

VALEURS PRISES PAR LES MARTINGALES LOCALES CONTINUES A UN INSTANT DONNE

BY M. EMERY, C. STRICKER AND J. A. YAN¹

Université Louis Pasteur, Université de Besançon and Academia Sinica

By extending ideas and methods of Dudley (1977) (who was dealing with the Brownian case), we prove that a necessary and sufficient condition for all martingales of a given filtration (\mathcal{F}_t) to be continuous, is that, for every stopping time T and every \mathcal{F}_T -measurable random variable X , there exists a continuous local martingale M with $M_T = X$ a.s.

Moreover, M can be chosen such that $M_0 = 0$ on a reasonably large event (equal to $\{T > 0\}$ in the Brownian case); if there exists a Brownian motion B adapted to (\mathcal{F}_t) , M can be chosen as a stochastic integral of some (\mathcal{F}_t) -predictable process with respect to B (even when (\mathcal{F}_t) is larger than the natural filtration of B).

Introduction. Dans un article remarquable d'ingéniosité et de concision, Dudley (1977) a établi le joli résultat suivant, relatif à la filtration naturelle (\mathcal{F}_t) d'un mouvement brownien réel nul en 0 (B_t): Pour tout $t > 0$, et toute variable aléatoire \mathcal{F}_t -mesurable X , il existe un processus prévisible H , défini sur $[0, t]$, intégrable par rapport à B au sens des martingales locales (i.e. $\int_0^t H_s^2 ds < \infty$ p.s.) et tel que $\int_0^t H_s dB_s = X$. L'idée maîtresse est la "martingale" bien connue du public consistant à doubler la mise jusqu'à obtenir la valeur désirée.

En utilisant essentiellement les mêmes méthodes, mais dans le cadre de la théorie générale des processus, nous étendons son énoncé à des filtrations plus générales et au cas où un temps d'arrêt remplace t . Il apparaît, curieusement, que le théorème de Dudley n'a finalement aucun lien avec la propriété de représentation prévisible de la filtration brownienne, qui s'exprime pourtant de façon si semblable. Le résultat principal est le suivant: Dans une filtration (\mathcal{F}_t) où toutes les martingales sont continues, si T est un temps d'arrêt et X une v.a. \mathcal{F}_T -mesurable, il existe une martingale locale M telle que $M_T = X$ et nulle en 0 sur $\{S > 0\}$ (où S est le "plus petit" temps d'arrêt tel que $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$); en outre, si L est une martingale locale qui n'est constante sur aucun intervalle $]S(\omega) - \varepsilon(\omega), S(\omega)[$ (de telles L existent toujours), on peut prendre M de la forme $\int H_s dL_s$, où H est un processus prévisible L -intégrable. On a ainsi quand $S > 0$ p.s. une sorte de propriété de représentation prévisible de $L^0(\mathcal{F}_T)$ par rapport à L , bien que L ne possède pas en général la propriété de représentation prévisible usuelle et que la filtration (\mathcal{F}_t) puisse être beaucoup plus grosse que la filtration naturelle de L . Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les martingales de (\mathcal{F}_t) soient continues: c'est que, pour tout temps d'arrêt T , chaque variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable soit la valeur à l'instant T d'une martingale locale continue.

Notations. Dans toute la suite, (Ω, \mathcal{F}, P) est un espace probabilisé complet, pourvu d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ qui vérifie les "conditions habituelles" de Dellacherie-Meyer (1975): Chaque tribu \mathcal{F}_t contient tous les événements négligeables de \mathcal{F} et l'on a $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Les égalités entre variables (respectivement processus) aléatoires ont lieu à un ensemble négligeable (respectivement évanescant) près. Nous adoptons les notations de Dellacherie-Meyer (1975 et 1980); en particulier, les processus croissants sont non-négatifs et adaptés,

Received September 1982.

¹ Le troisième auteur a bénéficié d'une subvention de l'Alexander von Humboldt-Stiftung durant son séjour à Heidelberg (République Fédérale d'Allemagne).

AMS 1980 subject classification. Primary, 60G44; 60H05; secondary, 60G07.

