SUR LES FORMULES DE GREEN GÉNÉRALISÉES QUI SE PRÉSENTENT DANS L'HYDRODYNAMIQUE ET SUR QUELQUES-UNES DE LEURS APPLICATIONS.

Par

C. W. OSEEN

à UPSAL.

Seconde partie. Sur les formules de Green généralisées qui se présentent dans la théorie d'un fluide visqueux et compressible.

Notre but dans cette partie de notre travail sera de donner des formules, analogues à celle de GREEN et se rapportant au calcul de la fonction σ du système:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \varDelta u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial y} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \varDelta v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial z} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \varDelta w, \\
\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\frac{\partial \sigma}{\partial t} &+ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{A.}$$

$$\varkappa > 0,\ \lambda + 2\mu > 0,\ \mu > 0,$$

ou de ceux que l'on obtient en supposant $Z = w = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ ou $Y = Z = v = w = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$. Ces systèmes servent à déterminer le mouvement infiniment lent d'un fluide visqueux et compressible à température constante. Par nos formules le calcul de la fonction σ sera réduit au problème de déterminer une certaine solution particulière du système A etc., où l'on pose $X = Y = Z = 0$ et où l'on remplace t par $-t$. Une fois la fonction σ connue on n'aura pour calculer u, v, w qu'à résoudre trois équations du type:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = X + \mu \Delta U$$

avec des conditions à limite données.

Notre but dans cette seconde partie est, comme on le vois, plus restreint que dans la première. Evidemment, on peut aller plus loin et donner des formules explicites pour u, v, w. Cependant, à l'état actuel de nos connaissances expérimentales et théoriques, ces formules ne nous paraissent pas avoir un très grand intérêt. C'est pour quoi nous nous bornerons aux formules mentionnées, qui servent à calculer la fonction σ. Seulement dans le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$, nous développerons aussi les formules explicites pour u, v, w en nous restreignant d'ailleurs au problème à trois dimensions.

I

Sur une équation aux dérivées partielles dans la physique mathématique et sur le mouvement rectiligne d'un fluide visqueux et compressible.

1. Soit donnée l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2a \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Phi(x, t) \qquad 1.$$

$$(a > 0,\ b > 0),$$

où $\Phi(x,t)$ est une fonction continue de x et t, qui pour des valeurs de $|x|$ assez grandes satisfait à l'inégalité:

$$|\Phi(x, t)| < A_1 |x|^{n_1},$$

n_1 étant un nombre entier positif et A_1 une constante positive. Nous nous proposons de chercher, pour des valeurs de t positives, une solution $\varphi(x, t)$ de cette équation telle que:

$$\lim_{t=0} \varphi(x, t) = \varphi_0(x), \lim_{t=0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi_1(x),$$

où $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ sont des fonctions continues de x, remplissant pour des valeurs de x assez grandes, positives ou négatives, des inégalités de la forme:

$$|\varphi_0(x)|, |\varphi_1(x)| < A_2 |x|^{n_2}.$$

Considérons à cet effet l'équation adjointe de 1:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2a \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \qquad 2.$$

Supposons qu'il soit possible de trouver une solution $\psi(x, t; x_0, t_0)$ de cette équation avec les propriétés suivantes:

1: $\psi(x, t; x_0, t_0)$ doit pour $0 \leqq t < t_0$ et pour $|x - x_0| > 0$ être une fonction continue de x, t, douée des dérivées continues de tous les ordres par rapport à x, t;

2: on doit avoir:

$$\lim_{t=t_0} \psi(x, t; x_0, t_0) = 0, \lim_{t=t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

$$\lim_{t=t_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}} \right) = 0,$$

la convergence vers la valeur limite étant uniforme pour toutes les valeurs de x;

3: on doit avoir pour $t < t_0$:

$$\lim_{x=x_0+0} \psi(x, t; x_0, t_0) = \lim_{x=x_0-0} \psi(x, t; x_0, t_0),$$

$$\lim_{x=x_0+0} \left(2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \lim_{x=x_0-0} \left(2a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right);$$

4: quel que soit le nombre entier et positif n_3, il doit exister un nombre positif A_{n_3}, tel que l'on ait pour des valeurs de $|x|$ assez grandes et pour $0 \leqq t \leqq t_0$:

$$|\psi|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}\right| < A_{n_3} |x|^{-n_3}.$$

Formons alors les équations:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_0^L \left[\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2a\left(\psi \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial t} + \varphi \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\right) - b^2\left(\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - \psi\Phi\right] dx = 0,$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{-L}^0 \left[\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - 2a\left(\psi \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial t} + \varphi \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\right) - b^2\left(\psi \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} - \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - \psi\Phi\right] dx = 0.$$

En intégrant par parties, nous obtenons:

$$\int_0^L \int_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx - \int_0^L \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi\Phi\, dx\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0-\varepsilon} \int_0^L \left[2a\left(\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right) + b^2\left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dt,$$

$$\int_{-L}^0 \int_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx - \int_{-L}^0 \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi\Phi\, dx\, dt =$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} \int_{-L}^0 \left[2a\left(\psi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t} + \varphi \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right) + b^2\left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right] dt.$$

Supposons maintenant que, T étant un certain nombre positif, il existe un nombre entier positif n_4 et un nombre positif A_4 tels que l'on ait pour $0 \leqq t \leqq T$:

$$|\varphi|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}\right| < A_4 |x|^{n_4}.$$

Nous pouvons alors dans les équations précédentes, si $t_0 < T$, faire L tendre vers l'infini et nous aurons en les sommant:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0-\varepsilon} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} + 2a \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0-\varepsilon} \psi\Phi\, dx dt = 0.$$

Faisons enfin ε tendre vers zéro. Nous obtenons:

$$2\sqrt{2a\pi}\, \varphi(x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2a \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{t=0} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} \psi\Phi\, dx dt. \qquad 3.$$

Notre problème est donc, du moins dans des cas très généraux, réduit au problème de déterminer la fonction fondamentale $\psi(x, t;\ x_0, t_0)$.

2. Pour calculer la fonction fondamentale nous partons de la fonction $Q_1(x, t)$, définie par l'expression:

$$\int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} \cos kx\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} \cos k(x + t\sqrt{b^2-a^2k^2})\, dk, \qquad 4.$$

où les racines carrées doivent être prises avec leurs signes positifs. On voit immédiatement que cette expression pour $t < 0$ définit une fonction continue de x et t, douée de dérivées continues de tous les ordres et que cette fonction satisfait à l'équation 2. Pour étudier de plus près ses propriétés nous en cherchons d'abord d'autres expressions analytiques. Posons à cette effet $k = k_1 + i k_2$. Traçons dans le plan des k_1, k_2 une coupure du point $-\frac{b}{a}$ au point $+\frac{b}{a}$ le long de la ligne droite entre ces deux points. Nous aurons de cette manière deux points distincts à l'origine, l'un au-dessus et l'autre au-dessous de la coupure. Soit A le premier point et B l'autre. Convenons à donner à la racine carrée $\sqrt{b^2-a^2k^2}$ la valeur $+b$ dans le point A. Cette racine sera alors une fonction uniforme de k dans tout le plan du k, pourvu, toutefois, qu'on ne dépasse pas la coupure. Soit enfin C le point $k = +\frac{b}{a}$.

Nous avons:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_A^{\infty} e^{(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})t+ikx}\, dk, \qquad 5.$$

l'intégrale prise le long de l'axe des nombres réels et positifs. Posons:

$$(ak^2 + ik\sqrt{b^2-a^2k^2})\, t + ikx = -K.$$

Donc:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de} \int_A^{\infty} e^{-K} dk.$$

Considérons maintenant l'expression $ik\sqrt{b^2-a^2k^2}$. Lorsque k s'éloigne du point $\frac{b}{a}$ le long de l'axe des nombres réels, cette expression est positve et tend d'ailleurs vers l'infini en même temps que k. Supposons maintenant que k s'éloigne de l'origine le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif φ. Posons par exemple $k_1 = \xi \cos\varphi$, $k_2 = \xi \sin\varphi$. Il est à attendre que, l'angle φ étant assez petit, la partie réelle de notre expression sera positive pour des valeurs de ξ assez grandes. On a en effet:

$$a^2k^4 - b^2k^2 = a^2(k_1^4 - 6k_1^2k_2^2 + k_2^4) - b^2(k_1^2 - k_2^2) + 2ik_1k_2[2a^2(k_1^2 - k_2^2) - b^2].$$

L'hyperbole:

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{b^2}{2a^2}$$

constitue donc la frontière entre le domaine, où la partie réelle est positive, et celui, où elle est négative. Donc, si $0 \leqq \varphi < \frac{\pi}{4}$, la partie réelle sera positive pour des valeurs de ξ assex grandes et on aura pour ces valeurs:

$$|e^{-K}| < |e^{ak^2t+ikx}|,$$

pourvu que $t < 0$. Il s'ensuit que, pour ces valeurs de t, l'intégrale:

$$\int e^{-K}dk,$$

prise de long d'un arc du cercle $k_1^2 + k_2^2 = \xi^2$, du point $k_1 = \xi$, $k_2 = 0$ au point $k_1 = \xi \cos\varphi$, $k_2 = \xi \sin\varphi$, où $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, converge vers zéro, lorsque ξ tend vers l'infini. On conclut de là que pour $t < 0$:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de} \int_A^\infty e^{-K}dk,$$

l'intégrale prise le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif φ, plus petit que $\frac{\pi}{4}$. En d'autres termes:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_0^\infty e^{(ak^2 + ik\sqrt{b^2-a^2k^2})t + i\xi x\cos\varphi - \xi x \sin\varphi}(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\xi, \quad 6.$$

où:

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

et où:

$$\sqrt{b^2 - a^2k^2} = +b$$

pour $k = 0$.

Formons enfin une dernière expression analytique pour la fonction $Q_1(x, t)$. Nous avons:

$$Q_1(x, t) = \text{partie réelle de:} \int_A^\infty e^{-K}dk =$$

$$\text{partie réelle de: } \int_A^C e^{-K} dk + \int_C^B e^{-K} dk + \int_B^\infty e^{-K} dk,$$

l'intégrale dernière étant prise le long de l'axe de k_1. Or:

$$\int_A^C e^{-K} dk + \int_C^B e^{-K} dk = -2 \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} \sin kx \sin [kt \sqrt{b^2 - a^2 k^2}] dk.$$

Au lieu de prendre l'intégrale:

$$\int_B^\infty e^{-K} dk$$

le long du chemin indiqué, on peut la prendre le long d'un rayon vecteur quelconque, qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle φ qui satisfait aux inégalités $0 \geqq \varphi > -\frac{\pi}{4}$. Nous avons donc, toujours pour $t < 0$:

$$Q_1(x, t) = -2 \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} \sin kx \sin [kt \sqrt{b^2 - a^2 k^2}] dk +$$

$$\text{partie réelle de: } \int_0^\infty e^{(ak^2 - ik\sqrt{b^2 - a^2 k^2})t + i\xi x \cos\varphi - \xi x \sin\varphi} (\cos\varphi + i \sin\varphi)\, d\xi \qquad 7.$$

On a ici:

$$k = \xi(\cos\varphi + i \sin\varphi),\ 0 > \varphi > -\frac{\pi}{4},$$

et:

$$\sqrt{b^2 - a^2 k^2} = +b$$

pour $k = 0$.

Supposons maintenant que x soit plus grand qu'une quantité positive δ, arbitrairement petite mais fixe. Partons de l'expression 6. Nous pouvons ici faire t tendre vers zéro et nous voyons que $Q_1(x, t)$ tend uniformément vers la partie réelle de:

$$\int_0^\infty e^{i\xi x \cos\varphi - \xi x \sin\varphi} (\cos\varphi + i \sin\varphi) d\xi = \int_0^\infty e^{ikx} dk \qquad 8.$$

Comme l'intégrale:

$$\int e^{ikx} dk,$$

prise du point $k = \xi(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ $(\varphi > 0)$ au point $k = i\xi$ le long de l'arc du cercle $k_1^2 + k_2^2 = \xi^2$, qui ne traverse pas l'axe des nombres réels, tend vers zéro, lorsque ξ croît au delà de toute limite, il s'ensuit que, dans l'expression 8, nous pouvons donner à φ la valeur $\frac{\pi}{2}$. Nous avons donc, si $x > \delta$:

$$\lim_{t=0} Q_1(x,t) = \text{partie réelle de: } i\int_0^\infty e^{-\xi x}\, d\xi = 0.$$

On démontre de la même manière que, si $x > \delta$, toutes les dérivées de la fonction $Q_1(x,t)$ par rapport à x ou t tendent vers zéro en même temps que t.

Si x est négatif, nous faisons usage de la formule 7. Lorsque t tend vers o, la première intégrale à droite converge uniformément vers zéro pour toute valeur de x. Dans la seconde intégrale nous pouvons, si $x < -\delta$, $\delta > 0$, immédiatement poser $t = 0$. Puis nous pouvons prendre $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et nous obtenons:

$$\lim_{t=0} Q_1(x, t) = 0.$$

On démontre de la même manière:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^i Q_1(x,t)}{\partial x^i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

si $x < -\delta$.

Considérons maintenant la dérivée $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t}$. Cherchons la valeur limite de cette fonction pour des valeurs négatives de x, quand t tend vers o. La première intégrale à droite dans 7 nous donne:

$$-2\int_0^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2 - a^2k^2}\, \sin kx\, dk,$$

tandis que la seconde intégrale donne un résultat, dont la partie réelle est nulle. Nous avons donc pour $x < -\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_1(x,t)}{\partial t} = -2\int_0^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2 - a^2k^2}\, \sin kx\, dk.$$

Nous obtenons de la même manière pour $x < -\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_1(x,t)}{\partial x\, \partial t} = -2\int_0^{\frac{b}{a}} k^2\sqrt{b^2 - a^2k^2}\, \cos kx\, dk$$

etc.

