ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 40, Number 1, Spring 1996

APPLICATIONS HARMONIQUES FEUILLETÉES

AZIZ EL KACIMI ALAOUI AND EDUARDO GALLEGO GÓMEZ[1]

1. Introduction

Le but de cette note est l'étude des applications harmoniques entre varietés feuilletées (voir 2). Pour que la notion d'harmonicité ait un sens il nous faudra considérer des feuilletages riemanniens. On commence donc par rappeler la définition et la structure de ce type de feuilletages.

Soient $\chi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M et $\Gamma(\mathcal{F})$ la sous-algèbre de Lie de $\chi(M)$ formée des champs tangents à $\mathcal{F}$. On dira qu'un champ $Y \in \chi(M)$ est *feuilleté* si pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{F})$, le crochet $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{F})$. On notera $\chi(M, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs feuilletés; $\Gamma(\mathcal{F})$ en est un idéal. Le quotient $\chi(M/\mathcal{F}) = \chi(M, \mathcal{F})/\Gamma(\mathcal{F})$ est appelé *algèbre des champs basiques* de $\mathcal{F}$; c'est un A_b-module où A_b est l'algèbre des *fonctions basiques* i.e constantes sur les feuilles de $\mathcal{F}$. On dira que $\mathcal{F}$ est *transversalement parallélisable* si $\chi(M/\mathcal{F})$ est libre de rang égal à $\mathrm{cod}(\mathcal{F}) = n$. Ceci signifie qu'il existe sur M n champs feuilletés $Y_1, \dots Y_n$, transverses à $\mathcal{F}$ et linéairement indépendants en chaque point; on dira que $(Y_1, \dots, Y_n)$ est un *parallélisme transverse.* Dans ces conditions, le fibré normal $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ supporte une métrique riemannienne invariante le long des feuilles: il suffit de la définir sur la fibre en un point et la transporter dans toute la variété par le parallélisme transverse. De manière générale, $\mathcal{F}$ est dit *riemannien* s'il existe une métrique riemannienne h sur M telle que $\mathcal{L}_X \gamma = 0$ pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathcal{F}$ où γ désigne la métrique induite par h sur $\nu\mathcal{F}$; on dira que la métrique h est *bundle-like* ou *quasi-fibrée.*

La structure d'un tel feuilletage est décrite par le théorème qui suit.

Théorème (Molino [M]). Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage riemannien complet (i.e., $\mathcal{F}$ admet métrique bundle-like complète) transversalement orientable, de codimension q et p: $M^\# \longrightarrow M$ le $SO(q)$-fibré principal des repères othonormés directs transverses à $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ se relève en un feuilletage transversalement parallélisable $\mathcal{F}^\#$ sur $M^\#$ tel que:

(i) $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^\#$,

Received February 2, 1994.
1991 Mathematics Subject Classification. Primary 58E20, Secondary 53C12.

[1] Pendant l'élaboration de ce travail, le second auteur a profité de l'hospitalité de l'URA au CNRS 751 GAT à L'Université de Lille I. Il remercie tous ses membres pour l'accueil chaleureux qu'ils lui ont réservé. Ce travail a été partiellement financé par la DGYCIT, proyecto PB90-686.

(ii) $\mathcal{F}^{\#}$ est invariant par l'action de $SO(q)$,
(iii) les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}^{\#}$ sont les fibres d'un fibré localement trivial $\pi\colon M^{\#} \longrightarrow W$.

Sur $M^{\#}$ il existe une métrique *bundle-like* invariante par $SO(q)$ relativement à $\mathcal{F}^{\#}$ et qui se projette sur W en une métrique complète. L'action de $SO(q)$ sur $M^{\#}$ induit une action par isométries sur W (l'espace des orbites $W/SO(q)$ de cette action s'identifie à l'espace des adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ sur M). En plus les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{\#}$ sont des sous-variétés de M et de $M^{\#}$ respectivement et la projection par p d'une adhérence de feuille de $\mathcal{F}^{\#}$ est une adhérence de feuille de $\mathcal{F}$. On note que quand les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ ont même dimension l'espace quotient $W/SO(q)$ a une structure de variété de Satak é.

