans ce cas $\omega_{\alpha\alpha'} \equiv 0$ et (C) se réduit à $\det(\omega_{\alpha j} a^{j\beta}) \neq 0$.

En particulier ceci sera impossible si $a^{j\beta} = 0$ autrement dit si les variables q^j et q^α ne sont pas *couplées*. Ce cas est l'opposé du cas de l'asservissement parfait qui correspondrait à $\omega_{\alpha j} \equiv 0$ et pour lequel (C) est trivialement vérifiée puisqu'on suppose F^0 de rang $m - n$.

6. Extension à la mécanique terrestre

Tenir compte pour un système mécanique de la rotation de la terre Ω revient à considérer en axes absolus, une liaison $\dot{\varphi} = \Omega$ ou φ est l'angle de rotation de la Terre. En général on préfère se placer dans des axes liés à la Terre et alors le hamiltonien H se présente sous la forme

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle + \langle a, \xi \rangle + U_0 \pi(\xi)$$

ou \langle , \rangle est le produit scalaire défini par la partie quadratique de l'énergie cinétique et a une 1-forme sur M .

On conserve les mêmes autres données qu'au paragraphe (5) et on note \mathcal{H}_0 le sous-fibré orthogonal de VM dans TM pour le produit scalaire \langle , \rangle . Dans le dual, a se décompose en $a_0 \in V^0M$ et $a_1 \in \mathcal{H}_0^0$ et W est défini par

l'application $s: V^*M \rightarrow T^*M$,

$$\zeta \rightarrow s(\zeta) = \rho(\zeta) + s_0(\zeta) - a_1 \circ \pi(\zeta)$$

La condition (H) est donc vérifiée puisque $\zeta_0 s = \text{Id}$. En fait il suffit dans les résultats du paragraphe 5 de changer ρ en $\rho - a_1 \circ \pi_V$ (ce qui correspond à la prise en compte de la liaison $\dot{\phi} = \Omega$). Par exemple:

COROLLAIRE. *Si Y est semi holonome, et si $\pi^{-1}\mathcal{H} \cap F = \{O\}$ où \mathcal{H} est la connexion définie par s ,*

$$D_Y = X_{H_0} - X_{K_Y} + Y_V + (\Lambda^\# \eta - Z)$$

ou

$$H_0 = s_0^* H, K_Y^1 = \frac{1}{2} \langle \rho - a_1, \rho - a_n \rangle,$$

$$\eta(S) = \langle \rho - a_1, (\nabla_S Y)_h \rangle \quad \text{si } S \in \Sigma.$$

7. Etude de quelques systèmes mécaniques

Les exemples—élémentaires—suivants ont été choisis pour leur valeur illustrative des résultats précédents. En particulier ces exemples ne rentrent ni dans le formalisme de Marsden, Montgomery et Ratiu [12] ni dans celui de Marle [10], [11].

7.1 Système de deux disques asservis [2]

Le système est constitué de deux disques D_1 et D_2 de même axe vertical Δ . D_1 est soumis à un ressort de rappel d'axe Δ de coefficient $k > 0$. D_2 est astreint à suivre D_1 dans son mouvement par un dispositif extérieur au système agissant sur D_2 seul. Si on désigne par (θ_i) ($i = 1, 2$) la distance algébrique parcourue par un point de D_i à la distance unité de Δ sur le cercle unité, l'espace de configuration est $M = \mathbf{R}^2 = (\theta_1, \theta_2)$ et

$$L = \frac{1}{2} (A_1 \dot{\theta}_1^2 + A_2 \dot{\theta}_2^2) - k \frac{\theta_1^2}{2}$$

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_1} \right) + k \frac{\theta_1^2}{2}$$

Enfin F^0 a pour base $d\theta_2$.

On peut formaliser la liaison de deux façons différentes:

(a) *Comme liaison holonome:* $Q = \mathbf{R}$ et $f(\theta_1, \theta_2) = \theta_1 - \theta_2; Y = 0$. C'est une liaison non parfaite puisque $VM \neq F$. Des calculs simples donnent

$$VM = (\theta_1, \theta_2; X, X), \quad \mathcal{H}_0 = \{(\theta_1, \theta_2; Y_1, Y_2) (A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 0)\}.$$

Comme $Y = 0$, $W = \text{Im } s_0$ ou $s_0: V^*M \rightarrow T^*M$ est donné par

$$s_0(\theta_1, \theta_2, p) = \left(\theta_1, \theta_2, \frac{A_1 p}{A_1 + A_2}, \frac{A_2 p}{A_1 + A_2} \right)$$

et (H) et (C) sont trivialement vérifiées.