De même que $Q_1(x, t)$ la fonction $Q_2(x, t)$, définie par l'expression:

$$\int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} \cos kx\,dk + \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} \cos k(x - t\sqrt{b^2-a^2k^2})\,dk,$$

où l'on prend les racines carrées avec leurs signes positifs, satisfait pour $t < 0$ à l'équation 2. Pour toute valeur de x positive, la fonction elle-même et toutes ses dérivées par rapport à x tendent vers zéro avec t. On a de plus pour $x < -\delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_2(x, t)}{\partial x\,\partial t} = 0,$$

etc., et pour $x > \delta$:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial Q_2(x, t)}{\partial t} = 2\int_0^{\frac{b}{a}} k\sqrt{b^2-a^2k^2} \sin kx\,dk,$$

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^2 Q_2(x, t)}{\partial x\,\partial t} = 2\int_0^{\frac{b}{a}} k^2\sqrt{b^2-a^2k^2} \cos kx\,dk,$$

etc.

Nous définissons maintenant une fonction $Q(x, t)$ par les égalités:

$$Q(x, t) = Q_1(x, t)$$

si $x > 0$, et:

$$Q(x, t) = Q_2(x, t)$$

si $x < 0$.

$Q(x, t)$ est pour $t < 0$ une fonction continue de x et t, douée de dérivées de tous les ordres, continues pour toute valeur positive ou négative de x. Ces dérivées satisfont à l'équation 2. Pour toute valeur de x différente de 0, on a:

$$\lim_{t=0} \frac{\partial^{i+j} Q(x, t)}{\partial x^i\,\partial t^j} = 0.$$

Pour étudier la fonction $Q(x, t)$ dans le voisinage du point $x = 0$, $t = 0$, nous la comparerons avec la fonction suivante:

$$F(x, t) = \int_0^{\infty} e^{\left(2ak^2 - \frac{b^2}{2a}\right)t} \cos kx\,dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2at}} e^{\frac{x^2}{8at} - \frac{b^2t}{2a}}.$$

Nous avons:

$$Q(x,t)-F(x,t)=\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]\cos kx\,dk+$$

$$+\int_{0}^{\frac{b}{a}}\left[e^{ak^2t}\cos\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]\cos kx\,dk\mp$$

$$\mp\int_{0}^{\frac{b}{a}}e^{ak^2t}\sin\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\sin kx\,dk,$$

où l'on doit prendre le signe — ou + suivant que $x \gtrless 0$.

Posons:

$$ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}=2ak^2-\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3k^2}\varphi(a,b,k).$$

Nous aurons, si $k>\frac{b}{a}$:

$$\varphi(a,b,k)=1+\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2k^2}+\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4k^4}+\ldots,$$

d'où l'on conclut que, pour $k>\frac{b}{a}$, $\varphi(a,b,k)$ est une fonction positive. Pour $k=\frac{b}{a}$ cette fonction a la valeur 4. Lorsque k croît, φ décroît et tend vers la valeur 1, quand k croît vers l'infini. Nous avons donc:

$$e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}=e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\left(e^{-\frac{b^4\varphi t}{8a^3k^2}}-1\right).$$

Or on a, si α est une quantité positive:

$$e^{\alpha}-1<\alpha e^{\alpha}.$$

Donc, si $t<0$, $k\geqq\frac{b}{a}$:

$$e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}<\frac{b^4\varphi|t|}{8a^3k^2}e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t-\frac{b^4\varphi t}{8a^3k^2}}=\frac{b^4\varphi|t|}{8a^3k^2}e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}.$$

Comme (pour $t<0$):

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\frac{\varphi(a,b,k)}{k^2}e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t}\cos kx\,dk\right|<\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\frac{\varphi(a,b,k)\,dk}{k^2}<4\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\frac{dk}{k^2}=\frac{4a}{b},$$

on voit que, pour $t<0$:

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]\cos kx\,dk\right|<\frac{2b^3}{a^2}|t|.$$

On a évidemment des inégalités analogues pour les deux autres intégrales dans la différence $Q(x,t)-F(x,t)$. Nous voyons donc que l'on peut trouver un nombre positif $A^{a,b}$, dépendant de a et b et tel que l'on a pour toute valeur de x et pour toute valeur négative de t:

$$\left|Q(x,t)-\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-2at}}e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}\right|<A^{a,b}|t|. \qquad 9.$$

Nous étudions de la même manière la dérivée $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Nous avons:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}\,k\sin kx\,dk-\int_0^{\frac{b}{a}}e^{ak^2t}\,k\Big[\sin kx\cos\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\pm$$

$$\pm\cos kx\sin\left[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]\Big]dk$$

et:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-\int_0^{\infty}e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\,k\sin kx\,dk=-\frac{x\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{-2at^3}}e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}.$$

Or on a:

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]k\sin kx\,dk\right|<$$

$$<\frac{b^4|t|}{8a^3}\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\varphi\,e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}\frac{dk}{k}<\frac{4b^4|t|}{8a^3}\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}e^{ak^2t}\frac{dk}{k}.$$

La fonction:

$$(1+|x|)\,e^{-|x|}$$

a sa plus grande valeur pour $x=0$. Donc, pour $t<0$:

$$e^{ak^2t}<\frac{1}{1-ak^2t}.$$

Par conséquent:

$$\int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{ak^2t}\frac{dk}{k} < \int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\frac{dk}{k(1-ak^2t)} = \frac{1}{2}\log\frac{a-b^2t}{-b^2t}.$$

Soit α un nombre positif plus petit que 1. La fonction:

$$(-t)^{1-\alpha}\log\frac{a-b^2t}{-b^2t}$$

est alors une fonction continue de t pour $t<0$ et tend vers zéro avec t. Nous voyons donc qu'a tout nombre positif T et tout nombre positif α plus petit que 1 correspond un nombre positif $A^{T,\alpha}$ tel que l'on a pour toute valeur de x et pour $-T\leqq t\leqq 0$:

$$\left|\int_{\frac{b}{a}}^{\infty}\left[e^{\left(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}\right)t} - e^{\left(2ak^2-\frac{b^2}{2a}\right)t}\right]k\sin kx\,dk\right| < A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha}.$$

Il est clair que l'on peut prendre $A^{T,\alpha}$ assez grand pour que l'on ait aussi pour $-T\leqq t\leqq 0$:

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\right| = \left|\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{x\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{-2a^3t^3}}\right| < A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha}. \qquad 10.$$

On démontre d'une manière analogue que l'on a:

$$\left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right| = \left|\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{-2a^3t^3}}-\frac{x^2\sqrt{\pi}\,e^{\frac{x^2}{8at}-\frac{b^2t}{2a}}}{16\sqrt{-2a^5t^5}}\right| < B^{a,b}(-t)^{\frac{1}{2}}, \qquad 11.$$

$B^{a,b}$ étant une certaine constante positive, dépendant de a et b.

Considérons maintenant la fonction $P_1(x,t)$, définie par l'équation:

$$P_1(x,t) = -\int_t^0 Q(x,\tau)\,d\tau.$$

Cette fonction est, pour $t<0$, une fonction continue de x et t, douée de dérivées de tous les ordres, continues pour $x\gtreqless 0$. La dérivée par rapport à t est encore continue dans le voisinage de $x=0$, tandis que la dérivée par rapport à x y présente une discontinuité. $P_1(x,t)$ est d'ailleurs une fonction paire de x.

Comme nous avons pour $x\lesseqgtr 0$:

$$\lim_{t=0} Q(x,t) = \lim_{t=0}\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = 0\ldots,$$

nous voyons que pour ces valeurs de x:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2a\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}-b^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\int\limits_t^0 Q(x,\tau)\,d\tau=-\int\limits_t^0\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau}+2a\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\tau}-b^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)Q(x,\tau)\,d\tau=0.$$

$P_1(x,t)$ satisfait donc, pour toute valeur de x positive ou négative à l'équation 2. Pour les valeurs de x qui satisfont à l'inégalité $|x|>\delta\,(\delta>0)\,P_1(x,t)$ et toutes ses dérivées convergent uniformément vers zéro avec t. On a d'ailleurs pour toute valeur de x:

$$\left|P_1(x,t)+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}}\int\limits_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau}-\frac{b^2\tau}{2a}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}\right|<\frac{A^{a,b}t^2}{2}, \qquad 12.$$

$$\left|\frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x}-\frac{x\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}}\int\limits_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau}-\frac{b^2\tau}{2a}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}}\right|<\frac{A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad 13.$$

$$(0<\alpha<1,\ -T\leqq t<0)$$

$$\left|\frac{\partial^2 P_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}}\int\limits_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau}-\frac{b^2\tau}{2a}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}}+\frac{x^2\sqrt{\pi}}{16\sqrt{2a^5}}\int\limits_t^0 e^{\frac{x^2}{8a\tau}-\frac{b^2\tau}{2a}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^5}}\right|<2B^{a,b}(-t)^{\frac{3}{2}}. \qquad 14.$$

Cherchons enfin des expressions analytiques pour $P_1(x,t)$. En partant de la formule 5 nous obtenons pour $x>0$:

$$P_1(x,t)=\text{partie réelle de:}\int\limits_A^\infty\frac{e^{-K}-e^{ikx}}{ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}}\,dk=\int\limits_0^\infty\frac{e^{ikx}\left(e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-1\right)dk}{ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}},$$

$$k=\xi(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \varphi=\text{const.}\quad 0<\varphi<\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{a^2k^2-b^2}=+ib\ \text{pour}\ k=0.$$

Nous avons de même pour $x<0$:

$$P_1(x,t)=\text{partie réelle de:}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-ikx}\left(e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-1\right)dk}{ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}},$$

$$k=\xi(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \varphi=\text{const.},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4},\ \sqrt{a^2k^2-b^2}=+ib\ \text{pour}\ k=0.$$

De ces formules, nous déduisons la suivante:

$$
\left.\begin{aligned}
P_1(x,t) = \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t}-1}{ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\,dk + \int_0^{\frac{b}{a}} \Big[\frac{a}{b^2}\Big\{ e^{ak^2t} \cos k(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}) - \\
- \cos kx \Big\} + \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2k} \Big\{ e^{ak^2t} \sin k(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}) - \sin k|x| \Big\} \Big] dk,
\end{aligned}\right\} \quad 15.
$$

où les racines carrées doivent être prises avec leurs signes positifs.

La fonction:

$$2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial P_1}{\partial x}$$

présente une discontinuité pour $x = 0$. Cherchons maintenant une nouvelle solution $P_2(x,t)$ de l'équation 2, qui remplit les conditions suivantes. Elle doit être continue pour $t < 0$ et pour toute valeur de x. Pour $t = 0$ elle doit s'évanouir ainsi que les dérivées premières par rapport à x et t. Enfin, elle doit satisfaire à la condition:

$$\lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial t} - b^2\frac{\partial P_2}{\partial x}\right) = \lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} - b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right).$$

Nous avons pour $x > 0$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \text{partie réelle de: } i\int_A^{\infty} \frac{e^{-K} - e^{ikx}}{ak + \sqrt{a^2k^2-b^2}}\,dk,$$

$$k = \xi(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \varphi = \text{const.},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Or:

$$i\int_A^{\infty} \frac{e^{ikx}\,dk}{ak + \sqrt{a^2k^2-b^2}} = i\int_0^{\infty} \frac{e^{-\xi x}\,d\xi}{a\xi + \sqrt{b^2+a^2\xi^2}}.$$

Donc, pour $x > 0$:

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \text{partie réelle de: } i\int_A^{\infty} \frac{e^{-K}\,dk}{ak + \sqrt{a^2k^2-b^2}}.$$

Nous obtenons donc:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x=+0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x\,\partial t} - b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) = -\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\Big\{ak \sin\big[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\big] + \\
+ \sqrt{b^2-a^2k^2}\cos\big[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}\big]\Big\}\,dk.
\end{aligned}
$$

On obtient de même:

$$\lim_{x=-0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t}-b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)=+\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\{ak\sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]+$$
$$+\sqrt{b^2-a^2k^2}\cos[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]\}dk.$$

Donc, si nous posons:

$$ak\sin[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]+\sqrt{b^2-a^2k^2}\cos[kt\sqrt{b^2-a^2k^2}]=S(k,t),$$

$$\lim_{x=\pm 0}\left(2a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t}-b^2\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)=\mp\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}S(k,t)\,dk.$$

Posons:

$$P_2(x,t)=\int_t^0 \chi(\tau)\,Q(x,t-\tau)\,d\tau$$

et cherchons à déterminer la fonction $\chi(\tau)$ de telle manière que $P_2(x,t)$ obtienne les propriétées énumerées plus haut.

Tout d'abord, nous voyons que, si $\chi(\tau)$ est une fonction continue de τ, $P_2(x,t)$ est une fonction de x, t, continue pour toute valeur de x et pour $t<0$ et douée de dérivées continues de tous les ordres pour $t<0$ et pour $|x|>0$. Ces dérivées satisfont d'ailleurs à l'équation 2, puisque:

$$\lim_{t=0} Q(x,t)=\lim_{t=0}\frac{\partial Q}{\partial x}=\lim_{t=0}\frac{\partial Q}{\partial t}=\lim_{t=0}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial t}=0$$

pour $|x|>0$. L'inégalité 9 montre que $P_2(x,t)$ tend uniformément vers zéro avect t pour toute valeur de x. L'inégalité 10 montre de plus que l'on a pour $-T\leqq t\leqq 0$:

$$\left|\frac{\partial P_2(x,t)}{\partial x}\right|<\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2a^3}}\int_t^0 |x\chi(\tau)|e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}+\frac{b^2}{2a}(\tau-t)}\frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-t)^3}}+\frac{A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\underset{t\leqq\tau\leqq 0}{\text{Max.}}|\chi(\tau)|<$$

$$\left\{\frac{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{b^2t}{2a}}}{4\sqrt{2a^3}}\int_t^0\frac{|x|e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{(\tau-t)^{3/2}}d\tau+\frac{A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right\}\underset{t\leqq\tau\leqq 0}{\text{Max.}}|\chi(\tau)|<$$

$$\left\{\frac{\pi}{a}e^{-\frac{b^2t}{2a}}+\frac{A^{T,\alpha}(-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right\}\underset{t\leqq\tau\leqq 0}{\text{Max.}}|\chi(\tau)|.$$

Cette inégalité montre que, si $\chi(0)=0$, $\dfrac{\partial P_2}{\partial x}$ tend uniformément vers zéro avec t.

