SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES

Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite

PAR

L. BOURGUET

à PARIS.

M. HEINE a fait voir que

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i \sin a\pi} \int e^z z^{a-1} dz$$

l'intégrale étant prise le long d'une courbe qui contient l'origine et qui s'étend indéfiniment vers les x négatifs, sans qu'il soit nécessaire que cette courbe soit fermée.

Dans une précédente lettre je vous ai exposé le résultat obtenu en intégrant le long de deux droites passant par l'origine. Ces résultats supposent que la partie réelle de $a > 0$.

Je vais prendre à présent pour contour d'intégration une parabole ayant pour foyer l'origine. L'équation de la parabole est

$$z = \frac{\cos \omega + i \sin \omega}{1 + \cos \omega}$$

d'où

$$dz = \frac{-\sin \omega + i(1 + \cos \omega)}{(1 + \cos \omega)^2} d\omega$$

Donc

$$\int e^z z^{a-1} dz = \int_0^\pi e^{\frac{\cos\omega}{1+\cos\omega}} \frac{1}{(1+\cos\omega)^{a+1}} \cdot$$

$$\left|\begin{array}{l} [\cos(a-1)\omega + i\sin(a-1)\omega][-\sin\omega + i(1+\cos\omega)]e^{i\,\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}} \\ + [\cos(a-1)\omega - i\sin(a-1)\omega][\sin\omega + i(1+\cos\omega)]e^{-i\,\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}} \end{array}\right| d\omega$$

$$= 2ie^{\frac{1}{2}} \int_0^\pi e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\left(2\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^{a+1}} \left|\begin{array}{l} -[\sin a\omega + \sin(a-1)\omega]\sin\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right) \\ + [\cos a\omega + \cos(a-1)\omega]\cos\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right) \end{array}\right| d\omega$$

$$= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}} \int_0 e^{-\frac{1}{2}\mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}} \left(1 + \mathrm{tang}^2\frac{\omega}{2}\right)^{a-\frac{1}{2}} \cos\left[(2a-1)\frac{\omega}{2} + \mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right] d\left(\mathrm{tang}\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{ie^{\frac{1}{2}}}{2^{a-2}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} (1+x^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos[(2a-1)\,\mathrm{arc\ tang}\,x + x]dx,$$

par conséquent,

$$\Gamma(a) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^{a-1}\sin a\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} (1+x^2)^{a-\frac{1}{2}} \cos[(2a-1)\,\mathrm{arc\ tang}\,x + x]dx.$$

Si nous faisons $a = \frac{1}{2}$ et nous rappelant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}.$$

D'un autre côté on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On déduit de ces deux intégrales

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\sin^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

ou bien

$$\int_0^\infty e^{-2x^2}\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-2x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2e}}\right]$$

De l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$$

on peut déduire une série d'intégrales. L'intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,x\sin x\,dx$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,x\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx - \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,x^2\cos x\,dx$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\,x^2\cos x\,dx = 0$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot x\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x\,dx.$$

Si, d'une manière générale, on pose

$$A_{2n} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n} \cos x \, dx$$

$$A_{2n+1} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2n+1} \sin x \, dx$$

il viendra

$$A_{2n} = A_{2n+1} - 2nA_{2n-1}$$
$$A_{2n+1} = -A_{2n+2} + (2n+1)A_{2n}$$

Ces formules permettront de déduire ces intégrales les unes des autres.

Prenons, à présent, pour contour d'intégration une parabole ayant son sommet à l'origine, avec un petit cercle entourant cette origine, pour éviter ce point critique, nous rappelant que l'intégrale sur ce cercle est nulle lorsque la partie réelle de a est positive.

L'équation de la parabole est

$$z = \frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}(\cos\omega + i\sin\omega) = -\cot^2\omega - i\cot\omega;$$

d'où

$$dz = \frac{2\cos\omega + i\sin\omega}{\sin^3\omega} d\omega.$$

Dès lors

$$\int e^z z^{a-1} dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^3\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1} \cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad [\cos(a-1)\omega + i\sin(a-1)\omega][2\cos\omega + i\sin\omega]e^{-i\cot\omega} \\ -[\cos(a-1)\omega - i\sin(a-1)\omega][2\cos\omega - i\sin\omega]e^{i\cot\omega} \end{array}\right\} d\omega$$

$$= 2i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^3\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1} \left\{\begin{array}{l} -[\cos a\omega + \cos\omega\cos(a-1)\omega]\sin(\cot\omega) \\ +[\sin a\omega + \cos\omega\sin(a-1)\omega]\cos(\cot\omega) \end{array}\right\} d\omega$$

$$= 2i\int_{\pi}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2\omega}}{\sin^3\omega}\left(\frac{-\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)^{a-1} \left\{\sin[a\omega - \cot\omega] + \cos\omega\sin[(a-1)\omega - \cot\omega]\right\} d\omega$$

$$= i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{\sin^3 \omega} \left(\frac{-\cos \omega}{\sin^2 \omega} \right)^{a-1} \left\{ 3 \sin [a\omega - \cot \omega] + \sin [(a-2)\omega - \cot \omega] \right\} d\omega$$

$$= i \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{e^{-\cot^2 \omega}}{(\sin \omega)^a} (-\cot \omega)^{a-1} \left\{ 3 \sin [a\omega - \cot \omega] + \sin [(a-2)\omega - \cot \omega] \right\} \frac{d\omega}{\sin^2 \omega}$$

$$= i \int_0^{\infty} e^{-x^2} (1 + x^2)^{\frac{a}{2}} x^{a-1} \left\{ 3 \sin [x + a \operatorname{arc} \cot(-x)] + \sin [x + (a-2) \operatorname{arc} \cot(-x)] \right\} dx$$

Donc

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2 \sin a\pi} \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{a-1} (1 + x^2)^{\frac{a}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ 3 \sin [x + a \operatorname{arc} \cot(-x)] + \sin [x + (a-2) \operatorname{arc} \cot(-x)] \right\} dx.$$