Maintenant on va rappeler quelques résultats classiques sur la théorie des applications harmoniques. Pour une étude plus détaillée le lecteur peut consulter [E-L]. Une application entre variétés riemanniennes est *harmonique* si la divergence de sa différentielle est nulle. De telles applications sont des *extrêmales* d'une fonctionnelle appelée la *fonctionnelle d'énergie*.

Soit $\varphi\colon M \to N$ une application différentiable où M et N sont des variétés de dimensions respectives m et n. La *densité d'énergie* de φ en x est définie par

$$\mathrm{e}(\varphi)(x) = \frac{1}{2}\,\text{trace}\,(\varphi^* h) = \frac{1}{2}\,|d\varphi(x)|^2$$

où $|\cdot|$ est la norme sur $T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N = \mathrm{Hom}(T_xM, T_{\varphi(x)}N)$. On observe que $\mathrm{e}(\varphi) \equiv 0$ sur un ouvert quelconque de M si et seulement si φ est constante sur cet ouvert. Si $M' \subset M$ est un domaine compact de M, l'*énergie* de φ sur M' est

$$E(\varphi, M') = \int_{M'} \mathrm{e}(\varphi)\,dx$$

où dx est l'élément de volume canonique sur M'. Si ∇ est la connexion sur $T^*M \otimes \varphi^{-1}TN$ induite par les connexions riemanniennes sur M et N, le *champ de tension* de φ est par définition $\tau(\varphi) = \mathrm{trace}(\nabla d\varphi) = \mathrm{div}(d\varphi)$. Une application $\varphi\colon M \to N$ est *harmonique* si et seulement si $\tau(\varphi) \equiv 0$. Une application $\varphi\colon M \to N$ est un *point critique* (ou *extrêmale*) de l'énergie si $\left.\frac{dE(\varphi_t)}{dt}\right|_{t=0} = 0$, pour n'importe quelle variation $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de $\varphi = \varphi_0$.

Le résultat suivant relie la notion de point critique de l'énergie à celle d'application harmonique (cf. [E-S]): une application φ est un point critique de E si et seulement si φ est harmonique. Alors $\tau(\varphi) = 0$ est l'equation d'Euler–Lagrange de la fonctionelle de l'énergie.

Le problème fondamental de la théorie des applications harmoniques se formule de la façon suivante:

> *Soit φ_0: $M \to N$ une application entre deux variétés riemanniennes. Quand peut-on déformer φ_0 en une application harmonique φ? Autrement dit, quand existe-t-il un représentant harmonique dans la classe d'homotopie de φ_0 des applications de M dans N?*

Ce problème est difficile; il n'a été résolu que dans certaines situations particulières. En plus, les techniques utilisées diffèrent d'un cas à l'autre en fonction des restrictions imposées à M et N.

Supposons que M et N sont compactes et sans bord. Quelques solutions au problème posé sont par exemple les suivantes:

(1) Quand $\dim M = 1$, M est nécessairement le cercle $\mathbb{S}^1$; dans ce cas toute classe d'homotopie d'une application $\mathbb{S}^1 \longrightarrow N$ contient une géodésique fermée.
(2) La solution dans le cas $\dim N = 1$ résulte du théorème de décomposition de Hodge: toute classe d'homotopie de M dans $\mathbb{S}^1$ peut être représentée par une 1-forme harmonique à périodes entières.