Key words and phrases. Local martingales, stopping times, predictable representation property, stochastic integrals.

et, de même que toutes les martingales ou martingales locales, ont toutes leurs trajectoires continues à droite avec limites à gauche. On désigne par \mathcal{T} l'ensemble de tous les temps d'arrêt (finis ou non), par \mathcal{M}_c^2 l'espace des martingales continues de carré intégrable. La notation $H \cdot M$ désigne le processus $t \mapsto \int_0^t H_s dM_s$.

Lemmes préliminaires. Pris ensemble, les deux lemmes de théorie générale des processus qui suivent expriment le fait que, si T est un temps d'arrêt prévisible > 0 , l'existence d'une martingale locale continue définie sur $[0, T[$ et explosant à l'instant T équivaut à l'existence d'une martingale de \mathcal{M}_c^2 qui n'est constante sur aucun intervalle aléatoire $]T - \varepsilon, T[$.

LEMME 1. *Soient S un temps d'arrêt et T un temps prévisible tels que $0 \leq S < T \leq \infty$. Il existe alors un processus croissant continu A , à valeurs dans $[0, \infty]$, strictement croissant sur $]S, T[$ et vérifiant $A_S = 0, A_T = \infty$.*

Lorsque $S = 0$, la démonstration se trouve dans Emery (1980); le cas général s'en déduit aisément en utilisant la filtration $(\mathcal{F}_{S+t})_{t \geq 0}$.

Ce lemme signifie que l'intervalle $]S, T[$ est isomorphe à $[0, \infty[$ par le changement de temps $(\omega, t) \rightarrow (\omega, A_t(\omega))$; cet isomorphisme nous permettra d'appliquer à $]S, T[$ des résultats démontrés sur $[0, \infty[$ tout entier, par exemple le lemme suivant.

LEMME 2. *Soit A un processus croissant tel que, pour t fini, $A_t < A_\infty = \sup_s A_s$. Il existe alors un processus croissant H continu, nul en 0, et tel que $\int_0^\infty H_s dA_s = \infty$.*

DÉMONSTRATION (adaptée d'une idée de W. A. Zheng). On définit trois suites de temps d'arrêt par:

$$T_0 = 0, \quad T'_n = T_n + 1, \quad T''_n = T_n + 2,$$

$$T_{n+1} = \inf\{t \geq T''_n : A_t > A_{T''_n}\}.$$

Les T_n tendent vers l'infini car $T_{n+1} - T_n \geq 2$; ils sont finis en vertu de l'hypothèse faite sur A . Par définition de T_{n+1} , on a $A_{T''_n} < A_{T'_{n+1}}$, de sorte qu'il existe $\delta_n > 0$ tel que

$$P[A_{T'_{n+1}} - A_{T''_n} < \delta_n] < 2^{-n},$$

quitte à remplacer la suite $(\delta_n)_{n \geq 0}$ par une suite plus petite, on peut la supposer décroissante.

Voici maintenant comment construire H : il est nul sur $[0, 1]$, vaut $1/\delta_n$ sur l'intervalle $[T''_n, T'_{n+1}]$, et est obtenu par interpolation linéaire sur l'intervalle de longueur 1 $[T'_n, T''_n]$. Autrement dit, avec la convention $\delta_{-1} = \infty$,

$$\frac{dH_t}{dt} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{\delta_n} - \frac{1}{\delta_{n-1}} \right) I_{]T'_n, T''_n]}(t).$$

Le lemme de Borel-Cantelli entraîne que, pour une infinité d'indices $n, A_{T'_{n+1}} - A_{T''_n} \geq \delta_n$, et donc

$$\int_{T''_n}^{T'_{n+1}} H_s dA_s = \frac{1}{\delta_n} (A_{T'_{n+1}} - A_{T''_n}) \geq 1.$$

Ceci implique que $\int_0^\infty H_s dA_s = \infty$. \square

REMARQUE. Si A est un processus croissant continu et T un temps d'arrêt tels que, pour tout temps d'arrêt $S \leq T$ vérifiant $P[S < T] > 0$, on ait $P[A_S < A_T] > 0$, on n'a pas nécessairement $A_T > A_{T-\varepsilon}$ p.s. pour tout $\varepsilon > 0$. Un contre-exemple est obtenu en prenant pour A le temps local en 0 d'un mouvement brownien et pour T un temps constant.