La proposition 5.1 entraîne que

$$D_Y = X_{H_0} - Z$$

où

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{A_1 + A_2} + k \frac{\theta_1^2}{2},$$

$$Z = \left(0, 0; 0, \frac{A_2}{A_1} k \theta_1 \right)$$

ce qui conduit aux équations

$$\dot{\theta}_1 = \frac{p}{A_1}$$

$$\dot{p} = -k \theta_1.$$

L'inertie de D_2 ne joue aucun rôle ce qui ne serait pas le cas si la liaison était parfaite, le mouvement étant alors régi par

$$\ddot{\theta}_1 + k \frac{\theta_1}{A_1 + A_2} = 0.$$

(b) *Comme liaison non holonome, hamiltonienne parfaite: $Q = \mathbf{R}$, $f(\theta_1, \theta_2) = \theta_2$, $Y_1: TM \rightarrow TQ$, $VM = (\theta_1, \theta_2; X_1, 0)$ la liaison est parfaite. D'autre part $Y: T^*M \rightarrow TQ$ s'écrit*

$$(Y(\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)) = \left(\theta_2, \frac{p_1}{A_1} \right)$$

et donc se factorise à travers V^*M . La liaison est donc hamiltonienne. Enfin le produit scalaire est à coefficients constants et la proposition 5.1 entraîne que

$$D_Y = X_{H_0} + Y_V$$

ou $s_0(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p, 0)$

$$H_0 = \frac{1}{2} \frac{p^2}{A_1} + k \frac{\theta_1^2}{2}$$

$$Y_V = \left(\theta^1, \theta^2, p, 0, \frac{p}{A_1}, 0 \right)$$

et on retrouve les équations précédentes.

7.2 *Stabilisateur de Houle SPERRY* [2]

Sur un navire, soumis seulement à la houle et à son poids, on place un gyroscope dont le carter est mobile par rapport au pont du navire autour d'un axe perpendiculaire à l'axe longitudinal du navire, le centre de gravité du gyroscope étant situé à une distance d au-dessus du centre de gravité du bateau. Un moteur fixé sur le pont agit sur le carter du gyroscope. Si θ désigne l'angle du mât du navire avec la verticale, α l'angle du carter du gyroscope avec le pont, φ l'angle de rotation du rotor du gyroscope

$$L = \frac{1}{2} \left(A \dot{\alpha}^2 + I(\alpha) \dot{\theta}^2 + C(\dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin \alpha)^2 \right) + k \cos \theta$$

ou $I(\alpha) = I_1 + md^2 + A \cos^2 \theta$.

$I_1, (A, C)$ étant des moments d'inertie du navire et du gyroscope respectivement, m la masse du gyroscope. Enfin $k \cos \theta$ représente la contribution de la houle.

L'espace de configuration est $M = \mathbf{R}^2 \times S^1 = \{(\alpha, \theta, \varphi)\}$ et on suppose que la liaison d'asservissement est

$$\dot{\alpha} = a \dot{\theta} + b \theta.$$

On choisit $Q = \mathbf{R}$; $f(\alpha, \theta, \varphi) = \alpha$;

$$VM = (\alpha, \theta, \varphi, 0, \Theta, \Phi); \quad Y_1(\alpha, \theta, \varphi, \dot{\alpha}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = (\alpha, a \dot{\theta} + b \theta).$$

Ce qui conduit sur T^*M à

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1^2}{A} + \frac{(p_2 - p_3 \sin \alpha)^2}{I} + \frac{p_3^2}{C} \right) - k \cos \theta$$

$$Y = Y_0 \circ \zeta \quad \text{où } Y_0: V^*M \rightarrow T^*M$$

$$Y_0(\alpha, \theta, \varphi, p_2, p_3) = \left(\alpha, a \frac{p_2 - p_3 \sin \alpha}{I} + b \theta \right).$$

On est dans les conditions d'application de 5.1

$$s_0: (\alpha, \theta, \varphi, p_2, p_3) = (\alpha, \theta, \varphi, 0, p_2, p_3)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{(p_2 - p_3 \sin \alpha)^2}{I} + \frac{p_3^2}{C} \right) - k \cos \theta.$$

Le produit scalaire restreint à $\mathcal{H}_0 = (\alpha, \theta, \varphi, X, 0, 0)$ ne dépend que de α et donc se factorise à travers Q . Ceci implique que $D_Y = X_{H_0} - Y_V$. Soit

$$D_Y = \left(a\Theta + b\theta, \Theta, \frac{p_3}{C} - \Theta \sin \alpha, -k \sin \theta, 0 \right) \quad \text{où } \Theta = \frac{p_2 - p_3 \sin \alpha}{I}$$

et l'équation $\dot{\zeta} = D_Y(\zeta)$ entraîne que p_3 est constant.

