

# QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS DÉTERMINANTES.

PAR

S. PINCHERLE

à BOLOGNA.

Je présente dans cette note quelques remarques simples et élémentaires qui complètent en quelques parties, je pense, la théorie des fonctions déterminantes, théorie dont l'importance a été reconnue depuis longtemps, et qui devient encore plus intéressante à cause des travaux parus dernièrement sur la série de DIRICHLET.

1. Soit  $\varphi(t)$  une fonction réelle ou complexe de la variable réelle, limitée et intégrable dans chaque intervalle fini entre  $c$  et  $+\infty$ . Étudions l'intégrale

$$\int_c^{\infty} \varphi(t) e^{-tx} dt. \quad (1)$$

Rappelons quelques résultats connus qui se rapportent à l'expression (1). Si la (1) est convergente pour une valeur  $x = x_0$  elle est aussi convergente pour chaque valeur  $x$  dont la partie réelle est plus grande que la partie réelle de  $x_0$ , c'est à dire, selon une notation très connue, si l'on a

$$R(x) > R(x_0).$$

Il s'ensuit l'existence d'un demiplan de convergence pour (1), c'est à dire d'un nombre  $a$  tel que la (1) converge pour  $R(x) > a$ , tandis qu'elle ne converge pas pour  $R(x) < a$ . Sur la droite de convergence  $R(x) = a$  on ne peut affirmer en général ni la convergence ni la divergence. On appellera le nombre  $a$  *abscisse de convergence* pour l'expression (1), ou bien *ordre* de la fonction  $\varphi(t)$ . Ce nombre

$a$  peut être  $-\infty$ , en ce cas la (1) est convergente dans tout le plan  $x$ ;  $a$  peut être  $+\infty$ , alors la (1) n'est jamais convergente. Dans le demiplan  $R(x) > a$ , à l'exception au plus de la droite de convergence, la (1) représente une branche à une seule valeur d'une fonction analytique, régulière dans chaque région finie du demiplan. Cette fonction analytique  $f(x)$ , qui peut être quelque fois continuée à gauche de la droite de convergence, est appelée *fonction déterminante* de  $\varphi(t)$ , et celle-ci s'appelle *fonction génératrice* de  $f(x)$ . Pour indiquer la correspondance fonctionnelle entre  $f(x)$  et  $\varphi(t)$  j'écrirai quelque fois:

$$f(x) = J(\varphi). \quad (2)$$

Nous laissons de côté quelques généralisations évidentes, entre autres celle que  $\varphi(t)$  puisse être donnée, plutôt que sur un segment infini de l'axe réel  $t$ , sur une ligne qui s'étend à l'infini dans le plan de la variable  $t$ , sous des conditions analogues à celles que nous avons énoncées.<sup>1</sup>

2. Entre beaucoup de questions qui se présentent dans l'étude de l'expression (1), il y a celle de la détermination de l'ordre  $a$  de  $\varphi(t)$ . LANDAU [G. p. 215] a énoncé le théorème suivant:

Si  $a \geq 0$  on a:

$$a = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_c^t \varphi(u) du \right|}{t}, \quad (3)$$

où  $\overline{\lim}$  représente le *maximum* des limites dans le sens bien connu de CAUCHY et HADAMARD.

Je vais montrer comme on peut faire correspondre au théorème de LANDAU un autre analogue pour le cas  $a < 0$ . Dans ce cas on a:

$$a = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \int_t^\infty \varphi(u) du \right|}{t}. \quad (4)$$

La démonstration est analogue à celle de LANDAU.

Soit  $-\beta$  le maximum des limites dans le second membre de (4), et soit  $x > -\beta + \varepsilon'$  ( $\varepsilon'$  positif); je dis que la (1) est convergente pour cette valeur de  $x$ . Soit  $\varepsilon < \varepsilon'$ ; il existe un  $\bar{t}$  tel que, pour  $t > \bar{t}$ , on aura

<sup>1</sup> Voir mon mémoire »Sur les fonctions déterminantes» Ann. de l'École Normale (3) XXII (1905) p. 9 (qui sera indiqué par D); E. LANDAU »Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen» Sitzungsber. der K. Bay. Akad. der Wssts XXXVI (1906) p. 208 (qui sera indiqué par G); W. SCHNEE »Inaug. Dissert.» Berlin 1908 (imprimé à Göttingen, Dict. Un. Buchdruc.) p. 59.