Comme nous l'avons dit plus haut, ces deux lemmes serviront à exploiter l'idée de

Dudley consistant à remplacer une martingale qui n'est constante sur aucun intervalle $]T - \epsilon, T[$ par une martingale locale qui explose à l'instant T .

DÉFINITION. *Etant donné un temps d'arrêt $T \leq \infty$, on désignera par $C(T)$ l'ensemble des martingales $M \in \mathcal{M}_c^2$ telles que $t < T \Rightarrow \langle M, M \rangle_t < \langle M, M \rangle_T$. En d'autres mots, T est un temps de croissance à gauche pour $\langle M, M \rangle$, ou encore M n'est constante sur aucun voisinage gauche de T ; cette condition est vide sur $\{T = 0\}$. Si $C(T) \neq \emptyset$, nous dirons que T est un temps de mobilité de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Il suffit pour cela qu'il existe une martingale locale continue M (même définie seulement sur $[0, T[$) telle que T soit un temps de croissance à gauche pour $\langle M, M \rangle$, car alors*

$$N_t = \int_0^t (1 + \langle M, M \rangle_s)^{-1} dM_s$$

est dans $C(T)$. Que, pour des raisons techniques, nous exigeons que les martingales de $C(T)$ soient de carré intégrable, ne change donc pas les temps de mobilité.

Lorsque la filtration contient un mouvement brownien, ou, plus généralement, une martingale locale continue sans intervalles de constance, tout temps d'arrêt est un temps de mobilité. Bien que probablement sans intérêt, la réciproque est vraie (appliquer le a) du lemme qui suit à une suite dense de temps constants): Si tout temps constant est un temps de mobilité, il existe une martingale continue sans intervalles de constance.

LEMME 3. a) *L'ensemble des temps de mobilité est stable par "sup" fini ou dénombrable. Toute suite (T_n) de temps de mobilité vérifie $\bigcap_n C(T_n) \neq \emptyset$.*

b) *Si T est un temps de mobilité prévisible, et si $L \in C(T)$, T est annoncé par une suite (T_n) de temps de mobilité prévisibles vérifiant pour chaque n $L \in C(T_n)$.*

DÉMONSTRATION. a) Soit (T_n) une suite (finie ou non) de temps de mobilité, et soient $M^n \in C(T_n)$. Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt fournit une suite (N^n) dans \mathcal{M}_c^2 telle que

(i) chaque N^n est orthogonale au sous-espace stable engendré par $\{N^k, k < n\}$.

(ii) $M^n = \sum_{k \leq n} H^{n,k} \cdot N^k$, où les $H^{n,k}$ sont des processus prévisibles tels que $(\int_0^\infty (H_s^{n,k})^2 d\langle N^k, N^k \rangle_s)^{1/2} \in L^1$.

Soient (c_n) une suite de réels > 0 tels que $\sum_n c_n \|N^n\|_{\mathcal{M}_c^2} < \infty$ et $L = \sum_n c_n N^n \in \mathcal{M}_c^2$. Puisque

$$\begin{cases} \langle M^n, M^n \rangle = \sum_{k \leq n} (H^{n,k})^2 \cdot \langle N^k, N^k \rangle \\ \langle L, L \rangle = \sum_n c_n^2 \langle N^n, N^n \rangle, \end{cases}$$

si la fonction croissante $\langle L, L \rangle$ est constante sur un intervalle $]t - \epsilon, t[$, il en va de même de chaque $\langle N^n, N^n \rangle$ et donc de chaque $\langle M^n, M^n \rangle$. Donc $L \in C(T_n)$ pour tout n , ce qui entraîne que, comme chaque T_n , $\sup_n T_n$ est un temps de croissance à gauche pour $\langle L, L \rangle$, donc un temps de mobilité.