Remarques. (1) L'intérêt du compas Sperry est qu'il permet de stabiliser la houle ce que l'on voit sur l'équation linéarisée où $I_0 = I(0)$, $r_0 > 0$ est la rotation propre du rotor

$$I_0 \ddot{\theta} + Cr_0 a \dot{\theta} + (Cr_0 b + k)\theta = 0.$$

Il suffit de choisir a et b tels que

$$4I_0(Cr_0 b + k) > C^2 r_0^2 a^2.$$

En particulier si $b \neq Cr_0 a^2 / 4I_0$, on ne modifie pratiquement pas la période propre du navire tandis qu'on le stabilise d'autant plus vite que $a > 0$ est grand.

(2) si $b = 0$ l'asservissement $\dot{\alpha} = a\dot{\theta}$ est intégrable et équivaut à l'asservissement holonome $\alpha = a\theta$. Dans ce cas si on choisit $f(\alpha, \theta, \varphi) = \alpha - a\theta$ l'asservissement n'est pas parfait. Par ailleurs la stabilisation est limitée par $C^2 r_0^2 a^2 < 4I_0 k$ tandis que la période propre du navire est augmentée.

7.3 Mouvement d'une bille de billard sur un plan horizontal.

Une bille de billard, homogène, de centre G , de rayon a , est en mouvement sur un plan horizontal, la seule force donnée étant le poids. L'espace de configuration s'identifie donc au groupe des déplacements qu'à son tour on identifie à $\mathbf{R}^2 \times SO(3)$ ou $q \in \mathbf{R}^3$ représente les coordonnées dans un repère fixe $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, du centre de gravité; on désigne par I le moment d'inertie de la bille autour d'un diamètre. Avec des notations évidentes,

$$L = \frac{1}{2}(m|\dot{q}|^2 + I|\omega|^2) - mgq^3$$

où $(\dot{q}, \omega) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, $TSO(3)$ étant par translation à gauche identifié à $SO(3) \times \mathbf{R}^3$.

Ainsi

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{|p|^2}{m} + \frac{|\pi|^2}{I} \right) + mgq^3.$$

Les lois du frottement obligent à considérer deux phases distinctes selon que le glissement

$$V = \frac{p}{m} - a \frac{\pi}{I} \wedge e_3$$

est nul ou non.

7.3.a. *Cas du glissement*

Dans ce cas $F^0 \subset T^*T^*M$ a pour base la 1-forme τ :

$$(q, A, p, \pi; Q, \Omega, P, M) \rightarrow \langle e_3 + u_0, Q - a\Omega \wedge e_3 \rangle \quad \text{où } u_0 = -\nu \frac{V}{|V|},$$

ν désignant le coefficient de frottement.

La seule liaison est alors holonome (non parfaite)

$$\mathbf{R} = Q \quad \text{et} \quad f(q, A) = q^3, \quad VM = (q, A, Q_0, \Omega) \notin_0 = (q, A, Q^3 e_3, 0)$$

où pour tout vecteur X , X_0 désigne sa projection dans le plan (e_1, e_2) .

(C) est vérifiée puisque $\tau|_{\mathcal{X}_0}$ est une base de \mathcal{H}_0^* et $W = s_0(V^*M)$ ou en identifiant V^*M et \mathcal{H}_0^0 :

$$s_0: (q, A, p_0, \pi) \rightarrow (q, A, p_0, \pi)$$

Comme la liaison est holonome

$$D_Y = X_{H_0} - Z$$

où

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{|p_0|^2}{m} + \frac{|\pi|^2}{I} \right) + mgq^3.$$

Compte tenu de ce que

$$d\lambda = dp_i \wedge dq^i + d\lambda_1$$

où λ_1 est la forme de Liouville de $T^*S^0(3)$, \mathcal{V}^σ a pour base, au point (q, A, p_0, π) le vecteur $(0, 0, e_3 + u_0, au_0 \wedge e_0)$. Ce qui donne

$$\tilde{Z} = (0, 0; -mg(e_3 + u_0), -mga u_0 \wedge e_3)$$

et

$$D_Y = \left(\frac{p_0}{m}, \frac{\pi}{A}, mgu_0, mga \Omega_0 \wedge e_3 \right).$$

Il en résulte que $\pi - ap_0 \wedge e_3 = C$ est constant ce qui entraîne que $u_0 = k^2(p_0 + v_0)$ où v_0 est une constante et finalement

$$p_0 + v_0 = (-mgvt + \alpha)\xi_0.$$

Le mouvement est donc uniformément décéléré de décélération mgv pendant l'intervalle de temps $[0, \alpha/mgv]$. La rotation de la bille est constante pendant cette phase.