Une solution partielle au problème et qui va nous interesser dans la suite est celle obtenue par Eells–Sampson (cf. [E-S]): *quand M et N sont des variétés compactes et la courbure sectionnelle de N est non positive, il y a toujours des représentants harmoniques dans chaque classe d'homotopie d'applications de M dans N.*

Nous utiliserons aussi le théorème d'unicité dû à Hartman (cf. [H]): *Soit φ: $M \longrightarrow N$ une application harmonique non constante avec M une variété compacte et supposons qu'en tous les points de $\varphi(M)$ la courbure sectionnelle est non positive et qu'elle est strictement négative en au moins un point de $\varphi(M)$. Alors φ est unique dans sa classe d'homotopie sauf si $\varphi(M)$ est une géodésique fermée de N; dans ce cas toute autre application harmonique s'obtient en composant φ par une rotation de cette géodésique.*

2. Applications harmoniques feuilletées

Maintenant la notion d'harmonicité sera entendue au sens transverse aux feuilletages et les applications considérées seront feuilletées, i.e. envoient feuille dans feuille. Nous travaillerons sur des variétés munies de feuilletages riemanniens qu'on supposera en plus transversalement orientables (quitte à passer à un revêtement adéquat).

Si la variété d'arrivée N est feuilletée par points, se donner une application φ : $M \to N$ qui préserve les feuilletages revient à se donner une application préservant les feuilletages $\varphi^\#$: $M^\# \longrightarrow N$ et invariante par l'action de $SO(q)$. Dans ce cas, comme

N est feuilletée par points, $\varphi^{\#}$ induit une application $\overline{\varphi}$: $W \longrightarrow N$ qui est aussi $SO(q)$-invariante.

Définition 1. Nous dirons que φ: $M \to N$ est *transversalement harmonique* si et seulement si $\overline{\varphi}$: $W \to N$ est une extrêmale de l'énergie sur W pour toutes les variations $SO(q)$-invariantes:

$$E(\overline{\varphi}) = \frac{1}{2}\int_W \|d\overline{\varphi}\|^2\, dw.$$

On remarque que grâce à la décomposition de Hodge du complexe de de Rham basique d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ sur une variété compacte M (cf. [K-T] et [E-H]) nous avons:

(1) Les fonctions basiques harmoniques φ: $M \longrightarrow \mathbb{R}$ sont les constantes.

(2) Toute application feuilletée φ: $M \longrightarrow \mathbb{S}^1$ est homotope à une application harmonique feuilletée. En effet la 1-forme $\varphi^*(d\theta)$ définit un élément de $H^1(M/\mathcal{F})$, premier espace de cohomologie basique de $(M, \mathcal{F})$. Considérons un représentant harmonique ω dans la classe de $\varphi^*(d\theta)$, si x est un point donné de M et γ_x un lacet basé en un point fixé x_0 alors

$$\begin{aligned} \varphi\colon M &\longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto \int_{\gamma_x} \omega \end{aligned}$$

definit une application harmonique feuilletée de M dans $\mathbb{S}^1$.

Avant de poursuivre l'étude quand N est feuilletée par points nous allons donner une définition d'application harmonique transverse valable pour n'importe quel feuilletage riemannien sur N et qui coincide avec celle que nous venons de donner.

Soit $\nu\mathcal{H}$ le fibré normal au feuilletage $\mathcal{H}$ sur N et notons ι: $TN \longrightarrow \nu\mathcal{H}$ la projection naturelle. Nous avons

$$d_T\varphi \cdot v = \iota \circ d\varphi \cdot v.$$

En chaque point $x \in M$, $d_T\varphi(x) \in T_x^*M \otimes \nu_{\varphi(x)}\mathcal{H}$ et donc $d_T\varphi$ est une section du fibré $T^*M \otimes \varphi^{-1}\nu\mathcal{H}$. Sur $\nu\mathcal{H}$ on a la métrique invariante le long des feuilles induite par la métrique *bundle-like* sur N. La densité d'énergie transverse sera alors

$$e_T(\varphi)(x) = \frac{1}{2}|d_T\varphi(x)|^2.$$

Puisque les feuilletages considérés sont riemanniens, la fonction $e_T(\varphi)$: $M \to \mathbb{R}$ est basique (i.e., constante sur les feuilles) et par suite constante sur les adhérences des feuilles. Elle se relève donc en une fonction $SO(q)$-invariante sur $M^{\#}$ qui induit à son tour une fonction $\overline{e}_T(\varphi)$, $SO(q)$-invariante sur W. Ceci nous permet de donner la définition suivante.