b) Si T est un temps de mobilité prévisible, et si $L \in C(T)$, soit $A = \langle L, L \rangle$. On sait que T est un instant de croissance à gauche pour A , et il s'agit de trouver des temps T_n annonçant T qui soient aussi des temps de croissance à gauche pour A . Sur $\{T = 0\}$, il n'y a pas de problème; on peut donc supposer, par conditionnement, que $T > 0$; puis, par changement de temps (Lemme 1), que $T = \infty$. Le Lemme 2 entraîne l'existence d'un processus croissant prévisible H tel que $H \cdot A_\infty = \infty$. Il suffit maintenant de construire la suite

$$T_n = \inf\{t: H \cdot A_t = n\}.$$

Chaque T_n est fini car $H \cdot A_\infty = \infty$, prévisible car $H \cdot A$ l'est, T_n annonce $T = \infty$, et A ne peut être constant sur un voisinage gauche de T_n car $H \cdot A$ ne l'est pas.

Résultats Généraux.

PROPOSITION 1. Soit T un temps d'arrêt. Posons $S = \text{ess inf}\{U \in \mathcal{T}, \mathcal{F}_U = \mathcal{F}_T\}$ et $R = \text{ess sup}\{U \in \mathcal{T}, U \leq T \text{ et } C(U) \neq \emptyset\}$.

a) R est un temps de mobilité, et l'on a $R \leq S \leq T$, $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$. En particulier, si T est un temps de mobilité, $R = S = T$.

b) Si T est un temps de mobilité prévisible, soit L une martingale de $C(T)$. Toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable X s'écrit sous la forme

$$XI_{\{T=0\}} + \int_{[0, T]} H_s dL_s$$

où H est un processus prévisible, défini sur $[0, T]$, tel que $\int_0^T H_s^2 d\langle L, L \rangle_s < \infty$ p.s.

Remarques et Conséquences. a) Dans le b), on peut remplacer la martingale L de $C(T)$ par n'importe quelle martingale locale continue telle que $\langle L, L \rangle$ admette T pour point de croissance à gauche.

En effet, on peut alors se ramener à la proposition en remplaçant la martingale locale L par la martingale de carré intégrable $(1 + \langle L, L \rangle)^{-1} \cdot L$.

b) Si la filtration contient une martingale locale continue N sans intervalle de constance, par exemple un mouvement brownien, le point b) s'applique à tous les temps prévisibles (qui sont automatiquement de mobilité) avec $L = N$. On retrouve ainsi le résultat de Dudley.

c) En appliquant la Proposition 1.b à S au lieu de T , on obtient le critère suivant: Si $S = R$, si S est prévisible, et si $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-}$, alors toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable est la valeur à l'instant T d'une martingale locale continue, que l'on peut choisir nulle en 0 sur $\{S > 0\}$. Contrairement à ce que nous affirmions dans une version antérieure, la réciproque est fautive: il se peut que cette conclusion reste vraie avec S prévisible et $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-}$ même si S n'est pas un temps de mobilité (nous remercions He Shengwu qui nous a signalé cette erreur). Voici un contre-exemple. Un processus est nul en 0, et reste nul pendant une durée exponentielle, puis il diffuse comme un mouvement brownien. Dans la filtration naturelle de ce processus, les temps constants ne sont pas des temps de mobilité, et cependant toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable est la valeur à l'instant t d'une martingale locale continue.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1. a) D'après le lemme 3.a, l'ensemble des temps de mobilité est stable par sup fini ou dénombrable.

Il en résulte que R , supremum essentiel d'une famille de temps de mobilité, est aussi un temps de mobilité. Montrons maintenant que $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$. D'abord, $S \leq T$ entraîne $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Dans l'autre sens, soit (U_n) une suite de temps d'arrêt vérifiant $\inf_n U_n = S$, $\mathcal{F}_{U_n} = \mathcal{F}_T$. Pour $A \in \mathcal{F}_T$, la martingale $M_t = P[A | \mathcal{F}_t]$ vérifie $M_{U_n} = M_T = I_A$, donc, par continuité à droite, $M_S = I_A$, ce qui montre que $A \in \mathcal{F}_S$; ainsi, $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$. Pour vérifier que $R \leq S$, soit $M \in C(R)$. Comme $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_T$, M et $\langle M, M \rangle$ sont constants sur $[S, T[$, donc $R \leq S$.