On démontre de la même manière, en s'appuyant sur l'inégalité 11, que $\left| x \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} \right|$, lorsque t tend vers zéro, reste fini pour toute valeur de x et s'annule, si $\chi(0) = 0$.

Supposons donc que $\chi(0) = 0$. Supposons en outre que $\chi(\tau)$ admette une dérivée continue. Nous avons alors pour $x \gtrless 0$:

$$\frac{\partial P_2(x,t)}{\partial t} = \int_t^0 \chi(\tau) \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial t} \partial\tau = -\int_t^0 \chi(\tau) \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial \tau} d\tau = \int_t^0 \frac{d\chi}{d\tau} Q(x, t-\tau)\, d\tau,$$

équation valable aussi pour $x = 0$. Il suit de là que $\frac{\partial P_2}{\partial t}$ pour toute valeur de x converge uniformément vers zéro avec t. Il suit aussi que $\frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial t}$ et $x \frac{\partial^3 P_2}{\partial x^2 \partial t}$ pour toute valeur de x restent finis, lorsque t tend vers 0.

Il ne reste donc qu'à montrer que l'on peut trouver une fonction continue $\chi(\tau)$, $(\tau \leq 0)$, qui s'évanouit pour $\tau = 0$, admet une dérivée continue et remplit la condition:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi(\tau) \left[2a \frac{\partial^2 Q(x,t-\tau)}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x} \right] d\tau =$$

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \left(2a \frac{d\chi}{dt} - b^2 \chi \right) \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x} d\tau = \mp \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2 t} S(k,t)\, dk.$$

Posons, pour simplifier l'écriture:

$$2a \frac{d\chi}{d\tau} - b^2 \chi = \chi_1(\tau)$$

et cherchons des expressions explicites pour les valeurs limites:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x} d\tau.$$

Nous avons d'après la formule 4:

$$\lim_{x=\pm 0} \frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x} = \pm \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk,$$

la convergence étant uniforme pour les valeurs de t et τ qui remplissent la condition $\tau - t > \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Nous avons de plus, en vertu de l'inégalité 10:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\sqrt{\pi}\, x}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)} - \frac{b^2}{2a}(\tau-t)} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau-t)^3}} \right| <$$

$$< \frac{A^{\varepsilon, \alpha} \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \operatorname*{Max.}_{t+\varepsilon \geqq \tau \geqq t} |\chi_1(\tau)|.$$

Donc:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\sqrt{\pi}\, x \chi_1(t)}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau-t)^3}} d\tau - \frac{\sqrt{\pi}\, x \chi_1(t)}{4\sqrt{2a^3}} \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau-t)^3}} d\tau + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}\, x}{4\sqrt{2a^3}} \int_t^{t+\varepsilon} \left[\chi_1(\tau) e^{\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} - \chi_1(t) \right] \frac{e^{-\frac{x^2}{8a(\tau-t)}}}{\sqrt{(\tau-t)^3}} d\tau \right| < \frac{A^{\varepsilon, \alpha} \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \operatorname*{Max.}_{t+\varepsilon \geqq \tau \geqq t} |\chi_1(\tau)|.$$

Donc:

$$\left| \int_t^{t+\varepsilon} \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau + \frac{\pi x \chi_1(t)}{2a|x|} \right| < \frac{A^{\varepsilon, \alpha} \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \operatorname*{Max.}_{t+\varepsilon \geqq \tau \geqq t} |\chi_1(\tau)| +$$

$$+ \frac{\pi}{2a} \operatorname*{Max.}_{t+\varepsilon \geqq \tau \geqq t} \left| \chi_1(\tau) e^{\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} - \chi_1(t) \right| + \frac{\sqrt{\pi}\, |x \chi_1(t)|}{2\sqrt{8a^3 \varepsilon}}.$$

Faisons maintenant x tendre vers zéro et en même temps t tendre vers une valeur quelconque t_1, plus petite que o. Soit δ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Nous pouvons alors trouver deux nombres positifs ε_1 et $\varepsilon_2 (\varepsilon_2 < \varepsilon_1)$, assez petits pour que, si $|t - t_1| < \varepsilon_2$:

$$\left| \int_t^{t_1+\varepsilon_1} \chi_1(\tau) d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}\right] dk \right| +$$

$$+ \frac{A^{\varepsilon_1+\varepsilon_2, \alpha} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \operatorname*{Max.}_{t_1+\varepsilon_1 \geqq \tau \geqq t_1 - \varepsilon_2} |\chi_1(\tau)| + \frac{\pi}{2a} \operatorname*{Max.}_{t_1+\varepsilon_1 \geqq \tau \geqq t \geqq t_1 - \varepsilon_2} \left|\chi_1(\tau) e^{\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} - \chi_1(t)\right| < \frac{\delta}{2}.$$

Puis nous pouvons trouver un nombre positif ε_3, assez petit pour que les inégalités:

$$|t - t_1| < \varepsilon_2, \; |x| < \varepsilon_3,$$

entraînent l'inégalité:

$$\left|\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0} \chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau - \frac{x}{|x|}\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,|x\,\chi_1(t)|}{\sqrt{8a^2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} < \frac{\delta}{2}.$$

On conclut de ces inégalités que l'on a pour $|t-t_1|<\varepsilon_2, |x|<\varepsilon_3$:

$$\left|\int_t^0 \chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\pi\,x\,\chi_1(t)}{2a|x|} - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{|x|}\int_t^0 \chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| \leq$$

$$\left|\int_t^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau + \frac{\pi\,x\,\chi_1(t)}{2a|x|}\right| + \left|\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{x}{|x|}\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| <$$

$$\frac{A^{\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\underset{t_1+\varepsilon_1\geqq\tau\geqq t_1-\varepsilon_2}{\text{Max.}}|\chi_1(\tau)| + \frac{\pi}{2a}\underset{t_1+\varepsilon_1\geqq\tau\geqq t_1-\varepsilon_2}{\text{Max.}}\left|\chi_1(\tau)\,e^{\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} - \chi_1(t)\right| +$$

$$+\left|\int_t^{t_1+\varepsilon_1}\chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\left|\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\frac{\partial Q(x,t-\tau)}{\partial x}d\tau - \frac{x}{|x|}\int_{t_1+\varepsilon_1}^{0}\chi_1(\tau)\,d\tau\int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)}\sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right]dk\right| +$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}\,|x\,\chi_1(t)|}{\sqrt{8a^3(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} < \delta.$$

Nous avons donc:

$$\lim_{x=\pm 0} \int_t^0 \chi_1(\tau) \frac{\partial Q(x, t-\tau)}{\partial x} d\tau =$$

$$\mp \left(\frac{\pi\, \chi_1(t_1)}{2a} - \int_{t_1}^0 \chi_1(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{a}{b}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk \right).$$

Pour déterminer la fonction $\chi_1(\tau)$, nous avons donc enfin l'équation:

$$\chi_1(t) - \frac{2a}{\pi} \int_t^0 \chi_1(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} S(k,t)\, dk. \quad 16.$$

C'est là une équation fonctionelle du type considéré par M. VOLTERRA. Nous aurons:

$$\chi_1(t) = \sum_1^\infty \chi_1^{(i)}(t), \qquad 17.$$

où:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2a}{\pi} \int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(\tau)\, d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk, \qquad 18.$$

$$i = 2, 3, 4 \ldots$$

$$\chi_1^{(1)}(t) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} S(k,t)\, dk. \qquad 19.$$

$\chi_1(t)$ admet des dérivées continues de tous les ordres. Nous avons enfin:

$$\chi(t) = \sum_1^\infty \chi^{(i)}(t), \qquad 20.$$

$$\chi^{(i)}(t) = -\frac{1}{2a} \int_t^0 e^{-\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} \chi_1^{(i)}(\tau)\, d\tau, \qquad 21.$$

$$P_2(x,t) = \int_t^0 \chi(\tau)\, Q(x, t-\tau)\, d\tau = \sum_1^\infty P_2^{(i)}(x,t), \qquad 22.$$

$$P_2^{(i)}(x,t) = \int_t^0 \chi^{(i)}(\tau)\, Q(x, t-\tau)\, d\tau. \qquad 23.$$

La fonction:

$$\psi(x,t;x_0,t_0)=\psi(x-x_0,t_0-t)=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\pi}}(P_1(x-x_0,t-t_0)-P_2(x-x_0,t-t_0))$$

est définie et continue pour toute valeur de x et pour $t\leqq t_0$. Elle admet des dérivées de tous les ordres, continues pour $x\gtreqless x_0$. Elle a les propriétés prétendues dans le voisinage de $x=x_0$ et de $t=t_0$. Reste à faire voire que, quel que soit le nombre entier et positif n_3, elle satisfait à des inégalités de la forme:

$$|\psi|,\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|,\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|,\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right|<A_{n_3}|x|^{-n_3}.$$

pour des valeurs assez grandes de $|x|$.

Je dis d'abord que, si deux nombres positifs T et R et deux nombres entiers et positifs m et n sont donnés, on peut trouver un nombre positif $A^{T,R,m,n}$ tel que l'on a pour $0\leqq t_0-t\leqq T,|x-x_0|\geqq R$:

$$\left|\frac{\partial^m Q(x-x_0,t-t_0)}{\partial x^m}\right|<\frac{A^{T,R,m,n}(t_0-t)}{|x-x_0|^n}. \tag{24}$$

Traitons d'abord le cas $m=0$. Supposons, pour fixer les idées, $x-x_0>0$. Nous aurons:

$$Q(x-x_0,t-t_0)=\text{partie réelle de:}\int\limits_A^\infty e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)+ik(x-x_0)}dk,$$

l'intégrale prise le long d'un rayon vecteur qui fait avec l'axe des nombres réels et positifs un angle positif $<\frac{\pi}{4}$.

Donc:

$$Q(x-x_0)=\text{partie réelle de:}\int\limits_A^\infty e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\frac{d}{dk}\frac{e^{ik(x-x_0)}}{i(x-x_0)}dk=$$

$$\text{partie réelle de: }\frac{i}{x-x_0}+\frac{i}{x-x_0}\int\limits_A^\infty\frac{d}{dk}e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\cdot e^{ik(x-x_0)}dk=$$

$$\text{partie réelle de: }\frac{i}{x-x_0}\int\limits_A^\infty\frac{d}{dk}e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t-t_0)}\cdot e^{ik(x-x_0)}dk.$$

Rien ne nous empêche d'intégrer par parties encore une fois et nous obtenons:

$$Q(x-x_0,t-t_0)=\text{partie réelle de: }-\frac{1}{(x-x_0)^2}\left[\frac{d}{dk}e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right]_A-$$

$$-\frac{1}{(x-x_0)^2}\int_A^\infty \frac{d^2}{dk^2}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk =$$

$$\text{partie réelle de: } -\frac{1}{(x-x_0)^2}\int_A^\infty \frac{d^2}{dk^2}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk.$$

Si l'on observe que pour $k=0$ toutes les dérivées d'ordre pair de la fonction:

$$e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}$$

par rapport à k sont réelles tandis que les dérivées d'ordre impair sont imaginaires, on voit que l'on peut répéter le même procédé autant de fois que l'on veut. On a donc:

$Q(x-x_0, t-t_0) =$ partie réelle de:

$$\frac{1}{(x-x_0)^n}\int_A^\infty i^n\frac{d^n}{dk^n}\left(e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right)e^{ik(x-x_0)}\,dk,$$

l'intégrale prise toujours le long du même rayon vecteur. On voit aisément que la fonction sous le signe d'intégration est égale à:

$$e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)+ik(x-x_0)},$$

multipliée par une fonction rationnelle de t_0-t, k et $\sqrt{b^2-a^2k^2}$, qui d'ailleurs contient t_0-t comme facteur. Ce facteur, nous l'avons fait paraître dans la formule 24. L'ayant supprimé, nous remplaçons dans tout dénominateur de notre fonction rationnelle qui ne peut être qu'une dignité de $\sqrt{b^2-a^2k^2}$, cette expression par la plus petite valeur de son module sur le chemin d'intégration. Cette valeur est d'ailleurs égale à $b\sin\varphi$. Dans les numérateurs nous remplaçons chaque nombre par son module et t_0-t par T. Dans l'exponentielle nous remplaçons l'exposant par sa partie réelle et posons $t_0-t=0$ sur la partie du chemin de l'intégration où la partie réelle de

$$ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2}$$

est positive et $t_0-t=T$ sur l'autre partie. Par tous ces changements, la valeur numérique de la partie réelle de notre intégrale s'augmente, du moins si $t_0-t\leqq T$. Nous avons donc pour les valeurs de t, qui remplissent cette condition, et pour $x>x_0$ une inégalité de la forme:

$|Q(x-x_0, t-t_0)| <$

$$< \frac{t_0-t}{(x-x_0)^n}\left[\int_0^{\xi_0} f_n^{(1)}(\xi, \sqrt{b^2+a^2\xi^2}, T)\, e^{-\text{partie r. d. } (ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})\,T-\xi \sin\varphi (x-x_0)}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi_0}^{\infty} f_n^{(2)}(\xi, \sqrt{b^2+a^2\xi^2}, T)\, e^{-\xi \sin\varphi (x-x_0)}\, d\xi\right].$$

Pour $m=0$ et pour $x>x_0$, l'inégalité 24 est donc vraie, pourvu que:

$$A^{T,R,o,n} \geqq \int_0^{\xi_0} f_n^{(1)}\, e^{-\text{partie r. d. } (ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})\,T-\xi \sin\varphi R}\, d\xi + \int_{\xi_0}^{\infty} f_n^{(2)}\, e^{-\xi \sin\varphi R}\, d\xi.$$

$Q(x-x_0, t-t_0)$ étant une fonction paire de $x-x_0$, l'inégalité 24 est encore satisfaite pour $x-x_0<-R$.