Définition 2. *L'énergie transverse* de l'application feuilletée φ: $M \longrightarrow N$ sera par définition

$$E_T(\varphi) = \int_W \overline{e}_T(\varphi)\, dw$$

où dw est l'élément de volume associé à la métrique sur W induite par la métrique sur $M^\#$.

Définition 3. On dira que φ: $M \to N$ *est transversalement harmonique* si φ est une extrêmale de l'énergie de E_T pour toute variation feuilletée.

Il est clair que si les feuilletages sur M et N sont des produits, φ est harmonique si et seulement si l'application entre les bases est harmonique.

Proposition 4. Quand N est feuilletée par points les définitions 1 et 3 sont équivalentes.

Démonstration. Soit y un point de la variété basique W et $\overline{F}^\#$ une feuille de $\overline{\mathcal{F}}^\#$ telle que $\pi(\overline{F}^\#) = y$. Si $x \in p(\overline{F}^\#)$ alors par définition $\overline{e}_T(\varphi)(y) = e_T(\varphi)(x)$. D'autre part

$$e(\overline{\varphi}) = \frac{1}{2}\mathrm{trace}_{g_W}(\overline{\varphi}^* h).$$

Un calcul en coordonnées locales montre que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{trace}_{g_W}(\overline{\varphi}^* h) &= \frac{1}{2}\mathrm{trace}_{g_{M^\#}}(\pi^* \overline{\varphi}^* h) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{trace}_{g_{M^\#}}(p^* \varphi^* h) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{trace}_{g_M}(\varphi^* h).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

3. Applications harmoniques G-invariantes

La première étape pour étudier l'existence d'applications harmoniques feuilletées consiste en l'étude des applications harmoniques invariantes par l'action d'un groupe d'isométries.

Soit G un groupe de Lie connexe agissant sur M. On dira qu'une application φ: $M \longrightarrow N$ est *G-invariante* si pour tout $g \in G$ on a $\varphi \circ g = \varphi$ où g est vu comme difféomorphisme de M. Nous nous intéresserons aux applications harmoniques G-invariantes lorsque G agit par isométries et N est astreinte à vérifier certaines conditions de courbure. Plus précisément nous avons le résultat suivant:

Théorème 5. Soit $\varphi\colon M \longrightarrow N$ une application G-invariante avec M et N compactes. Supposons G connexe, qu'il ne contient pas de sous-groupe distingué de codimension 1 et que la courbure sectionnelle de N est strictement négative en chaque point de N. Alors il existe un unique représentant harmonique G-invariant dans la classe d'homotopie de φ.

Démonstration. La condition de courbure sur N permet de montrer que la limite φ_∞ des solutions de l'équation

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \tau(\varphi_t)$$

avec condition initiale $\varphi_0 = \varphi$ existe (cf. [E-S]) et qu'elle est harmonique. Montrons qu'elle est G-invariante; deux cas peuvent se présenter.

(a) Si $\varphi_\infty(M)$ n'est pas une géodésique fermée de N, φ_∞ est unique dans sa classe d'homotopie et G-invariante. En effet, comme l'action de G sur M est isométrique, la composée $\varphi_\infty \circ g$ de φ_∞ par tout $g \in G$ est harmonique. D'autre part $\varphi_\infty \circ g$ est homotope à φ, donc à φ_∞. Par unicité on a $\varphi_\infty \circ g = \varphi_\infty$, i.e., φ_∞ est G-invariante.

(b) Supposons maintenant que $\varphi_\infty(M)$ est une géodésique fermée. Dans cette situation chaque point $x \in M$ a un voisinage ouvert U de façon que $\varphi_\infty(U)$ soit un intervalle ouvert de geodésique. Alors on peut ecrire

$$\varphi_\infty(x) = \gamma(s(x))$$

où $s\colon M \to \mathbb{S}^1$ est une application différentiable et $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow N$ est une géodésique fermée paramétrée linéairement. Alors pour tout $g \in G$ il existe une rotation R_g du cercle $\mathbb{S}^1$ telle que

$$(\varphi_\infty \circ g)(x) = \gamma(s(x) + R_g).$$

L'application $R\colon g \in G \to R_g \in \mathbb{S}^1$ est un morphisme de groupes. En effet, en identifiant φ_∞ et s on peut écrire

$$s \circ g = R_g + s.$$

Par suite

$$\begin{aligned}(s \circ gg')(x) &= R_{gg'} + s(x)\\ &= R_g + s(g'(x))\\ &= R_g + R_{g'} + s(x)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$R_{gg'} = R_g + R_{g'}.$$