$$\left| \int_t^{\infty} \varphi(u) du \right| < e^{-t(\beta-\varepsilon)}; \quad (5)$$

si  $\bar{t} < v < w$ , en posant

$$I = \int_v^w \varphi(t) e^{t(\beta-\varepsilon')} dt, \quad \int_t^{\infty} \varphi(u) du = \varrho(t), \quad (6)$$

on déduit, par une intégration par parties,

$$I = \varrho(w) e^{w(\beta-\varepsilon')} - \varrho(v) e^{v(\beta-\varepsilon')} - (\beta - \varepsilon') \int_v^w \varrho(t) e^{t(\beta-\varepsilon')} dt.$$

Dans le second membre de cette expression les deux premiers termes sont, en valeurs absolues, plus petits que  $e^{-w(\varepsilon'-\varepsilon)}$  et  $e^{-v(\varepsilon'-\varepsilon)}$ , tandis que le troisième est plus petit que

$$(\beta - \varepsilon') \int_v^w e^{-t(\varepsilon'-\varepsilon)},$$

on peut donc les rendre, pour  $v$  suffisamment grand, aussi petits que l'on voudra. La (1) est donc convergente pour  $R(x) > -\beta$ .

Inversement, soit (1) convergente pour une valeur négative  $-y$  de  $x$ . On peut, fixé d'avance  $\sigma$ , déterminer un nombre  $\bar{t}$  tel que, pour  $\bar{t} < v < w$ , l'on ait

$$\left| \int_v^w \varphi(t) e^{ty} dt \right| < \sigma.$$

Puisque  $\varrho(t)$  est convergente, je forme

$$H = \int_v^w \varphi(t) dt = \int_v^w \varphi(t) e^{ty} \cdot e^{-ty} dt;$$

en posant

$$f(-y, t) = \int_c^t \varphi(u) e^{uy} du,$$

on déduit, par une intégration par parties,

$$H = \left[ f(-y, t) e^{-ty} \right]_v^w + y \int_v^w f(-y, t) e^{-ty} dt.$$

A cause de la convergence de  $f(-y)$  il existe un nombre positif  $B$  tel que, pour chaque  $t$ ,  $|f(-y, t)| < B$ ; donc

$$|H| < 2B(e^{-wy} + e^{-vy}).$$

En faisant tendre  $w$  vers l'infini, on déduit

$$\left| \int_v^\infty \varphi(t) dt \right| \leq 2B e^{-vy},$$

et de là

$$\frac{\log \left| \int_v^\infty \varphi(t) dt \right|}{v} \leq -y.$$

Il en résulte donc que  $-y$  n'est pas inférieur à  $-\beta$ ; et puisque la (1) est convergente pour  $R(x) > -\beta$  et n'est pas convergente pour  $R(x) < -\beta$ , il s'ensuit que  $-\beta$  est l'abscisse de convergence.

3. Parmi les questions auxquelles donne lieu la correspondance fonctionnelle (2), l'une des plus intéressantes est celle qui met en rapport le caractère asymptotique de la fonction génératrice pour  $t = \infty$  avec le caractère analytique de la fonction déterminante, en particulier quant à la position et à la nature de ses singularités. Il y a peu de théorèmes sur ce sujet. Nous rappellerons les théorèmes des nos 10, 11, 17 du Mémoire D, le théorème  $X'''$  à la page 217 du Mémoire G et les propositions énoncées aux pag. 69-71 de la dissertation de W. SCHNEE. Au même côté de la question se rattachent étroitement quelques propositions sur la série de DIRICHLET.<sup>1</sup>

La proposition suivante sur le même sujet, quoique très élémentaire, a des conséquences utiles. C'est à cause de cela que je l'énonce explicitement.

»Soit  $\gamma(t)$  une fonction génératrice d'ordre zéro, donnée pour  $t \geq c$ , et positive; sa fonction déterminante  $q(x)$  soit telle que pour  $|x| < r$

$$|q(x) x^c| < A, \tag{7}$$

$A$  et  $\rho$  étant des nombres positifs. Soit  $\omega(t)$  une fonction limitée et intégrable entre  $c$  et  $\infty$  qui tend à zéro pour  $t = \infty$ . Alors la fonction

<sup>1</sup> V. LANDAU, Acta XXX (1905) p. 195 (où l'on trouve citées aussi les recherches antérieures de DIRICHLET et PHRAGMÉN). SCHNEE l. c. p. 34 id. Rend. Cir. Mat. di Palermo XXVII (1909) p. 87.