Passons au cas général. Le seul effet d'une dérivation par rapport à x est d'introduire dans notre intégrale un facteur ik. Or cela n'altère pas la propriété de la fonction de k et t_0-t sous le signe d'intégration qui est ici la fondamentale, à savoir que les dérivées d'ordre pair sont réelles pour $k=0$ et les dérivées d'ordre impair imaginaires. Nous avons donc pour $x-x_0>0$:

$\dfrac{\partial^m Q(x-x_0, t-t_0)}{\partial x^m}$ = partie réelle de:

$$\frac{1}{(x-x_0)^n}\int_A^{\infty} i^{n+m}\frac{d^n}{dk^n}\left(k^m e^{-(ak^2+ik\sqrt{b^2-a^2k^2})(t_0-t)}\right) e^{ikx}\, dk$$

et pour $x-x_0<0$ une formule analogue. D'où la formule 24.

Il résulte de cette formule que l'on a pour $t_0-t \leqq T$, $|x-x_0| \geqq k$:

$$\left|\frac{\partial^m P_1(x-x_0, t-t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{A^{T,R,m,n}(t_0-t)^2}{2|x-x_0|^n}. \qquad 25.$$

Comme:

$$P_2(x-x_0, t-t_0) = \int_{t-t_0}^{0} \chi(\tau)\, Q(x-x_0, t-t_0-\tau)\, d\tau,$$

nous voyons en outre que pour $t_0-t \leqq T$, $|x-x_0| \geqq R$:

$$\left|\frac{\partial^m P_2(x-x_0, t-t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{A^{T,R,m,n}(t_0-t)^2}{2|x-x_0|^n} \underset{0\geqq\tau\geqq t-t_0}{\text{Max.}} |\chi(\tau)|.$$

On voit donc que l'on peut trouver des nombres positifs $B^{T,R,m,n}$ tels que:

$$\left|\frac{\partial^m \psi(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^m}\right| < \frac{B^{T,R,m,n}(t_0-t)^2}{|x-x_0|^n} \tag{26.}$$

pour $t_0 - t \leqq T$, $|x-x_0| \geqq R$.
Comme:

$$\frac{\partial P_2(x-x_0, t-t_0)}{\partial t} = \int_{t-t_0}^{0} \frac{d\chi}{d\tau} Q(x-x_0, t-t_0-\tau)\, d\tau$$

il est aussi possible de trouver des nombres positifs $C^{T,R,m,n}$ tels que:

$$\left|\frac{\partial^{m+1} \psi(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^m \partial t}\right| < \frac{C^{T,R,m,n}(t_0-t)}{|x-x_0|^n} \tag{27.}$$

pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$, $|x-x_0| \geqq R$.

C'est une conséquence immédiate de ces formules que l'on peut trouver des nombres A_{n_3} tels que l'on a:

$$|\psi|, \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right| < A_{n_3} |x|^{-n_3}$$

pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ et pour des valeurs assez grandes de $|x|$.

Nous avons donc démontré que notre fonction $\psi(x,t;x_0,t_0)$ a toutes les propriétés caractéristiques de la fonction fondamentale cherchée.

Remarquons enfin que les fonctions:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t;x_0,t_0)}{\partial x \partial t} + \frac{(x-x_0)e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}},$$

$$(x-x_0)\left[\frac{\partial^3 \psi(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^2 \partial t} + \left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{4a(t_0-t)}\right) \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}}\right]$$

pour toute valeur de x, même dans le voisinage de $x = x_0$, restent finies, lorsque $t_0 - t$ tend vers 0.

3. Dans les applications a est toujours un nombre très petit. Il y a donc un grand intérêt à savoir comment se comporte $\psi(x,t;x_0,t_0)$, quand a tend vers zéro. Malheureusement, c'est là une question assez difficile que nous ne pouvons pas traiter ici dans toute son étendue. Nous chercherons dans ce paragraphe une expression asymptotique pour la fonction $P_1(x,t)$. Puis nous montrerons que les fonctions $P_2^{(i)}(x,t)$ tendent vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et de t ($t \leqq 0$) sauf peut-être sur certaines droites dans le plan des x et t

où d'aillleurs elles restent finies. Evidemment ces résultats ne suffisent pas pour faire dans la formule 3 le passage à la limite $a = 0$.

Je dis d'abord que $Q(x, t)$ et toutes ses dérivées tendent uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t qui remplissent une des conditions suivantes:

$$x + bt > \delta, \ x - bt < -\delta$$
$$(\delta > 0).$$

Nous démontrerons que $Q(x, t)$ tend uniformément vers zéro pour les valeurs de x et t qui satisfont à la première condition. Le reste de notre théorème peut être démontré de la même manière.

Partons de l'expression 6. Déterminons φ par les conditions:

$$\sin^4 \varphi - 6 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi = 0, \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Nous aurons alors sur le chemin d'intégration:

$$\text{partie réelle de: } -(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})t - ikx = -a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\xi^2 t -$$
$$-\frac{\xi t}{\sqrt{2}}\sqrt{-b^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sqrt{b^4(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi(2a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\xi^2 - b^2)^2}} +$$
$$+ \xi x \sin \varphi.$$

La racine carrée intérieure doit être prise avec son signe positif. L'extérieure doit être prise négative pour $\xi = 0$. Elle s'annule pour:

$$\xi = \xi_0 = \frac{b}{a\sqrt{2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}}.$$

Pour des valeurs de ξ plus grandes elle est positive. Sa valeur numérique décroît lorsque ξ varie de 0 jusqu'à ξ_0. Puis elle va en croissant. On voit donc que la racine carrée extérieure toujours va en croissant quand ξ varie de 0 à l'infini. Donc:

$$\text{partie réelle de: } -(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2})t - ikx >$$
$$\xi \sin \varphi (x + bt) > \xi\delta \sin \varphi.$$

Soit maintenant ε une quantité positive aussi petite que l'on veut. On peut alors déterminer un nombre R assez grand pour que:

$$\int_R^\infty e^{-\xi\delta \sin \varphi} d\xi = \frac{e^{-R\delta \sin \varphi}}{\delta \sin \varphi} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors:

$$\left|\int\limits_{Re^{i\varphi}}^{\infty} e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})\,t+ikx}\,dk\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\int\limits_{Re^{i\varphi}}^{\infty} e^{ik(x+bt)}\,dk\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut en outre déterminer un nombre positif a_0 tel que l'inégalité $a < a_0$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\int\limits_{A}^{Re^{i\varphi}} e^{-K}\,dk - \int\limits_{A}^{Re^{i\varphi}} e^{ik(x+bt)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a donc:

$$\left|\int\limits_{A}^{\infty} e^{-K}\,dk - \int\limits_{0}^{\infty} e^{ik(x+bt)}\,dk\right| < \varepsilon.$$

Or la partie réelle de:

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{ik(x+bt)}\,dk$$

est nulle. Donc:

$$|Q(x,t)| < \varepsilon,$$

si $a < a_0$. Donc:

$$\lim_{a=0} Q(x,t) = 0,$$

pour les valeurs de x et $t\,(\leq 0)$ qui remplissent la condition

$$x + bt > \delta.$$

Nous savons par le théorème précédent comment se comporte la fonction $Q(x,t)$, quand $-t$ est un nombre petit (sauf pour des valeurs de $|x|$ très petites). Nous supposerons maintenant que $-t$ soit plus grand qu'un certain nombre positif t'. Supposons, pour fixer les idées, que x soit positif ou nul et partons de l'expression 4. Posons:

$$k = \frac{-\xi}{bt}, \quad \frac{-b^2t}{a} = \beta.$$

Nous aurons:

$$Q(x,t) = -\frac{1}{bt}\int_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}-\xi\sqrt{\frac{\xi^2}{\beta^2}-1}} \cos\frac{\xi x}{bt}\, d\xi - \frac{1}{bt}\int_0^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt} + \xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) d\xi.$$

Nous chercherons la valeur limite de cette fonction lorsque β tend vers l'infini. Nous avons:

$$\left|\int_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}-\xi\sqrt{\frac{\xi^2}{\beta^2}-1}} \cos\frac{\xi x}{bt}\, d\xi\right| < \int_{\beta}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\, d\xi < \frac{1}{\beta}\int_{\beta}^{\infty} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\, d\xi = \frac{1}{2} e^{-\beta}.$$

Donc, la première intégrale dans notre expression pour $Q(x,t)$ tend vers zéro.

Suppons que β soit plus grand que 1. Soit p un nombre positif plus petit que $\frac{1}{2}\cdot$ Nous aurons:

$$\left|\int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt} + \xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) d\xi\right| < \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} d\xi < \frac{1}{\beta^{\frac{1}{2}+p}}\int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\beta} \xi e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\, d\xi < \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{2}-p} e^{-\beta^{2p}}.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos\left(\frac{\xi x}{bt} + \xi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) d\xi.$$

Elle peut s'écrire:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi\left(\frac{x}{bt}+1\right) d\xi - \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi\left(\frac{x}{bt}+1\right) d\xi +$$

$$+ \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}}\left[\left\{\cos\left[\xi\left(1-\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right]-1\right\}\cos\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right) + \left\{\sin\left[\xi\left(1 -\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - \sqrt{1-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right]-\frac{\xi^3}{2\beta^2}\right\}\sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right)\right] d\xi + \frac{1}{2\beta^2}\int_0^{\infty} \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right) d\xi -$$

$$- \frac{1}{2\beta^2}\int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^{\infty} \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin\xi\left(\frac{x}{bt}+1\right) d\xi.$$

Or:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi\beta}}{2} e^{-\frac{\beta}{4}\left(\frac{x}{bt}+1\right)^2} = \frac{b\sqrt{-\pi t}}{2\sqrt{a}} e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}},$$

$$\left| \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi \right| < \frac{\mathrm{I}}{2} \beta^{\frac{1}{2}-p} e^{-\beta^{2p}}.$$

Si $p < \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}2}$, les fonctions:

$$\sqrt{\beta}\left\{\cos\left[\xi\left(\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right]-\mathrm{I}\right\}, \quad \sqrt{\beta}\left\{\sin\left[\xi\left(\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right)\right]-\frac{\xi^3}{2\beta^2}\right\}$$

tendent uniformément vers zéro dans l'intervalle $0 \leq \xi \leq \beta^{\frac{1}{2}+p}$. Nous avons donc:

$$\left| \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \left\{ \cos \xi \left(\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) - \mathrm{I} \right\} \cos \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi \right| <$$

$$< \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\beta}} \varepsilon(\beta) \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} d\xi < \varepsilon(\beta) \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

$$\left| \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \left\{ \sin \xi \left(\mathrm{I}-\sqrt{\mathrm{I}-\frac{\xi^2}{\beta^2}}\right) - \frac{\xi^3}{2\beta^2} \right\} \sin \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi \right| <$$

$$< \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\beta}} \varepsilon(\beta) \int_0^{\beta^{\frac{1}{2}+p}} e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} d\xi < \varepsilon(\beta) \int_0^\infty e^{-u^2} du,$$

$\varepsilon(\beta)$ désignant une fonction de β qui tend vers zéro, lorsque β croît au delà de toute limite. Nous avons enfin:

$$\frac{\mathrm{I}}{2\beta^2} \int_0^\infty \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi = \frac{b^3 t^3}{2\beta^2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \cos \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, b^3 t^3}{4\beta^{3/2}} \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{\beta}{4}\left(\frac{x}{bt}+1\right)^2} = \frac{\mathrm{I}}{4} \sqrt{-\pi a^3 t^3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}},$$

$$\left| \frac{\mathrm{I}}{2\beta^2} \int_{\beta^{\frac{1}{2}+p}}^\infty \xi^3 e^{-\frac{\xi^2}{\beta}} \sin \xi \left(\frac{x}{bt}+\mathrm{I}\right) d\xi \right| < \frac{\mathrm{I}}{2} \int_{\beta^p}^\infty u^3 e^{-u^2} du.$$

Si l'on observe que les fonctions:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}},\quad \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}}$$

tendent vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t qui remplissent les conditions:

$$t \leqq 0,\ x \geqq 0,\ |x+bt| > \delta,\ \delta > 0$$

on peut du théorème démontré plus haut et de ces inégalités tirer la conséquence suivante: Pour les valeurs de x et t qui remplissent les conditions:

$$0 \geqq t \geqq -t',\ x \geqq 0,\ x - bt > \delta\ (\delta > 0)$$

on a:

$$\left| Q(x, t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} + \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 28.$$

où $\varepsilon(a)$ tend vers zéro avec a.

Comme $Q(x, t)$ est une fonction paire de x nous pouvons immédiatement du théorème précédent déduire un théorème analogue pour $x \leqq 0$. Si $x \leqq 0$, $0 \geqq t \geqq -t'$, $x + bt < -\delta\ (\delta > 0)$ on a:

$$\left| Q(x, t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}\, e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} - \frac{\sqrt{-\pi a^3 t}}{4b}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a). \qquad 29.$$

On démontre de la même manière les inégalités suivantes:

$$\left| \sqrt{a}\,\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-t}}\,\frac{\partial}{\partial x}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} + \frac{\sqrt{\pi}\, a^2 (-t)^{3/2}}{4b}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\, e^{\frac{(x+bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 30.$$

valable si $x \geqq 0$, $0 \geqq t \geqq -t'$, $x - bt > \delta$,

$$\left| \sqrt{a}\,\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-t}}\,\frac{\partial}{\partial x}\, e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} - \frac{\sqrt{\pi}\, a^2 (-t)^{3/2}}{4b}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\, e^{\frac{(x-bt)^2}{4at}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 31.$$

valable pour $x \leqq 0$, $0 \geqq t \geqq -t'$, $x + bt < -\delta$.