b) Soient donnés T, L , et X comme dans l'énoncé. Par conditionnement, on peut se ramener à étudier séparément le cas $T = 0$ et le cas $T > 0$. Le premier étant trivial, nous supposons $T > 0$ p.s. D'après le Lemme 3.b, T est annoncé par une suite (T_n) de temps prévisibles tels que $L \in \cap_n C(T_n)$. Puisque X est \mathcal{F}_T -mesurable, il existe une suite de variables aléatoires Z_n , respectivement \mathcal{F}_{T_n} -mesurables, qui converge en probabilité vers X (par exemple $Z_n = tg E[\text{Arctg} X | \mathcal{F}_{T_n}]$; la convergence est même presque sûre). Donc, quitte à remplacer la suite (T_n) par une sous-suite, on peut écrire $X = \sum_n Y_n$, où chaque Y_n est \mathcal{F}_{T_n} -mesurable et vérifie $P[|Y_n| \geq 2^{-n}] \leq 2^{-n}$. Posons $\bar{X} = \sum_n Y_n^+$, $\underline{X} = \sum_n Y_n^-$ (la convergence de ces séries est assurée par le lemme de Borel-Cantelli). Il suffit de faire la démonstration séparément pour \bar{X} et \underline{X} , et le résultat s'obtiendra par différence. Nous allons donc montrer que \bar{X} est de la forme $\int_0^T H_s dL_s$. Comme T_{n+1} est un temps de croissance à gauche pour $\langle L, L \rangle$, et comme, par le Lemme 1, l'intervalle $[T_n, T_{n+1}[$ est isomorphe à $[0, \infty[$, il existe, par le Lemme 2, un processus prévisible H^n , défini sur $[T_n, T_{n+1}[$, tel que $\int_{T_n}^{T_{n+1}} (H^n)^2 d\langle L,$

$L)_s$ diverge p.s. Le processus $H^n.L$, défini sur $[T_n, T_{n+1}[$, est une martingale locale nulle en T_n et qui explose à l'instant T_{n+1} . On sait que, lorsqu'une martingale locale continue explose, chaque trajectoire a pour adhérence toute la droite réelle; donc le temps d'arrêt

$$S_n = \inf\{t \geq T_n, H^n.L_t = Y_n^+\}$$

est bien défini et vérifie $T_n \leq S_n < T_{n+1}$. Soit M^n la martingale continue $I_{]T_n, S_n]}H^n.L$, définie sur $[0, \infty[$ et constante hors de $[T_n, S_n]$; elle vaut 0 avant T_n et Y_n^+ après S_n . Soit $M = \sum_n M^n$; ce processus est bien défini car pour $t < T(\omega)$ la série $\sum M_t^n(\omega)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls et, pour $t \geq T(\omega)$, $\sum_n M_t^n(\omega) = \sum_n Y_n^+(\omega) = \bar{X}(\omega)$. Le processus M^T est somme d'un nombre fini de martingales locales, donc c'est une martingale locale. Ceci montre que M est une martingale locale dans l'intervalle $[0, T[$. Mais, puisque $M^n \leq Y_n^+$, on a $M \leq \bar{X}$; ainsi la martingale locale M ne peut pas exploser à l'instant T (en cas d'explosion, on devrait avoir $\limsup_{t \rightarrow T, t < T} M_t = +\infty$). Donc $\langle M, M \rangle_T$ est p.s. fini, ce qui s'écrit $\int_0^T H_s^2 d\langle L, L \rangle_s < \infty$, avec $H = \sum_n H^n I_{]T_n, S_n]}$; la martingale locale $H.L$ est égale à M , d'où $\int_0^T H_s dL_s = M_T = \bar{X}$. \square

PROPOSITION 2. a) *Si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible et non identiquement infini, il existe une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable positive qui n'est la valeur à l'instant T d'aucune martingale locale.*

b) *Pour que toutes les martingales de la filtration (\mathcal{F}_t) soient continues, il faut et il suffit que, pour tout temps d'arrêt T , chaque variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable soit de la forme M_T , où M est une martingale locale continue.*

DÉMONSTRATION. a) La variable aléatoire dont nous allons montrer qu'elle n'est pas une valeur de martingale locale est $X = (1/B_T)I_{\{T < \infty\}}$, où le processus croissant B est la projection duale prévisible du processus croissant $A = I_{]T, \infty[}$. Comme T est totalement inaccessible, B est continu et nul en 0; le début D de $\{B > 0\}$ vérifie $0 = E[B_D] = E[A_D]$, donc $D < T$ sur $\{T < \infty\}$. Ceci montre que la variable X est finie.