$$f(x) = \int_c^\infty \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt, \quad (8)$$

lorsque  $x = \xi + i\eta$  reste dans un angle  $V$  dont le sommet est zéro, qui contient l'axe réel positif et dans lequel  $\frac{\eta}{\xi}$  ne dépasse pas en valeur absolue un nombre positif  $m$ , donne :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^e f(x) = 0. \gg$$

Observons d'abord que, puisque  $\gamma(t)$  est positive,  $q(x)$  admet, d'après un théorème de LANDAU<sup>1</sup>, un point singulier pour  $x = 0$ . Cela posé, qu'on prenne un nombre positif  $\varepsilon$ , que l'on fixe  $u$  de manière que pour  $t \geq u$  soit

$$|\omega(t)| < \sigma, \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{3A\sqrt{1+m^2}} \quad (9)$$

et que l'on décompose (8) en

$$f(x) = \int_c^u \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt + \int_u^\infty \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt.$$

La première intégrale est une fonction entière de  $x$ , inférieure donc en valeur absolue, pour  $|x| < r$ , à un nombre  $M$  qu'on peut fixer. La seconde intégrale donne

$$\left| \int_u^\infty \gamma(t) \omega(t) e^{-tx} dt \right| < \sigma \int_u^\infty \gamma(t) e^{-t\xi} dt,$$

avec

$$\int_u^\infty \gamma(t) e^{-t\xi} dt = q(\xi) - g(\xi),$$

et  $g(\xi)$  est aussi une fonction entière, inférieure en valeur absolue, pour  $\xi < r$ , à un nombre  $N$  qu'on peut fixer.

De sorte que pour  $|x| < r$  on a,

$$|f(x)x| < M|x^e| + \sigma q(\xi) \xi^e \left(\frac{|x|}{\xi}\right)^e + \sigma N|x|^e;$$

mais on a, puisque  $x$  est dans l'angle  $V$ ,

<sup>1</sup> G. p. 217 (déjà donné par l'auteur dans Math. Ann. LXI (1905) p. 548).

$$\frac{|x|}{\xi} < \sqrt{1 + m^2},$$

d'où, à cause de (7) et (9),

$$|f(x) x^e| < M |x|^e + \frac{\varepsilon}{3} + \sigma N |x|^e.$$

En prenant  $|x|$  moindre que le plus petit des trois nombres

$$r, \left(\frac{\varepsilon}{3M}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\frac{A}{N} \sqrt{1 + m^2}\right)^{\frac{1}{e}}$$

on aura

$$|f(x) x^e| < \varepsilon.$$

En multipliant  $\gamma(t)$  par  $\omega(t)$ , qui tend à zéro pour  $t = \infty$ , on abaisse donc, pour ainsi dire, l'infini de  $q(x)$  pour  $x = 0$ . On pourrait faire disparaître tout à fait la singularité si  $\omega(t)$  tendait à zéro d'ordre exponentiel.

4. a). Si  $\varphi(t)$  est donné avec les conditions du n° 1 entre  $t = 0$  et l'infini positif, envisageons sa déterminante

$$f(x) = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-tx} dt; \quad (10)$$

supposons que  $x$  se trouve à l'intérieur d'un angle  $V$  dont le sommet soit un point  $c$  du demiplan de convergence de  $f(x)$ , et dont les côtés aient respectivement les arguments  $-\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{\pi}{2} - \eta$ , ( $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ ). On peut sans aucun inconvénient supposer  $c$  réel. Dans tout l'intérieur de l'angle  $V$  la fonction analytique  $f(x)$  est, en valeur absolue, moindre qu'un nombre  $m$  qu'on peut fixer [D, n° 12]; si donc on conduit une demidroite partant du point  $c$ , dont l'argument soit  $\vartheta$ , contenue dans l'angle  $V$ , et si, par une intégration le long de cette demidroite, on forme

$$F_{\vartheta}(z) = \int_c^{\infty e^{i\vartheta}} f(x) e^{-zx} dx, \quad (11)$$

$f(x)$  sera dans cette expression une fonction génératrice d'ordre zéro et sa déterminante  $F_{\vartheta}(z)$  sera une fonction analytique régulière dans le demiplan  $S_{\vartheta}$ ,

en avant d'une perpendiculaire conduite par l'origine à la direction dont l'argument est  $-\vartheta$ .<sup>1</sup>

Lorsque  $\vartheta$  varie de  $-\frac{\pi}{2} + \eta$  à  $\frac{\pi}{2} - \eta$  dans le sens des rotations positives, le demiplan  $S_\vartheta$  tournera dans le sens contraire et couvrira tout le plan  $z$ , sauf un angle dont l'amplitude est  $2\eta$  et dont l'axe réel négatif est la bisectrice. Appelons  $T$  l'aire ainsi formée dans le plan  $z$ .