Il résulte de ces inégalités que l'on a pour $x > \delta$, $0 \geqq t \geqq -t'$:

$$\left| P_1(x, t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\, \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} - \frac{\sqrt{\pi a^3}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\, e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 32.$$

$$\left| \sqrt{a}\,\frac{\partial P_1(x, t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x}\, e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\, \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} - \frac{\sqrt{\pi a^2}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\, e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 33.$$

et pour $x < -\delta$, $0 \geqq t \geqq t'$:

$$\left| P_1(x,t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi a^3}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a), \qquad 34.$$

$$\left| \sqrt{a} \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} + \frac{\sqrt{\pi} a^2}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau \right| < \varepsilon(a). \qquad 35.$$

On peut remarquer que les fonctions:

$$a^2 \int_t^0 \frac{\partial^4}{\partial x^4} e^{\frac{(x\pm b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau,$$

dans les formules 33 et 35 tendent vers zéro avec a. On a donc aussi:

$$\left| \sqrt{a} \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} \right| < \varepsilon(a), \qquad 33^*.$$

$$\left| \sqrt{a} \frac{\partial P_1(x,t)}{\partial x} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{(x-b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} \right| < \varepsilon(a). \qquad 35^*.$$

Considérons maintenant la fonction $P_1(x,t)$ dans le voisinage de la valeur $x = 0$. Nous avons d'après la formule 15:

$$P_1(x,t) = \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} - 1}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} \left[\frac{a}{b^2} \left\{ e^{ak^2t} \cos k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos kx \right\} + \frac{\sqrt{b^2-a^2k^2}}{b^2 k} \left\{ e^{ak^2t} \sin k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \sin k|x| \right\} \right] dk,$$

les racines carrées prises avec leurs signes positifs.

Or:

$$\left| \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{e^{(ak^2+k\sqrt{a^2k^2-b^2})t} - 1}{ak^2 + k\sqrt{a^2k^2-b^2}} \cos kx\, dk \right| < \frac{1}{a} \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} \frac{dk}{k^2} < \frac{1}{b},$$

$$\left| \frac{a}{b^2} \int_0^{\frac{b}{a}} \left\{ e^{ak^2t} \cos k\left(|x| + t\sqrt{b^2-a^2k^2}\right) - \cos kx \right\} dk \right| < \frac{2a}{b^2} \int_0^{\frac{b}{a}} dk = \frac{2}{b},$$

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} \sin k|x| dk = \int_0^{b|x|} \frac{\sqrt{b^2 x^2 - \eta^2}}{b^2 |x|} \sin \frac{\eta}{a} \frac{d\eta}{\eta}.$$

Nous avons donc:

$$\lim_{a=0} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} \sin k|x| dk = \frac{\pi \sqrt{b^2 x^2}}{2 b^2 |x|} = \frac{\pi}{2b},$$

si $|x| > 0$,

$$= 0,$$

si $x = 0$. On a d'ailleurs pour toute valeur de x:

$$\left| \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} \sin k|x| dk \right| < \frac{1}{b} \int_0^{\pi} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Reste à étudier l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t} \sin k(|x| + t\sqrt{b^2 - a^2 k^2}) dk.$$

Elle peut s'écrire:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t} [\sin k(|x| + t\sqrt{b^2 - a^2 k^2}) - \sin k(|x| + bt)] dk +$$

$$+ \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t} \sin k(|x| + bt) dk.$$

Or:

$$|\sin k(|x| + t\sqrt{b^2 - a^2 k^2}) - \sin k(|x| + bt)| =$$

$$2 \left| \sin \frac{1}{2} kt (b - \sqrt{b^2 - a^2 k^2}) \cos k \left(|x| + \frac{t}{2}(b + \sqrt{b^2 - a^2 k^2}) \right) \right| <$$

$$- kt(b - \sqrt{b^2 - a^2 k^2}) < - \frac{a^2 k^3 t}{b} \underset{0 \leq x \leq 1}{\text{Max.}} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = - \frac{a^2 k^3 t}{b}.$$

Donc:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t}[\sin k(|x| + t\sqrt{b^2 - a^2 k^2}) - \sin k(|x| + bt)]\, dk\right|$$

$$< -\frac{a^2 t}{b^3}\int_0^{\frac{b}{a}} k^2 \sqrt{b^2 - a^2 k^2}\, e^{ak^2 t}\, dk < -\frac{1}{2b}\int_0^{\frac{b}{a}} 2atk e^{ak^2 t}\, dk = \frac{1}{2b}\left(1 - e^{\frac{b^2 t}{a}}\right) < \frac{1}{2b}.$$

Enfin:

$$\left|\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{\sqrt{b^2 - a^2 k^2}}{b^2 k} e^{ak^2 t} \sin k(|x| + bt)\, dk\right| < \frac{1}{b}\int_0^{\pi} \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta.$$

Il résulte de ces inégalités que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que:

$$|P_1(x, t)| < \frac{A_6}{b} \tag{36.}$$

pour toute valeur de x, de t (≤ 0), de a (≥ 0) et de b (> 0).

La fonction $P_2(x, t)$ est définie par les équations 16—23. Pour voir comment elle se comporte quand a tend vers zéro, nous remarquons d'abord que les intégrales:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2ak}{\pi} e^{-ak^2(\tau - t)} \sin[k(\tau - t)\sqrt{b^2 - a^2 k^2}]\, dk,$$

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{ak^2 t} S(k, t)\, dk$$

peuvent s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^{b} l e^{-\frac{l^2(\tau - t)}{a}} \sin\left[\frac{l(\tau - t)}{a}\sqrt{b^2 - l^2}\right] dl \tag{37.}$$

et:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{b} e^{\frac{l^2 t}{a}}\left\{l \sin\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right] + \sqrt{b^2 - l^2}\cos\left[\frac{lt\sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right]\right\} dl. \tag{38.}$$

Cela étant, je dis que $\chi_1^{(i)}(t)$ et par conséquent $\chi_1(t)$ ne contiennent a et t que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Pour déterminer $\chi_1^{(i)}(t)$ nous avons les équations:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2a}{\pi}\int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(\tau)\,d\tau \int_0^{\frac{b}{a}} k e^{-ak^2(\tau-t)} \sin\left[k(\tau-t)\sqrt{b^2-a^2k^2}\right] dk,$$

$$\chi_1^{(1)}(t) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t} S(k,t)\,dk.$$

La dernière équation montre immédiatement que $\chi_1^{(1)}(t)$ ne contient a et t que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Supposons que cela soit encore vrai pour $\chi_1^{(2)}(t), \chi_1^{(3)}(t)\cdots \chi_1^{(i-1)}(t)$. Posons:

$$\chi_1^{(i-1)}(t) = \bar{\chi}_1^{(i-1)}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Notre formule pour $\chi_1^{(i)}(t)$ peut s'écrire:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{-\frac{t}{a}} \bar{\chi}_1^{(i-1)}\left(\frac{t}{a}+u\right) du \int_0^b l e^{-l^2u} \sin\left[lu\sqrt{b^2-l^2}\right] dl.$$

Elle montre que $\chi_1^{(i)}(t)$ ne contient a que dans la combinaison $\frac{t}{a}$. Notre théorème étant vrai pour $n=1$, l'est donc aussi pour $n=2$, $n=3$ etc. Nous pouvons donc poser:

$$\chi_1^{(n)}(t) = \bar{\chi}_1^{(n)}\left(\frac{t}{a}\right),\ \chi_1(t) = \bar{\chi}_1\left(\frac{t}{a}\right).$$

La formule 21 qui donne $\chi^{(i)}(t)$, peut maintenant s'écrire:

$$\chi^{(i)}(t) = -\frac{1}{2a}\int_t^0 e^{-\frac{b^2}{2a}(\tau-t)} \bar{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) d\tau = -\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2u}{2}} \bar{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{t}{a}+u\right) du.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$\chi^{(i)}(t) = \bar{\chi}^{(i)}\left(\frac{t}{a}\right).$$

Pour étudier comment se comportent les fonctions $\chi_1^{(i)}(t)$, quand a tend vers zéro, ou, ce qui revient au même, quand $-t$ tend vers l'infini, il faut maintenant approfondir l'étude des intégrales 37 et 38. Commençons par la première. Posons:

$$\frac{2}{\pi a}\int_0^b l e^{-\frac{l^2(\tau-t)}{a}} \sin\left[\frac{l(\tau-t)}{a}\right] \sqrt{b^2-l^2}\, dl = \frac{2}{\pi a} F(u),$$

où:

$$u = \frac{\tau - t}{a}.$$

Je dis que, lorsque u croît au delà de toute limite, $F(u)$, qui est une fonction continue de u pour toute valeur de u, tend vers zéro de telle manière que l'intégrale:

$$\int_0^\infty |F(u)|\, du$$

a un sens déterminé. En effet, nous avons:

$$F(u) = \int_0^b l e^{-l^2 u}\{\sin[lu\sqrt{b^2-l^2}] - \sin blu\}\, dl + \int_0^\infty l e^{-l^2 u} \sin blu\, dl - \int_b^\infty l e^{-l^2 u} \sin blu\, dl.$$

$$\left|\int_0^b l e^{-l^2 u}\{\sin[lu\sqrt{b^2-l^2}] - \sin blu\}\, dl\right| =$$

$$2\left|\int_0^b l e^{-l^2 u} \sin\frac{1}{2} lu\{b - \sqrt{b^2-l^2}\} \cos\frac{1}{2} lu\{b + \sqrt{b^2-l^2}\}\, dl\right| <$$

$$2\int_0^b l e^{-l^2 u}\left|\sin\frac{1}{2} lu\{b-\sqrt{b^2-l^2}\}\right| dl <$$

$$\int_0^b ul^4 e^{-l^2 u}\, dl.\ \underset{0 \leqq l \leqq b}{\mathrm{Max.}} \frac{b-\sqrt{b^2-l^2}}{l^2} = \frac{1}{b u^{3/2}}\int_0^{b\sqrt{u}} m^4 e^{-m^2}\, dm < \frac{1}{b u^{3/2}}\int_0^\infty m^4 e^{-m^2}\, dm,$$

$$\left|\int_0^\infty l e^{-l^2 u} \sin blu\, dl\right| = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{u}} b e^{-\frac{b^2 u}{4}},$$

$$\left|\int_b^\infty l e^{-l^2 u} \sin blu\, dl\right| < \frac{1}{2u} e^{-b^2 u}.$$

Donc:

$$|F(u)| < \frac{1}{b u^{3/2}} \int_0^\infty m^4 e^{-m^2} dm + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{u}} b e^{-\frac{b^2 u}{4}} + \frac{1}{2u} e^{-b^2 u} < \frac{A_7}{u^{3/2}}.$$

L'intégrale:

$$\int_0^\infty |F(u)|\, du$$

a donc bien un sens déterminé.

Je dis maintenant que l'on peut trouver un nombre positif B, tel que l'on a pour toute valeur de a positive ou nulle et pour toute valeur de i entière et positive et plus grande que 1:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

On a en effet:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi a} \int_t^0 \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau.$$

Donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| \leqq \frac{2}{\pi a} \int_t^0 \left| F\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\right| d\tau . \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|$$

$$< \frac{2}{\pi} \int_0^\infty |F(u)|\, du . \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Si nous posons:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty |F(u)|\, du = B,$$

nous avons donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Démontrons encore une autre inégalité qui nous sera utile dans les pages suivantes. On a, α étant un nombre positif plus petit que 1:

$$\chi_1^{(i)}(t) = \frac{2}{\pi a}\int_t^{\alpha t} \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau + \frac{2}{\pi a}\int_{\alpha t}^{0} \chi_1^{(i-1)}(\tau) F\left(\frac{\tau - t}{a}\right) d\tau.$$

Donc:

$$\begin{aligned}
|\chi_1^{(i)}(t)| &< B \operatorname*{Max.}_{\alpha t \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{2}{\pi a} \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| \int_{\alpha t}^{0} \left| F\left(\frac{\tau - t}{a}\right)\right| d\tau \\
&< B \operatorname*{Max.}_{\alpha t \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{2}{\pi} \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| \int_{\alpha t}^{0} \frac{A_7 \sqrt{a}}{(\tau - t)^{3/2}} d\tau \\
&= B \operatorname*{Max.}_{\alpha t \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4 A_7 \sqrt{a}}{\pi \sqrt{-t}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} - 1\right) \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| \\
&< B \operatorname*{Max.}_{\alpha t \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4 A_7}{\pi \sqrt{1-\alpha}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \operatorname*{Max.}_{0 \geqq \tau \geqq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.
\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{a k^2 t} S(k, t)\, dk = \frac{2}{\pi} \int_0^{b} e^{\frac{l^2 t}{a}} \left\{ l \sin\left[\frac{l t \sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right] + \sqrt{b^2 - l^2} \cos\left[\frac{l t \sqrt{b^2 - l^2}}{a}\right] \right\} dl.$$

Nous avons:

$$\left| \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{a k^2 t} S(k, t)\, dk \right| < \frac{4b}{\pi} \int_0^{b} e^{\frac{l^2 t}{a}} dl = \frac{4b}{\pi} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \int_0^{\frac{b\sqrt{-t}}{\sqrt{a}}} e^{-l^2} dl.$$

On voit donc que notre intégrale pour toute valeur de t, plus petite que 0, tend vers zéro avec a et que l'on peut trouver deux nombres positifs B_1 et C_1, tels que:

$$\left.\begin{aligned}
\left| \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{a k^2 t} S(k, t)\, dk \right| &< B_1, \\
\left| \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{2a}{\pi} e^{a k^2 t} S(k, t)\, dk \right| &< \frac{C_1 \sqrt{a}}{\sqrt{-t}}
\end{aligned}\right\} \qquad 39.$$

Les inégalités ci-dessus suffisent pour démontrer le théorème suivant: pour toute valeur de n entière et positive il existe deux nombres positifs, B_n et C_n, tels que:

$$|\chi_1^{(n)}(t)| < B_n,\ |\chi_1^{(n)}(t)| < \frac{C_n\sqrt{a}}{\sqrt{-t}}.$$

Tout d'abord, ce théorème est vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour $n = i - 1$. Nous avons d'après les inégalités précédentes:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{0 \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|,$$

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B \operatorname*{Max.}_{\alpha t \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)| + \frac{4A_7}{\pi\sqrt{1-\alpha}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \operatorname*{Max.}_{0 \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|$$

$$< \frac{BC_{i-1}\sqrt{a}}{\sqrt{-\alpha t}} + \frac{4A_7}{\pi\sqrt{1-\alpha}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} \operatorname*{Max.}_{0 \geq \tau \geq t} |\chi_1^{(i-1)}(\tau)|.$$

Donc:

$$|\chi_1^{(i)}(t)| < B_i,\ |\chi_1^{(i)}(t)| < \frac{C_i\sqrt{a}}{\sqrt{-t}},$$

où:

$$B_i = B\,B_{i-1} = B^{i-1}B_1,$$

$$C_i = \frac{BC_{i-1}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{4A_7 B_{i-1}}{\pi\sqrt{1-\alpha}}.$$

Notre théorème étant vrai pour $n = 1$, il est donc encore valable pour $n = 2$, $n = 3$ etc.