Supposons que l'on ait $X = M_T$ pour une martingale locale M . Il existerait des temps d'arrêt S_n , partout finis et tendant vers l'infini, tels que $M_{S_n \wedge T} I_{\{S_n > 0\}}$ soit intégrable. Comme $T > 0$, $M_T I_{\{S_n \geq T\}}$ devrait aussi être intégrable. Pour montrer que X n'est pas de la forme M_T , il suffit donc de vérifier que, si S est un temps d'arrêt fini tel que $P[T \leq S] > 0$, alors $X I_{\{S \geq T\}}$ n'est pas intégrable.

Soit S un tel temps d'arrêt; appelons G l'événement non négligeable $\{T \leq S\}$. Pour $\lambda \geq 0$, on peut écrire, puisque $B_T = B_S$ sur G ,

$$e^{-\lambda B_T} I_G + I_{G^c} \geq e^{-\lambda B_S} = 1 - \lambda \int_0^S e^{-\lambda B_t} dB_t.$$

Prenons l'espérance des deux côtés. Il vient:

$$E[e^{-\lambda B_T} I_G] + P[G^c] \geq 1 - \lambda E \left[\int_0^S e^{-\lambda B_t} dB_t \right];$$

en utilisant la définition de B , on obtient

$$E \left[\int_0^S e^{-\lambda B_t} dB_t \right] = E \left[\int_0^S e^{-\lambda B_t} dA_t \right] = E[e^{-\lambda B_T} I_G],$$

et l'inégalité devient

$$(1 + \lambda)E[e^{-\lambda B_T} I_G] \geq 1 - P[G^c] = P[G],$$

ou encore, en désignant par E^G l'espérance associée à la probabilité conditionnelle $P[\cdot | G]$,

$$E^G[e^{-\lambda B_T}] \geq \frac{1}{1 + \lambda}.$$

On en déduit

$$E^G \left[\frac{1}{B_T} \right] = E^G \left[\int_0^\infty e^{-\lambda B_T} d\lambda \right] = \int_0^\infty E^G [e^{-\lambda B_T}] d\lambda \geq \int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda} = \infty,$$

ce qui est le résultat annoncé et établit le a. (Ce calcul est inspiré d'Azéma (1972), qui montre, lorsque de plus T est partout fini, que B_∞ suit la loi exponentielle de paramètre 1.)

b) Supposons que toutes les martingales sont continues, et soit T un temps d'arrêt. Pour montrer que toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable est la valeur à l'instant T d'une martingale locale continue, nous allons appliquer la remarque c qui suit la Proposition 1. L'hypothèse entraîne que, comme tous les temps d'arrêt, le temps S défini par la Proposition 1 est prévisible et vérifie $\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_{S-}$; il suffit donc d'établir que $S = R$.

Soit $A \in \mathcal{F}_S$. La martingale $M_t = P[A | \mathcal{F}_t]$ est continue par hypothèse. Posons

$$U = \inf\{t \geq 0 : M_t = 0 \text{ ou } M_t = 1\}.$$

Comme $0 \leq M \leq 1$, on sait d'après Dellacherie-Meyer (1980) page 85, que M est constante sur $[U, \infty[$. Or $M_\infty = I_A$; donc $M_U = I_A$ et $A \in \mathcal{F}_U$. Mais U est un temps de mobilité car $M \in C(U)$; donc, par définition de R , $U \leq R$ d'où $A \in \mathcal{F}_R$ et $\mathcal{F}_R = \mathcal{F}_S$. Par définition de S , ceci entraîne $R = S$, et la condition nécessaire est établie.