7.3.b. Cas sans glissement

Dans ce cas la direction horizontale de la force de frottement n'est pas fixée et F^0 a pour base les 1-formes $\tau_i: (Q, \Omega, P, M) \rightarrow \langle e_i, Q - a\Omega \wedge e_3 \rangle$

On choisit $f: M \rightarrow Q = \mathbf{R}^3, (q, B) \rightarrow q$ et la liaison $q^3 = a, v = 0$ s'écrit $\dot{q} = Y_1$ où $Y_1(q, A, \dot{q}, \omega) = (q, a\omega \wedge e_3)$. Soit, en passant au cotangent,

$$\begin{aligned} Y: T^*M &\rightarrow TQ \\ (q, A, p, \pi) &\rightarrow \left(q, \frac{a}{I}\pi \wedge e_3 \right) \end{aligned}$$

qui se factorise à travers V^*M identifié par s_0 à $(q, A, 0, \pi)$. La liaison est hamiltonienne linéaire et comme $\mathcal{H} = (Q, A, q, 0), (\tau_i|_{\mathcal{H}})$ forment une base de \mathcal{H}_0 . (C) est donc vérifiée.

Le produit scalaire (restreint à \mathcal{H}_0) est à coefficients constants; la proposition (5.1) entraîne que

$$D_Y = X_{H_0} - Y_V - Z$$

ou $H_0 = \frac{1}{2}|\pi|^2/I + mgq^3, Z = 0$ car $\tilde{Z} = (0, 0, -mge_3, 0)$ puisque $\mathcal{V}^\sigma = \{(0, 0, X, aX \wedge e_3)\}$.

Finalement

$$D_Y(q, A, \pi) = \left(-\frac{a}{I}\pi \wedge e_3, \frac{\pi}{I}, 0 \right).$$

Il en résulte que π et \dot{q} sont constants. Le mouvement est rectiligne uniforme, la rotation de la bille étant constante.

Remarque. Que $v = 0$ ou non, la présence de frottements fait que la liaison n'est pas parfaite. On a obtenu les équations comme conséquence du principe de d'Alembert général: on n'a pas pu a priori restreindre l'espace de configuration à $\mathbf{R}^2 \times S^0(3)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. ARNOLD, *Dynamical systems III*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] H. BEGHIN, *Cours de mécanique théorique et appliquée*, Gauthier-Villars, Paris 1951.
- [3] P. DAZORD, *Groupoïdes symplectiques et troisième de Lie non linéaire in géométrie symplectique et mécanique*, Actes du Séminaires Sud-Rhodanien (C. Albert ed.), Lecture Notes in Math. No. 1416, Springer-Verlag, New York, pp. 39–74.
- [4] _____, *Sur la géométrie des asservissements*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, 1991, pp. 523–527.
- [5] P. DAZORD, J.H. LU, D. SONDAZ and A. WEINSTEIN, *Affinoïdes de Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 312, série I, 1991, pp. 523–527.
- [6] C. EHRESMANN, *Oeuvres complètes*.
- [7] J.L. LAGRANGE, *Mécanique analytique*, 4^o édition, G. Darboux, Gauthier-Villars, 1888.
- [8] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Dunod,
- [9] _____, *Variétés de Poisson et feuilletages*, Ann. Fac. Sci. Toulouse, IV (1982), 195–262.
- [10] C.M. MARLE, *Sur la géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, 1990, pp. 839–8456.
- [11] _____, *Géométrie des systèmes mécaniques à liaisons actives*. A paraître, Actes du Colloque Géométrie Symplectique et Physique Mathématique, Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie Aix-en-Provence, juin 1990, pp. 11–15.
- [12] J. MARSDEN, R. MONTGOMERY and T. RATUI., *Reduction symmetry and Berry's phase in mechanics*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 436, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1990.
- [13] J. PERES, *Mécanique*, Masson, Paris, 1951.
- [14] A. WEINSTEIN, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geometry **18** (1983), 523–557.
- [15] _____, *Affine Poisson structures*. Internat. J. Math. **1** (1990), 343–360.

URA CNRS 746

LABORATOIRE DE GÉOMETRIQUE ANALYSE
UNIVERSITÉ C. BERNARD—LYON I
69622 VILLEURBANNE, FRANCE