On conclut des inégalités ci-dessus:

$$|\chi^{(i)}(t)| = \left|\overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{t}{a}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2u}{2}}\overline{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{t}{a}+u\right)du\right| < \frac{B_i}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{b^2u}{2}}du = \frac{B_i}{b^2}.$$

$$|\chi^{(i)}(t)| = \left|-\frac{1}{2}\int_0^{-\frac{\alpha t}{a}} e^{-\frac{b^2u}{2}}\overline{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{t}{a}+u\right)du - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\alpha t}{a}}^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2u}{2}}\overline{\chi}_1^{(i)}\left(\frac{t}{a}+u\right)du\right|$$

$$< \frac{C_i}{b^2\sqrt{1-\alpha}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} + \frac{B_i}{2}\int_{-\frac{\alpha t}{a}}^{-\frac{t}{a}} e^{-\frac{b^2u}{2}}du < \frac{C_i}{b^2\sqrt{1-\alpha}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-t}} - \frac{B_i t}{2a}e^{\frac{b^2\alpha t}{2a}} < \frac{D_i\sqrt{a}}{\sqrt{-t}},$$

si:

$$D_i = \frac{C_i}{b^2 \sqrt{1-\alpha}} + \frac{B_i}{b^3} \sqrt{\left(\frac{3}{\alpha e}\right)^3}.$$

Considérons maintenant les fonctions:

$$P_2^{(i)}(x, t) = \int_t^0 \bar{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) Q(x, t-\tau)\, d\tau.$$

Je dis que l'on peut trouver des nombres positifs E_i, tels que:

$$|P_2^{(i)}(x, t)| < E_i \tag{40}$$

pour toutes valeurs de x, t ($\leqq 0$) et a ($\geqq 0$). En effet:

$$|Q(x,t)| < \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} e^{\left(ak^2 + k\sqrt{a^2k^2 - b^2}\right)t}\, dk + \int_0^{\frac{b}{a}} e^{ak^2t}\, dk$$

$$< \int_0^{\infty} e^{ak^2t}\, dk < \frac{1}{\sqrt{-at}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-at}}.$$

Donc:

$$|P_2^{(i)}(x, t)| < \frac{D_i \sqrt{\pi}}{2} \int_t^0 \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau - t)}} = \frac{D_i \pi^{3/2}}{2}.$$

L'inégalité 40 est donc valable, si:

$$E_i = \frac{D_i \pi^{3/2}}{2}.$$

Soit maintenant $x > 0$. Nous avons d'après l'inégalité 28:

$$\left| P_2^{(i)}(x,t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 \bar{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)}} \frac{dt}{\sqrt{\tau - t}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}\, a^{3/2}}{4b} \int_t^0 \bar{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{[x+b(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)}} \sqrt{\tau - t}\, d\tau \right| < \frac{B_i\, \varepsilon(a)(-t)}{b^2}.$$

Or on a, δ étant un nombre positif, aussi petit que l'on veut:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right) e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t}}\right| < \underset{-\frac{\delta}{a} \geqq u \geqq \frac{t}{a}}{\text{Max.}} \left|\overline{\chi}^{(i)}(u)\right| \int\limits_t^{-\delta} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau-t)}} +$$

$$+\int\limits_{-\delta}^0 \left|\overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\right| e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{a(\tau-t)}} < \frac{D_i}{\sqrt{\delta}} \int\limits_t^{-\delta} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t}} +$$

$$+ D_i \int\limits_{-\delta}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}}.$$

Comme la fonction $e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}$ tend uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x, t et τ, qui remplissent les conditions:

$$\delta \leqq -\tau \leqq -t, \; |x-b(\tau-t)| > \varepsilon \; (\varepsilon > 0)$$

et comme la valeur numérique de cette fonction pour les valeurs de x, t et τ que nous avons à considérer ici est au plus égal à 1, la première intégrale tend uniformément vers zéro avec a pour toutes les valeurs de x et t, qui satisfont aux conditions:

$$x \geqq 0, -\delta \geqq t \geqq -T.$$

Considérons la seconde intégrale. Soit $0 \leqq x \leqq -bt - b\varepsilon \; (\varepsilon > 0)$. Prenons $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Nous aurons:

$$\int\limits_{-\delta}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} < e^{\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}} \int\limits_t^0 \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} = \pi e^{\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}}.$$

Soit d'autre part $x \geqq -bt + b\varepsilon \; (\varepsilon > 0)$. Nous aurons:

$$\int\limits_{-\delta}^0 e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(\tau-t)}} < \pi e^{\frac{b^2\varepsilon^2}{4at}}.$$

Pour les valeurs de x et t, qui satisfont aux conditions:

$$0 \leqq -t \leqq T, \; |x+bt| > \varepsilon, \; (\varepsilon > 0),$$

notre intégrale tend donc uniformément vers zéro avec a.

Pour étudier la fonction:

$$a^{3/2}\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \sqrt{\tau-t}\, d\tau$$

nous remarquons d'abord que l'on a:

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} = \left\{\frac{3[x-b(\tau-t)]}{4a^2(\tau-t)^2} - \frac{[x-b(\tau-t)]^3}{8a^3(\tau-t)^3}\right\} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}.$$

Soit A_8 un nombre positif assez grand pour que:

$$|x|^{3/2} e^{-x^2} < A_8, \quad |x|^{7/2} e^{-x^2} < A_8$$

pour toute valeur de x. Nous avons alors:

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}}\right| < \frac{4\sqrt{2}\, A_8}{a^{5/4}(\tau-t)^{5/4}[|x-b(\tau-t)|]^{3/2}}.$$

Soit d'abord $x \geqq -bt$. Nous aurons:

$$a^{3/2}\left|\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \sqrt{\tau-t}\, d\tau\right| <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}\, a^{1/4} A_8 B_i}{b^2}\int_t^{t+\frac{x}{b}} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{3/4}[x-b(\tau-t)]^{3/2}} = \frac{4\sqrt{2}\, a^{1/4} A_8 B_i}{x^{1/4} b^{9/4}}\int_0^1 \frac{du}{u^{3/4}(1-u)^{3/2}}.$$

Si au contraire $x \leqq -bt$, nous aurons:

$$a^{3/2}\left|\int_t^0 \overline{\chi}^{(i)}\left(\frac{\tau}{a}\right)\frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{-\frac{[x-b(\tau-t)]^2}{4a(\tau-t)}} \sqrt{\tau-t}\, d\tau\right| <$$

$$< \frac{4\sqrt{2}\, a^{1/4} A_8 B_i}{x^{1/4} b^{9/4}}\int_0^1 \frac{du}{u^{3/4}(1-u)^{1/2}} + \frac{4\sqrt{2}\, a^{1/4} A_8 B_i}{x^{1/4} b^{9/4}}\int_1^\infty \frac{du}{u^{3/4}(u-1)^{3/2}}.$$

De toutes ces inégalités et des inégalités analogues valables pour $x \leqq 0$ on peut déduire le théorème suivant: pour les valeurs de x et t, qui remplissent les conditions:

$$0 \leqq -t \leqq T,\ |x| > \varepsilon,\ |x+bt| > \varepsilon,\ |x-bt| > \varepsilon,\ (\varepsilon > 0)$$

la fonction $P_2^{(i)}(x, t)$ tend uniformément vers zéro avec a.

Reprenons l'équation 3. Admettons que la fonction $\varphi(x, 0)$ soit douée de dérivées continues des deux premiers ordres. Supposons en outre pour plus de simplicité que les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi|_{t=0}\, dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|_{t=0}\, dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{t=0} dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right|_{t=0} dx$$

soient convergentes. Nous avons pour $|x - x_0| > 0$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt.$$

Donc:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx = -\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \left[\varphi\left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt\right)\right]_{t=0} dx +$$

$$+ \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx - \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \left[\varphi\left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dt\right)\right]_{t=0} dx =$$

$$= \left[\varphi \int_t^{t_0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]_{\substack{t=0 \\ x=x_0-\varepsilon}} - \left[\varphi \int_t^{t_0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]_{\substack{t=0 \\ x=x_0+\varepsilon}} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dt\right)\right]_{t=0} dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} dx +$$

$$+ \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial \psi}{\partial x} + b^2 \int_t^{t_0} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dt\right)\right]_{t=0} dx.$$

Le passage à la limite $\varepsilon = 0$ s'effectue sans difficulté à l'aide de l'inégalité 10, si l'on observe en outre que l'on a pour $t < t_0$:

$$\lim_{x=x_0 \pm 0} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - b^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0.$$

Nous obtenons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}dx = 2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial x}+b^2\int_t^{t_0}\frac{\partial\psi}{\partial x}dt\right)\right]_{t=0}dx =$$

$$= 2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(2a\psi+b^2\int_t^{t_0}\psi\,dt\right)\right]_{t=0}dx.$$

Donc:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,t_0)=2\sqrt{2a\pi}\,\varphi(x_0,0)-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}+b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\int_t^{t_0}\psi\,dt\right]_{t=0}dx-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0}\psi\Phi\,dx\,dt.$$

Donc:

$$\varphi(x_0,t_0)=\varphi(x_0,0)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_1(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}+b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0}\int_0^{t_0}P_1(x-x_0,\tau-t_0)\,d\tau\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_2(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}+b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0}\int_0^{t_0}P_2(x-x_0,\tau-t_0)\,d\tau\right]dx-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0}[P_1(x-x_0,t-t_0)-P_2(x-x_0,t-t_0)]\,\Phi(x,t)\,dx\,dt.$$

Cherchons la valeur limite pour $a=0$ des termes qui dans cette formule dépendent de la fonction P_1. Nous avons pour $x>0$, en vertu de l'inégalité 32:

$$\lim_{a=0}P_1(x,t)=-\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}+\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}\,a^{3/2}}{4b}\int_t^0\frac{\partial^3}{\partial x^3}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\sqrt{-\tau}\,d\tau.$$

Si d'abord $x>-bt$, on voit immédiatement que les intégrales à droite convergent vers zéro avec a. Soit donc $x<-bt$. Nous aurons, si $0<\varepsilon<\frac{x}{b}$:

$$\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}=\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\int_{-\frac{x}{b}-\varepsilon}^{-\frac{x}{b}+\varepsilon}e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}=$$

$$=\lim_{a=0}\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}.$$

Soit δ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Déterminons un nombre positif A_9 tel que:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4(x+b\varepsilon)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-b\varepsilon}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4(x+b\varepsilon)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-b\varepsilon}}<\frac{\delta}{3}.$$

On a alors aussi:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}<\frac{\delta}{3}.$$

Soit a_0 un nombre positif plus petit que:

$$\frac{\varepsilon^2 b^3}{A_9^2}$$

et assez petit pour que l'inégalité $a<a_0$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right|<\frac{\delta}{3}.$$

Nous aurons pour $a<a_0$:

$$\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right|<$$

$$<\left|\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}-\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-A_9}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}\right|+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{b^3}{a}}}^{+A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4\left(x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi\right)}}\frac{d\xi}{\sqrt{x-\sqrt{\frac{a}{b}}\xi}}+$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{A_9}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{\pi}}{2b}\int_{-\infty}^{-A_9} e^{-\frac{\xi^2}{4x}}\frac{d\xi}{\sqrt{x}}<\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\delta.$$

Donc:

$$\lim_{a=0} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \int_t^0 e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4x}} \frac{d\xi}{\sqrt{x}} = \frac{\pi}{b},$$

si $x < -bt$.

On démontre de la même manière:

$$\lim_{a=0} \frac{\sqrt{\pi}\, a^{3/2}}{4b} \int_t^0 \frac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\frac{(x+b\tau)^2}{4a\tau}} \sqrt{-\tau}\, d\tau = 0$$

pour toute valeur de x positive ou nulle.