»La (11) donne la définition d'une branche de fonction analytique à une seule valeur, qu'on peut prolonger dans toute l'aire  $T$  ainsi définie.» En effet envisageons deux demidroites partant du point  $c$ , dont les directions soient  $\alpha$  et  $\beta$ , avec

$$-\frac{\pi}{2} + \eta < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} + \eta;$$

après avoir tracé le cercle de rayon  $R$ , nous intégrons  $f(x)e^{-zx}$  sur le contour du secteur compris entre la circonférence et les deux rayons  $\alpha$  et  $\beta$ . L'application du théorème de CAUCHY et le passage à la limite pour  $R = \infty$  montrent sans aucune difficulté, puisque  $|f(x)| < m$ , que

$$F_\alpha(z) = F_\beta(z),$$

de sorte que, dans les parties non communes des demiplans, l'une de ces expressions est la continuation analytique de l'autre. On a défini ainsi une branche à une seule valeur de fonction analytique  $F(z)$  dans toute l'aire  $T$ .

Mais puisque l'angle  $\eta$  est aussi petit que l'on veut, on peut conclure que

»la déterminante  $F(z)$  de la déterminante d'une fonction  $\varphi(t)$  donnée entre 0 et  $\infty$  avec les conditions du n° 1, est une fonction analytique qui a une branche à une seule valeur régulière dans tout le plan  $z$  sauf une coupure faite le long de l'axe réel positif.»

Dans le cas où la (10) a un demiplan de convergence absolue, on prendra dans le plan  $z$  le point  $c$  sur l'axe réel; on pourra alors intervertir les intégrations dans l'expression de  $F(z)$ ,

$$F(z) = \int_c^\infty \int_0^\infty e^{-zx} e^{-tx} \varphi(t) dt dx$$

et on aura ainsi, sous la condition  $R(t+z) > 0$ ,

<sup>1</sup> Voir mon mémoire »Sur l'inversion des intégrales définies, Mem. de la Société des XL (3) XV (Rome, 1909) p. 15. Avec un demiplan  $S_\vartheta$  en avant de la droite qui le limite, j'entends le demiplan dans lequel les segments, comptés à partir de l'origine sur la demidroite dont l'argument est  $-\vartheta$ , croissent indéfiniment.

$$F(z) = e^{-cz} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) e^{-ct} dt}{t+z};$$

celle-ci représente dans tout le plan  $z$ , sauf une coupure le long de l'axe réel négatif, une branche à une seule valeur de fonction analytique. D'après un théorème connu<sup>1</sup>,  $2\pi i \varphi(-t)$  représente le saut de cette fonction à travers la coupure.

b). Les fonctions régulières dans l'entourage de  $x = \infty$  appartiennent à la classe des fonctions déterminantes, et leurs génératrices sont des fonctions entières d'ordre 1 au plus. Si la fonction déterminante est représentée par

$$f(x) = \sum \frac{k_n}{x^{n+1}} \quad (13)$$

convergente pour  $|x| > r$ , la génératrice est donnée par

$$\varphi(t) = \sum \frac{k_n t^n}{n!}, \quad (14)$$

et réciproquement, si la fonction (14) est donnée sous la condition

$$|k_n| < m(r + \varepsilon)^n,$$

$m, r$  positifs et  $\varepsilon$  aussi petit que l'on veut, la déterminante est régulière dans l'entourage  $|x| > r$  de l'infini.

Remarquons, comme parenthèse, que si  $s(x)$  est une série de DIRICHLET,  $\frac{s(x)}{x}$  est une fonction déterminante d'une génératrice discontinue et ne peut pas être régulière pour  $x = \infty$ .<sup>2</sup>

Supposons maintenant qu'on ait dans la série (14)

$$k_n = (-1)^n \int_0^a \delta(u) u^n du, \quad (15)$$

on aura aussi

$$\varphi(t) = \int_0^a \delta(u) e^{-tu} du \quad (16)$$

<sup>1</sup> V. p. ex. Hermite, Cours lith. d'Analyse de 1891 p. 155.