Réciproquement, supposons que, pour tout T , chaque variable aléatoire de \mathcal{F}_T soit la valeur en T d'une martingale locale continue. Le a montre immédiatement qu'il n'existe aucun temps d'arrêt totalement inaccessible, donc tout temps d'arrêt est accessible. Mais l'hypothèse entraîne aussi que chaque variable aléatoire de \mathcal{F}_T est \mathcal{F}_{T-} -mesurable, c'est-à-dire $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T-}$ pour tout T . D'après Dellacherie-Meyer (1975) page 217, on en déduit que tout temps d'arrêt accessible est prévisible.

Ainsi, tout temps d'arrêt est prévisible, et il est classique que ceci équivaut à la continuité de toutes les martingales. \square

REMARQUES. a) La Proposition 2.a montre que si, pour tout T , toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable est la valeur à l'instant T d'une martingale locale, alors tous les temps d'arrêt sont accessibles. La réciproque est fautive; voici un contre-exemple.

Soit $(t_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement décroissante positive. Prenons pour Ω l'ensemble N , pour \mathcal{F} la tribu de toutes les parties de Ω , et pour P une loi qui charge tous les points. La filtration est ainsi définie: $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$ si $t \leq \lim_n t_n$, \mathcal{F}_t est engendrée par la partition $(\{0, \dots, n\}, \{n+1\}, \{n+2\}, \dots)$ si $t_{n+1} \leq t < t_n$, et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ pour $t \geq t_0$ (et même $t \geq t_1$). Tous les temps d'arrêt sont accessibles, car ils ne prennent qu'un ensemble dénombrable de valeurs. La variable aléatoire $T(\omega) = t_\omega$ est un temps d'arrêt, vérifiant $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F} = P(\Omega)$ (car T est \mathcal{F}_{T-} -mesurable), et tel que tout temps d'arrêt S est constant sur $\{S < T\}$. On en déduit que toutes les martingales locales sont dans \mathcal{H}^1 : si M est une martingale locale, il existe un temps d'arrêt S tel que $M^S I_{\{S > 0\}}$ soit dans \mathcal{H}^1 et que $S(0) \geq t_0$; mais on a alors $S \geq T$, et, puisque les martingales sont constantes sur $[T, \infty[$, $M = M^S I_{\{S > 0\}}$ est dans \mathcal{H}^1 . Donc, bien que tous les temps d'arrêt soient accessibles, les variables aléatoires de la forme M_T sont exactement l'espace $L^1(\mathcal{F}_{T-})$ et non $L^0(\mathcal{F}_{T-})$.

b) Un problème voisin est de construire un processus croissant prenant une valeur donnée à un instant donné. Une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout temps d'arrêt T , toute variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable et non négative X soit de la forme A_T , où A est croissant, continu, adapté, est que la filtration soit constante. En effet, soit $B \in \mathcal{F}_\infty$; posons

$$T = \text{ess inf}\{S \in \mathcal{T} : B \in \mathcal{F}_S\}.$$

Il existe un processus croissant continu A tel que $A_\infty = A_T = I_B$. Or B est aussi dans \mathcal{F}_S , où S est le début de $\{A \geq 1/2\}$; mais $S < T$ sur $\{T > 0\}$, donc $S = 0$ et $B \in \mathcal{F}_0$.

REFERENCES

- AZEMA, J. (1972). Quelques applications de la théorie générale des processus. *Inventiones Math.* **18** 293-336.
- DELLACHERIE, C. et MEYER, P. A. (1975). *Probabilités et Potentiel*, chapitres I à IV. Hermann, Paris.
- DELLACHERIE, C. et MEYER, P. A. (1980). *Probabilités et Potentiel*, chapitres V à VIII. Hermann, Paris.
- DUDLEY, R. M. (1977). Wiener functionals as Ito integrals. *Ann. Probability* **5** 140-141.
- EMERY, M. (1980). Une propriété des temps prévisibles. Séminaire de Probabilités XIV, *Lecture Notes in Math.* **784** 316-317.

M. EMERY
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
7, RUE RENÉ DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE

C. STRICKER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
ROUTE DE GRAY
25030 BESANÇON CEDEX
FRANCE

J. A. YAN
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS
ACADEMIA SINICA
BEIJING
CHINA