$P_1(x, t)$ étant une fonction paire de x on a donc:

$$\lim_{a=0} P_1(x, t) = 0, \text{ si } |x| > -bt,$$

$$\lim_{a=0} P_1(x, t) = -\frac{\pi}{b}, \text{ si } |x| < -bt.$$

Rappelons d'ailleurs qu'il existe une limite supérieure finie pour $|P_1(x, t)|$, qu'elle ne dépasse pour aucune valeur de a. Nous avons donc:

$$\lim_{a=0} \int_0^{t_0} P_1(x - x_0, \tau - t_0)\, d\tau = -\frac{\pi}{b}\left(t_0 \mp \frac{1}{b}(x - x_0)\right) \text{ ou } = 0,$$

suivant que: $0 < x - x_0 < bt_0$ ou: $-bt_0 < x - x_0 < 0$ ou $|x - x_0| > bt_0$. Donc enfin:

$$\lim_{a=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[P_1(x - x_0, -t_0)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} + b^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \int_0^{t_0} P_1(x - x_0, \tau - t_0)\, d\tau\right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx - \frac{b}{2} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \left(t_0 + \frac{1}{b}(x - x_0)\right) dx - \frac{b}{2} \int_{x_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0} \left(t_0 - \frac{1}{b}(x - x_0)\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \frac{1}{2} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{t=0} dx - \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{t=0} dx =$$

$$= -\frac{1}{2b} \int_{x_0 - bt_0}^{x_0 + bt_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx + \varphi(x_0, 0) - \frac{1}{2} \varphi(x_0 + bt_0, 0) - \frac{1}{2} \varphi(x_0 - bt_0, 0).$$

Nous avons d'un autre côté:

$$\lim_{a=0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{t_0} P_1(x-x_0,\, t-t_0)\, \Phi(x,t)\, dx\, dt = -\frac{1}{2b}\int_0^{t_0} dt \int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)} \Phi(x,t)\, dx.$$

Donc:

$$-\lim_{a=0}\Bigg\{-\varphi(x_0,0)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[P_1(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}+b^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{t=0}\int_0^{t_0} P_1(x-x_0,\tau-t_0)\,d\tau\right]dx+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0} P_1(x-x_0,\, t-t_0)\,\Phi(x,t)\,dx\,dt\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{2b}\int_{x_0-bt_0}^{x_0+bt_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx+\frac{1}{2}\varphi(x_0+bt_0,0)+\frac{1}{2}\varphi(x_0-bt_0,0)+\frac{1}{2b}\int_0^{t_0}dt\int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)}\Phi(x,t)\,dx.$$

Il résulte des inégalités obtenues plus haut que les intégrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_2^{(i)}(x-x_0,-t_0)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^{t_0}P_2^{(i)}(x-x_0,\tau-t_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{t_0}P_2^{(i)}(x-x_0,\,t-t_0)\,\Phi(x,t)\,dx\,dt$$

pour toute valeur de i tendent vers zéro avec a. Supposons pour un moment qu'il en soit de même pour la somme de toutes ces intégrales. Nous aurons dans cette hypothèse:

$$\lim_{a=0}\varphi(x_0,t_0)=\frac{1}{2b}\int_{x_0-bt_0}^{x_0+bt_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}dx+\frac{1}{2}\varphi(x_0+bt_0,0)+\frac{1}{2}\varphi(x_0-bt_0,0)+$$

$$+\frac{1}{2b}\int_0^{t_0}dt\int_{x_0-b(t_0-t)}^{x_0+b(t_0-t)}\Phi(x,t)\,dx.$$

Or c'est là exactement la solution de l'équation:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\Phi(x,t),$$

qui pour $t = 0$ prend les valeurs données $\varphi(x, 0)$ et dont la dérivée par rapport à t pour $t = 0$ prend les valeurs $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0}$. Il paraît donc extrêmement probable que l'on a réellement:

$$\lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} P_2(x - x_0, -t_0) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t=0} dx = \lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{t_0} P_2(x - x_0, -t_0) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} d\tau = 0,$$

$$\lim_{a=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{t_0} P_2(x - x_0, t - t_0) \Phi(x, t)\, dx\, dt = 0.$$

Ajoutons que cela serait démontré si l'on pouvait montrer que la constante que nous avons appelée B est plus petite que 1.

4. Nous allons maintenant appliquer les résultats obtenus au problème du mouvement rectiligne d'un fluide visqueux et compressible. Reprenons le système A. Supposons $Y = Z = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial z} = v = w = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$. Nous aurons:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad 41.$$

Si l'on suppose qu'il soit permis de dériver ces équations une fois, on obtient:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^3 \sigma}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{\partial X}{\partial x}.$$

En posant:

$$\lambda + 2\mu = 2a, \quad \frac{1}{\varkappa^2} = b^2, \quad \sigma = \varphi, \quad -\frac{\partial X}{\partial x} = \Phi,$$

nous retrouvons l'équation 1.

Soit donnée, dans le plan des x, t, une aire Ω, bornée d'une courbe qui admet en chaque point (sauf peut-être dans un nombre fini de points exceptionnels) une tangente déterminée. Soit x_0, t_0 un point quelconque dans Ω. Traçons la droite $t = t_0 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ et supposons pour simplifier que, ε étant assez petit, elle ne coupe la frontière que dans deux points différents, A_ε et A'_ε. Soit C un point de la courbe frontière, situé au-dessous de la droite $t = t_0 - \varepsilon$. Traçons enfin une demi-droite $x = x_0$, $t \leqq t_0$. Nous obtenons de cette manière deux parties de Ω qui sont bornées par la ligne droite $t = t_0 - \varepsilon$, par la demi-droite $x = x_0$ et par des arcs de la courbe frontière. Formons les équations:

$$\iint\left[\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}-\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2a\left(\psi\frac{\partial^3\sigma}{\partial x^2\partial t}+\sigma\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t}\right)+b^2\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)-\psi\Phi\right]dx\,dt=0,$$

l'intégration étendue à chacune de ces deux parties. Nous aurons en intégrant par parties et en prenant la somme des deux intégrales:

$$\int\limits_{A_\varepsilon}^{A'_\varepsilon}\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}+2a\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)dx=\int\limits_{A_\varepsilon CA'_\varepsilon}\left\{\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}+2a\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)dx+\right.$$

$$\left.+\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt\right\}+\iint\limits_{t\leq t_0-\varepsilon}\psi\Phi\,dx\,dt.$$

Le passage à la limite $\varepsilon=0$ donne:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0,t_0)=\int\limits_{A_0CA'_0}\left\{\left[\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt\right\}+\iint\limits_{t\leq t_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt. \tag{42}$$

Si en particulier l'arc $A_0CA'_0$ est formé de trois droites A_0B, BB' et $B'A'_0$, A_0B et $B'A'_0$ étant parallèles à l'axe de t et BB' parallèle à l'axe de x, nous avons:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0,t_0)=\int\limits_{B}^{B'}\left[\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]dx+\int\limits_{B}^{A_0}\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt-\int\limits_{B'}^{A'_0}\left[2a\left(\psi\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+\sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-b^2\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\sigma\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]dt+\iint\limits_{A_0BB'A'_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{B}^{B'}\left(\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}-\psi\frac{\partial\sigma}{\partial t}-2a\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx-2a\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_B+2a\left(\psi\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_{B'}+$$

$$+\int\limits_{B}^{A_0}\left[\sigma\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+b^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial t}+b^2\psi\right)\right]dt-$$

$$-\int\limits_{B'}^{A'_0}\left[\sigma\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+b^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial\sigma}{\partial x}\left(2a\frac{\partial\psi}{\partial t}+b^2\psi\right)\right]dt+\iint\limits_{A_0BB'A'_0}\psi\frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dt.$$

Soit $\psi_0(x, t; x_0, t_0)$ une solution de l'équation 2, régulière dans la partie de Ω qui est située au-dessous de la droite $t = t_0$ et qui prend sur les droites $A_0 B$ et $A'_0 B'_0$ les mêmes valeurs que $\psi(x, t; x_0, t_0)$. Posons:

$$\psi(x, t; x_0, t_0) = \psi_0(x, t; x_0, t_0) + \psi_1(x, t; x_0, t_0).$$

Nous aurons:

$$2\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, t_0) = \int_B^{B'} \left(\sigma \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \psi_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2a \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) dx +$$

$$+ \int_B^{A_0} \sigma \left(2a \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) - \int_{B'}^{A'_0} \sigma \left(2a \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) dt + \iint_{A_0 B B' A'_0} \psi_1 \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dt.$$

La méthode des images permet de former sans difficultés la fonction ψ_1. Cette fonction connue, notre formule résout le problème de déterminer la densité dans un point quelconque, situé entre deux plans, *orthogonaux à la vitesse du fluide*, si la densité et la vitesse dans chaque point de cette partie du fluide sont connues pour une certaine valeur initiale $\bar{t}$ de t et si les valeurs de σ sur les deux plans sont connues pour $t \geqq \bar{t}$.

5. Si, les fonctions u et σ et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans le système 41 étant toujours continues, on ne suppose pas qu'il soit permis de dériver une fois ce système, il faut introduire le système adjoint:

$$-\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}, \quad -\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \qquad 43.$$

De 41 et 43, on déduit aisément, en reprenant les notations a et b:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u u' - b^2 \sigma \sigma') + b^2 \frac{\partial}{\partial x}(u' \sigma - u \sigma') - 2a\left(u' \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) - u' X = 0.$$

Considérons de nouveau l'aire Ω et le point x_0, t_0. Traçons la droite $t = t_0$ et les demi-droites $x = x_0 \pm \varepsilon$, $t \leqq t_0$, $(\varepsilon > 0)$. Soient C_ε et C'_ε les points, où ces demi-droites coupent la courbe frontière pour la première fois sous la ligne $t = t_0$. Intégrons l'expression précédente sur les deux parties de Ω qui sont bornées de la droite $t = t_0$, une demi-droite $x = x_0 \pm \varepsilon$ et un arc de la courbe frontière. Nous obtenons, en intégrant par parties et en prenant la somme des deux intégrales:

$$\int_{A_0}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}(uu'-b^2\sigma\sigma')\,dx+\int_{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}^{A'_0}(uu'-b^2\sigma\sigma')\,dx+\int_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}\Big[u'\Big(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big)-$$

$$-u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\Big]dt-\int_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}\Big[u'\Big(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big)-u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\Big]dt+$$

$$+\int_{A_0}^{C_\varepsilon}\Big\{\Big[u'\Big(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big)-u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\Big]dt-(uu'-b^2\sigma\sigma')\,dx\Big\}+$$

$$+\int_{C'_\varepsilon}^{A'_0}\Big\{\Big[u'\Big(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big)-u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\Big]dt-(uu'-b^2\sigma\sigma')\,dx\Big\}+\iint_{t\leq t_0}u'X\,dx\,dt=0.$$

Posons:

$$u'=-2a\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial t}+b^2\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad \sigma'=\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

ce qui donne aux deux premières intégrales à gauche la valeur zéro. Cherchons la valeur limite des autres termes de notre équation, lorsque ε tend vers zéro. Comme $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ est, pour $t<t_0$, une fonction continue de x et comme:

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{x=x_0}dt$$

a une valeur finie, s'évanouissant avec δ, on voit immédiatement que l'on a:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\,dt=\lim_{\varepsilon=0}\Big\{-2a\,(uu')_{C_\varepsilon}+$$

$$+\int_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,\,t=t_0}\sigma'\Big(b^2u+2a\frac{\partial u}{\partial t}\Big)\,dt\Big\}=\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,\,t=t_0}u\Big(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\Big)\,dt.$$

La fonction $u'(x_0\pm\varepsilon)$ tend pour $t<t_0$ vers zéro avec ε. D'autre part, le terme principal de cette fonction dans le voisinage de $x=x_0$, $t=t_0$ est:

$$\frac{(x-x_0)\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{2\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{C_\varepsilon}^{x=x_0-\varepsilon,t=t_0} u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)dt=-\lim_{\varepsilon=0}\int_{C'_\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon,t=t_0} u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)dt=-\sqrt{2\pi a}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x=x_0,t=t_0}.$$

Donc:

$$2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x=x_0,t=t_0}=\int_{A_0CA'_0}\left\{\left[u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)-u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right]dt-\right.$$

$$\left.-(uu'-b^2\sigma\sigma')dx\right\}+\iint_{t\leqq t_0}u'Xdxdt. \qquad 44.$$

Dans le cas particulier traité plus haut, nous avons:

$$2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,t_0}=\int_B^{A_0}\left[u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)-u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dt-$$

$$-\int_B^{B'}(uu'-b^2\sigma\sigma')dx-\int_{B'}^{A'_0}\left[u\left(b^2\sigma'-2a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)-u'\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dt+\iint_{A_0BB'A'_0}u'Xdxdt.$$

Soit $\psi_1(x,t;\,x_0,t_0)$ une solution de l'équation 2, qui dans le voisinage de la ligne $t=t_0$ se comporte comme $\psi(x,t;\,x_0,t_0)$ et qui sur les droites A_0B et $B'A'_0$ remplit les conditions:

$$2a\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0.$$

Nous aurons, en posant:

$$u'_1=-2a\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial t}+b^2\frac{\partial\psi_1}{\partial x},\quad \sigma'_1=\frac{\partial\psi_1}{\partial t}:$$

$$2\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,t_0}=\int_B^{A_0}u\left(b^2\sigma'_1-2a\frac{\partial\sigma'_1}{\partial t}\right)dt-$$

$$-\int_B^{B'}(uu'_1-b^2\sigma\sigma'_1)dx-\int_{B'}^{A'_0}u\left(b^2\sigma'_1-2a\frac{\partial\sigma'_1}{\partial t}\right)dt+\iint_{A_0BB'A'_0}u'_1Xdxdt.$$

Cette formule résout le problème de trouver la densité dans un point quelconque, situé entre deux plans orthogonaux à la vitesse du fluide, si l'on connaît la densité et la vitesse dans chaque point de cette partie du fluide pour une valeur initiale $\bar{t}$ de t et si l'on connaît de plus la vitesse sur ces plans pour $t > \bar{t}$.

II.

Sur les problèmes à trois ou deux dimensions.