Comme G n'a pas de sous-groupe distingué de codimension 1, le seul morphisme possible entre G et $\mathbb{S}^1$ est le morphisme trivial. Ce qui implique que φ_∞ est G-invariante. $\square$

D'après le théorème de Hartman, il est clair que les applications harmoniques qu'on vient de donner sont les seules possibles.

4. Application au cas feuilleté

Maintenant on est en mesure de donner et de démontrer un théorème général sur l'existence d'applications harmoniques feuilletées. Il sera conséquence directe du théorème 5 qu'on vient de prouver appliqué au cas particulier des feuilletages reimanniens.

Théorème 6. Soient M une variété compacte, $\mathcal{F}$ un feuilletage riemannien de codimension plus grande que 2, transversalement orientable et N une variété compacte orientable munie du feuilletage par points. Si φ: $M \longrightarrow N$ est une application feuilletée et si la courbure sectionnelle de N est strictement négative en tout point, alors il existe une application harmonique feuilletée homotope à φ.

Démonstration. On a vu que dans le cas consideré se donner l'application feuilletée φ revient à se donner une application $\overline{\varphi}$: $W \to N$ $SO(q)$-invariante. Il faut donc et il suffit de trouver une application homotope a $\overline{\varphi}$ et $SO(q)$-invariante. Mais ceci est précisément l'enoncé du théorème précédent. □

Remarques. (1) Le résultat que nous venons d'établir récupère de façon plus simple presque tous les résultats de [Ch] où il est démontré que dans la classe d'homotopie d'une application d'une variété riemannienne de Satakė dans une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative il existe un représentant harmonique. Observons que notre résultat est plus général puisque $W/SO(q)$ n'est de Satakė que si l'action de $SO(q)$ sur W est localement libre; ce que nous ne supposons nullement.

(2) D'un autre côté notons que le théorème obtenu dans [Ch] appliqué au cas de la codimension 2 nous permet d'affirmer l'existence d'applications harmoniques dans cette situation; le cas de la codimension 1 est trivial.

(3) Dans certains cas particuliers, on peut affirmer l'existence d'applications harmoniques transverses sans recourir à l'hypothèse de stricte négativité de la courbure sur N. Ceci est le cas par exemple quand les adhérences des feuilles de $\mathcal{F}$ ont la même dimension (et forment ainsi un feuilletage régulier $\overline{\mathcal{F}}$) et l'espace des feuilles de $\overline{\mathcal{F}}$ est une vraie variété différentiable. Les feuilletages transversalement parallélisables rentrent dans cette situation.

REFERENCES

[Ch] YUAN-JEN CHIANG, *Harmonic maps on V-manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **8** (1990), pp. 315–344.

[E-S] J. EELLS and J. H. SAMPSON, *Harmonic mappings on riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** 1964, 109–160.

[EK] A. El Kacimi Alaoui, *Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications*, Compositio Mathematica **73** 990, 57–106.

[E-H] A. El Kacimi Alaoui and G. Hector, *Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **36** 1986, 207–227.

[E-L] J. Eells and L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.

[H] P. Hartman, *On homotopic harmonic maps*, Canad. J. Math. **19** 1967, 673–687.

[K-T] F. Kamber and P. Tondeur, *Duality for riemannian foliations*, Proc. Sympos. Pure Math. **40** (1982).

[M] P. Molino, *Géométrie globale des feuilletages riemanniens*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Ser A1 **85** 1982, 45–76.

Université de Valendiennes
Valenciennes, France

Universitat Autónoma de Barcelona
Bellaterra, Spain