<sup>2</sup> On a ainsi la vérification d'une remarque faite par HURWITZ et rappelée par LANDAU. Rend. du Circ. Mat. di Palermo XXIV (1907) p. 132.

et alors, d'après le n° 4,  $f(x)$  appartiendra à la classe des fonctions déterminantes de déterminantes et sera régulière dans tout le plan, sauf une coupure le long de l'axe réel négatif, qui dans ce cas est limitée au segment  $-a \dots 0$ . Si nous envisageons comme résolu le problème de déterminer la génératrice d'une fonction déterminante donnée, on aura donc résolu aussi le problème de déterminer le saut d'une telle fonction  $f(x)$  à travers la coupure, et puisque ce saut est donné par la fonction qui permet de donner aux coefficients  $k_n$  la forme (15), on a résolu aussi pour ceux-ci le problème connu des *moments*.

c). Soit  $\omega(t)$  une fonction périodique avec la période  $a$ , intégrable entre 0 et  $a$  et limitée pour tous les points entre 0 et  $a$ . Elle sera donc limitée entre 0 et  $\infty$  et sera ainsi une génératrice d'ordre 0. Sa déterminante

$$h(x) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-tx} dt$$

est régulière pour  $R(x) > 0$ . Mais on a, à cause de la périodicité,

$$h(x) = \int_0^a \omega(t) e^{-tx} dt + \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-(t+a)x} dt.$$

La première intégrale est une fonction entière  $g(x)$ , donc

$$h(x) = \frac{g(x)}{1 - e^{-ax}}. \tag{17}$$

La déterminante d'une fonction périodique est donc une fonction méromorphe et le numérateur est une fonction entière de la forme (16).

Réciproquement, il est facile de vérifier que toute fonction de la forme (17) est la déterminante d'une fonction périodique.

d). Aux fonctions déterminantes de déterminantes se rattachent les déterminantes des séries de DIRICHLET

$$\varphi(t) = \sum_1^{\infty} c_n e^{-\alpha_n t}. \tag{18}$$

Si les  $\alpha_n$  sont des nombres positifs croissants et tendant à l'infini et si la série a un demiplan de convergence absolue, si  $c$  est un nombre réel dans ce demiplan, en prenant un nombre positif quelconque  $\varepsilon$ , on peut choisir un nombre  $m$  tel que

$$\sum_{n=m}^{\infty} |c_n e^{-a_n c}| < \varepsilon,$$

et a fortiori  $|p(t)| < \varepsilon$  pour  $t > c$ , si

$$p(t) = \sum_m^{\infty} c_n e^{-a_n t}.$$

Soit

$$f(x) = \int_c^{\infty} \varphi(t) e^{-tx} dt;$$

on déduit

$$f(x) = e^{-cx} \sum_1^{m-1} \frac{c_n e^{-ca_n}}{x + \alpha_n} + \int_c^{\infty} \varrho(t) e^{-tx} dt,$$

où le dernier terme est en valeur absolue inférieur à

$$\frac{\varepsilon e^{-cR(x)}}{R(x)}.$$

On en déduit que la fonction déterminante est représentée par

$$f(x) = e^{-cx} \sum_1^{\infty} \frac{c_n e^{-ca_n}}{x + \alpha_n}, \quad (19)$$

et à cause de la convergence absolue de la série des numérateurs, c'est une fonction méromorphe avec les pôles  $-\alpha_n$  sur l'axe négatif et les résidus respectifs  $c_n$ .<sup>1</sup>

5. Soit  $\varphi(t)$  une fonction continue entre  $c$  et  $\infty$  dont toutes les dérivées successives soient aussi continues entre  $c$  et  $\infty$ . La fonction  $\varphi(t)$  et ses dérivées soient d'ordre fini. Soit  $\varphi(t)$  d'ordre négatif  $-\lambda_0$ ; la fonction

$$\varphi_0(t) = e^{\lambda_0 t} \varphi(t)$$

aura l'ordre zéro. Soit la dérivée  $\varphi'_0(t)$  d'ordre négatif  $-\lambda_1$ . L'intégrale

<sup>1</sup> Le saut  $\delta(-t)$  est ici zéro, mais si on envisage l'intégrale de  $f(x)$ , donnée par une série de logarithmes, le saut est la fonction scalaire, constante dans les intervalles  $-\alpha_n \dots -\alpha_{n+1}$ , qu'on doit envisager comme la génératrice de  $\frac{\varphi(t)}{t}$ .

$$f(x) = \int_c^\infty \varphi(t) e^{-tx} dt = \int_c^\infty \varphi_0(t) e^{-t(x+\lambda_0)} dt$$

sera convergente pour  $R(x) > -\lambda_0$ . En intégrant par parties, on aura

$$f(x) = \frac{\varphi_0(c) e^{-c(x+\lambda_0)}}{x + \lambda_0} + \frac{1}{x + \lambda_0} f_1(x), \quad (20)$$

où

$$f_1(x) = \int_c^\infty \varphi'_0(t) e^{-t(x+\lambda_0)} dt. \quad (21)$$

D'après l'hypothèse faite,  $f_1(x)$  est convergente pour

$$R(x) > -(\lambda_0 + \lambda_1);$$

de l'égalité (20) on déduit donc que  $-\lambda_0$  est un pôle pour  $f(x)$ . Puisque les dérivées de la fonction sous le signe  $\int$  en (21) existent, on sait [D, n° 15] que si  $x$  tend à l'infini dans un angle  $V$  dont les côtés ont les directions  $-\frac{\pi}{2} + \eta$  et  $\frac{\pi}{2} - \eta$  ( $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$ ) la fonction  $e^{cx} f_1(x)$  tend uniformément à zéro du premier ordre. En prenant  $\varepsilon$  positif quelconque, on a donc, pour  $x$  assez grand,

$$(x + \lambda_0) \left\{ f(x) e^{cx} - \frac{\varphi_0(c) e^{-c\lambda_0}}{x + \lambda_0} \right\} < \varepsilon. \quad (22)$$

Soit  $\varphi'_0(t)$  dans les mêmes conditions que  $\varphi(t)$ ; c'est à dire que

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \varphi'_0(t),$$

d'ordre zéro, ait sa dérivée d'ordre négatif  $-\lambda_2$ . On aura

$$f_1(x) = \frac{\varphi_1(c) e^{-c(x+\lambda_0+\lambda_1)}}{x + \lambda_0 + \lambda_1} + \frac{1}{x + \lambda_0 + \lambda_1} f_2(x),$$

où

$$f_2(x) = \int_c^\infty \varphi'_1(t) e^{-t(x+\lambda_0+\lambda_1)} dt,$$

et en posant

$$\alpha_0 = \lambda_0, \quad \alpha_1 = \lambda_0 + \lambda_1,$$

$$\varphi_0(c) e^{-c\lambda_0} = k_0, \quad \varphi_1(c) e^{-c(\lambda_0 + \lambda_1)} = k_1$$

on aura

$$f_1(x) = \frac{k_1 e^{-cx}}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_1} f_2(x),$$

d'où

$$f(x) = e^{-cx} \left( \frac{k_0}{x + \alpha_0} + \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} \right) + \frac{1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} f_2(x).$$

Et puisque, pour  $x$  tendant à l'infini dans l'angle  $V$ ,  $e^{cx} f_2(x)$  tend uniformément à zéro, on aura pour  $|x|$  suffisamment grand :

$$(x + \alpha_0)(x + \alpha_1) \left\{ f(x) e^{cx} - \frac{k_0}{x + \alpha_0} - \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} \right\} < \varepsilon. \quad (24)$$

Et ainsi de suite; en poursuivant de la même manière, avec des hypothèses et des notations analogues, on arrivera pour  $f(x) e^{cx}$  au développement asymptotique :

$$f(x) e^{cx} = \frac{k_0}{x + \alpha_0} + \frac{k_1}{(x + \alpha_0)(x + \alpha_1)} + \dots \quad (25)$$

précisément dans le sens exprimé par les inégalités (22) et (24), c'est à dire dans le sens défini par POINCARÉ pour les développements asymptotiques en séries de puissances négatives de  $x$ .

L'application de ce qui précède au cas où  $\varphi(t)$  est donnée par une série (18) est évidente. La déterminante d'une série de DIRICHLET admet donc un développement asymptotique de la forme (25).

On doit remarquer que dans le cas de la convergence effective du développement qu'on vient de trouver, la méthode que nous avons esquissée sert à donner la transformation d'une fonction méromorphe avec des pôles simples en une série de factorielles généralisées.