1. Le système:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \varDelta u,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad 1.$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

donne, si l'on suppose que toutes les équations soient dérivables une fois:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{1}{\varkappa^2}\varDelta\sigma - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varDelta \sigma}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

ou, si l'on pose:

$$\frac{1}{\varkappa^2} = b^2,\ \lambda + 2\mu = 2a,\ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\Phi;$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 2a\frac{\partial \varDelta \sigma}{\partial t} + b^2 \varDelta \sigma + \Phi. \qquad 2.$$

Cette équation joue un rôle important dans plusieurs questions de la physique mathématique:[1]

Son équation adjointe est:

$$\frac{\partial^2 \sigma'}{\partial t^2} = -2a\frac{\partial \varDelta \sigma'}{\partial t} + b^2 \varDelta \sigma'. \qquad 3.$$

De 2 et 3 il suit:

---

[1] Voir p. ex. DUHEM: »Recherches sur l'élasticité», Annales de l'école normale 1904 P. 366.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)-a\left[\varDelta\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)+\sigma'\varDelta\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\varDelta\sigma'+\right.$$
$$\left.+\sigma\varDelta\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\varDelta\sigma-2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial\sigma'}{\partial z}\right)\right]-b^2(\sigma'\varDelta\sigma-\sigma\varDelta\sigma')=\sigma'\Phi.$$

D'où, en intégrant sur un espace fini $\Omega(t)$, borné de la surface $S(t)$, et entre les limites $t=0$ et $t=t_0-\varepsilon$:

$$\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right]_{t_0-\varepsilon}d\omega-\int\limits_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+\right.$$
$$\left.+2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right]_{t=0}d\omega+\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{S(t)}\left[a\frac{d}{dn}\frac{\partial(\sigma\sigma')}{\partial t}+a\sigma'\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\right.$$
$$+a\sigma\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{d\sigma'}{dn}-a\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\frac{d\sigma}{dn}+b^2\left(\sigma'\frac{d\sigma}{dn}-\sigma\frac{d\sigma'}{dn}\right)+$$
$$\left.+U_n\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)+2aU_n\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right]dS=\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\Omega(t)}\sigma'\Phi\,d\omega.$$

Dans cette équation, nous avons posé:

$$\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}+\frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{\partial\sigma'}{\partial z}.$$

U_n désigne la vitesse normale d'un point de la surface $S(t)$ et $\frac{d}{dn}$ l'opération:

$$\cos nx\frac{\partial}{\partial x}+\cos ny\frac{\partial}{\partial y}+\cos nz\frac{\partial}{\partial z},$$

n étant la normale intérieure de la surface $S(t)$.

D'après quelques réductions faciles, notre équation peut s'écrire:

$$\int\limits_{\Omega(t_0-\varepsilon)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right]d\omega-\int\limits_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right]d\omega+$$
$$+\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{S(t)}\left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+b^2\frac{d\sigma}{dn}\right)+\sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t}-b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)+\right. \qquad 4.$$
$$\left.+U_n\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\sum\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}\right)\right]dS=\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\Omega(t)}\sigma'\Phi\,d\omega.$$

Nous avons supposé dans cette formule que les fonctions σ et σ' et les dérivées de ces fonctions, qui figurent dans notre formule dernière, soient continues. Posons maintenant dans l'intérieur et sur la frontière du domaine $\Omega(t)$:

$$\sigma' = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r},$$

où:

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

et x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point situé à l'intérieur de la surface $S(t_0)$, par conséquent aussi à l'intérieur de la surface $S(t_0 - \varepsilon)$, pourvu que ε soit assez petit. Posons au contraire $\sigma' = 0$ à l'extérieur de la surface $S(t)$. Dans ce cas, on doit, du domaine de l'intégration exclure le point x_0, y_0, z_0, ce que l'on peut faire à l'aide d'une sphère $r = \delta$. Dans notre formule, nous obtenons un nouveau terme:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{r=\delta} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)\right] dS.$$

Cherchons la valeur limite de cette intégrale, lorsque δ tend vers zéro. Comme, pour $t < t_0$, ψ et ses dérivées restent finies, lorsque r tend vers zéro, on a immédiatement:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{r=\delta} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \frac{\sigma}{r}\left(2a\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} - b^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)\right] dS = 0.$$

Reste à calculer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{r=\delta} \left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - b^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\frac{dS}{r^2}.$$

Or, pour $t < t_0$:

$$\lim_{r=0}\left(2a\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - b^2\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = 0.$$

Donc, l'intégrale tend vers zéro avec δ.

On démontre de même sans difficulté que les intégrales:

$$\int_{\Omega(t), r>\delta} \left[\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] d\omega,$$

$$(t = t_0 - \varepsilon, \text{ ou} = 0),$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\Omega(t), r>\delta} \sigma' \Phi \, d\omega,$$

tendent vers les limites:

$$\int_{\Omega(t)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{dt} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right] d\omega,$$

$$(t = t_0 - \varepsilon \text{ ou} = 0)$$

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\Omega(t)} \sigma' \Phi \, d\omega.$$

La formule 4 reste donc vraie sans aucune modification, si l'on y pose:

$$\sigma' = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}.$$

Faisons maintenant ε tendre vers zéro. Comme la fonction $P_2(r, t - t_0)$ et toutes ses dérivées restent finies dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$ et comme $\frac{\partial P_1(r, t - t_0)}{\partial r}$ s'y comporte comme:

$$\frac{r}{4a} \int_{t-t_0}^{0} e^{\frac{r^2}{8a\tau} - \frac{b^2 \tau}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau^3}},$$

dont la valeur absolue est plus petite que:

$$\frac{e^{\frac{b^2 t_0}{2a}}}{2\sqrt{2a}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi,$$

on voit que l'on peut trouver un nombre positif A_1, tel que l'on a dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$:

$$|\sigma'| < \frac{A_1}{r}.$$

Pour $r > \delta$ $(\delta > 0)$, σ' tend d'ailleurs uniformément vers zéro avec $t_0 - t$. Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left(\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} + 2a \sum \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right) d\omega =$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \sigma' \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2a \Delta \sigma\right)_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - 2a \int_{S(t_0-\varepsilon)} \left(\sigma' \frac{d\sigma}{dn}\right)_{t=t_0-\varepsilon} dS \right\} = 0.$$

Le terme principal de $\frac{\partial \sigma'}{\partial t}$ dans le voisinage de $t_0 - t$ est:

$$-\frac{1}{4a}\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} -\sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\,d\omega = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{4a}\int_{r=\delta}\frac{\sigma e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}\,d\omega =$$

$$= 2\pi\sqrt{2a}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t)\int_0^\infty \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,d\xi = 4\pi\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Donc:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\,\sigma(x_0, y_0, z_0, t_0) = \int_{\Omega(0)}\left[\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right]_{t=0} d\omega -$$

$$-\int_0^{t_0} dt\int_{S(t)}\left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right) + \right. \qquad 5.$$

$$\left. + U_n\left(\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} + 2a\sum\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right)\right]dS + \int_0^{t_0} dt\int_{\Omega(t)}\sigma'\,\Phi\,d\omega.$$

2. Reprenons le système 1. Supposons que X, Y, Z, u, v, w, σ et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans ce système soient continues.

Le système adjoint est:

$$-\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu\Delta u',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad 6.$$

$$\Theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}$$

De 1 et 6, on dédu-t:

$$\frac{\partial}{\partial t}(uu' + vv' + ww') + \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u'\sigma - u\sigma') + \frac{\partial}{\partial y}(v'\sigma - v\sigma') + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}(w'\sigma - w\sigma')\right] - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\sigma') + (\lambda + \mu)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u'\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(v'\frac{\partial\sigma}{\partial t}+v\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(w'\frac{\partial\sigma}{\partial t}+w\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\Big]-\mu\,[u'\Delta u+v'\Delta v+$$

$$+w'\Delta w-u\Delta u'-v\Delta v'-w\Delta w']=u'X+v'Y+w'Z.$$

D'où:

$$\int\limits_{\Omega(t_0)}\left(\Sigma\,u\,u'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega-\int\limits_{\Omega(0)}\left(\Sigma\,u\,u'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S(t)}\Big[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-$$

$$-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-$$

$$-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)+U_n\left(\Sigma\,u\,u'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)\Big]dS=\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t)}(u'X+v'Y+\omega'Z)\,d\omega.$$

Pour simplifier l'écriture, nous avons posé ici:

$$uu'+vv'+ww'=\Sigma\,uu',\ u\cos nx+v\cos ny+w\cos nz=u_n,\ \text{etc.}$$

Excluons par la sphère $r=\delta$ le point x_0, y_0, z_0, situé dans l'intérieur de $\Omega(t_0)$, du domaine de l'intégration et posons:

$$u'=-\frac{\partial}{\partial x}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$v'=-\frac{\partial}{\partial y}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$w'=-\frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\varkappa^2}\varphi\right),$$

$$\sigma'=\frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(r,t_0-t)}{\partial r},\qquad r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

dans l'intérieur et sur la frontière du domaine $\Omega(t)$, $u'=v'=w'=\sigma'=0$ dans l'extérieur du même domaine. L'intégrale première dans notre formule s'évanouit, mais il y faut introduire un nouveau terme à savoir:

$$\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{r=\delta}\Big[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma'u_n-\sigma u'_n)-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+$$

$$+\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)\Big]dS.$$

Cherchons la valeur limite de cette intégrale, lorsque δ tend vers zéro. Tout d'abord, nous avons:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\sigma' - (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right]u_n\,dS =$$

$$= \lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left[\frac{1}{\varkappa^2}u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right]\sigma'\,dS + (\lambda+\mu)\lim_{\delta=0}\int_{r=\delta}(\sigma' u_n)_{t=0}\,dS.$$

Or on a:

$$\sigma' = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial Q(r,t-t_0)}{\partial r} - \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 P_2(r,t-t_0)}{\partial r\,\partial t}.$$

La fonction $\dfrac{\partial^2 P_2(r,t-t_0)}{\partial r\,\partial t}$ reste, pour toute valeur de $t \leqq t_0$, finie, lorsque r tend vers zéro. Donc:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left[\frac{1}{\varkappa^2}u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 P_2(r,t-t_0)}{\partial r\,\partial t}\frac{dS}{r} +$$

$$+ (\lambda+\mu)\lim_{\delta=0}\int_{r=\delta}\left(u_n\frac{\partial^2 P_2(r,t-t_0)}{\partial r\,\partial t}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} = 0.$$

On a de même:

$$\lim_{\delta=0}\int_{r=\delta}\left(u_n\frac{\partial Q(r,t-t_0)}{\partial r}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} = 0,$$

puisque $\dfrac{\partial Q}{\partial r}$ pour $t<t_0$ reste fini, lorsque r tend vers zéro.

Reste donc l'intégrale:

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta}\left[\frac{1}{\varkappa^2}u_n + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right]\frac{\partial Q(r,t-t_0)}{\partial r}\frac{dS}{r}.$$

Or, dans le voisinage de $r=0$, $t=t_0$, la fonction:

$$\sqrt{\frac{2a}{\pi}}\frac{\partial Q(r,t-t_0)}{\partial r}$$

se comporte comme:

$$-\frac{r}{4a}\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}}.$$

Donc, la valeur absolue de notre intégrale est plus petite que:

$$\frac{\mathrm{I}}{a}\pi e^{\frac{b^2 t_0}{2a}} \mathrm{Max.}\left|\frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2} u_n + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| . \delta^2 \int_0^{t_0} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0 - t)}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dt$$

$$< 2\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{b^2 t_0}{2a}} \mathrm{Max.}\left|\frac{u_n}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| \delta \int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi .$$

L'intégrale tend donc vers zéro avec δ et nous avons:

$$\lim_{\delta = 0} \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma'}{\varkappa^2} - (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma'}{\partial t}\right] u_n \, dS = \mathrm{o} .$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right] u'_n \, dS .$$

Nous avons:

$$u'_n = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{I}}{r}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = \frac{\mathrm{I}}{r^2}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) -$$

$$- \frac{\mathrm{I}}{r}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) = \frac{\mathrm{I}}{r^2}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} .$$

Notre intégrale peut donc s'écrire:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]\frac{dS}{r^2} +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{dS}{r} =$$

$$= \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]\frac{dS}{r^2} -$$

$$- \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]_{t=0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left[\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right]_{t=0}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{dS}{r} .$$

La fonction

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left(Q(r, t - t_0) - \frac{\partial P_2(r, t - t_0)}{\partial t} \right)$$

satisfait pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ à une inégalité de la forme:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right| < \frac{A_2}{\sqrt{t_0 - t}} + A_3.$$

On conclut de là que les deux dernières intégrales tendent vers zéro avec δ. Quant à la première, nous remarquons d'abord que:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{d r}$$

pour $t < t_0$ tend vers zéro avec r. De plus, la fonction $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}$ dans le voisinage de $r = 0$, $t = t_0$ se comporte comme:

$$-\frac{r}{4a} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0 - t)} + \frac{b^2 (t_0 - t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}}$$

$$(2a = \lambda + 2\mu),$$

tandis que $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ reste fini. On a donc:

$$\lim_{\delta = 0} \int_0^{t_0} dt \int_{r = \delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{dS}{r^2} =$$

$$- 2\pi \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_{x_0, y_0, z_0, t_0} \lim_{\delta = 0} \delta \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0 - t)}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dt =$$

$$- 4\pi \sqrt{2a\pi} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}.$$

Pour calculer les termes qui restent de notre intégrale, nous remarquons que l'on a, à l'intérieur de la surface $S(t)$:

$$u' = \frac{x - x_0}{r^3} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] + \frac{x - x_0}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

etc., et à l'extérieur de cette surface, $u' = v' = w' = 0$. Donc:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r = \delta} \left(u' \frac{du}{dn} + v' \frac{dv}{dn} + w' \frac{dw}{dn} \right) dS = \int_0^{t_0} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_{r = \delta} dt \int_{r = \delta} \sum (x - x_0) \frac{du}{dn} \frac{dS}{r^3} +$$

$$+ \int_0^{t_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right)_{r = \delta} dt \int_{r = \delta} \sum (x - x_0) \frac{du}{dn} \frac{dS}{r^2}.$$

Pour calculer les valeurs limites de ces intégrales nous faisons usage du théorème de TAYLOR. Nous avons:

$$u = u_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z - z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r^2 f_1,$$

. . . .

$$\frac{du}{dn} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 \cos nx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 \cos ny + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \cos nz + r f_4,$$

. . . .

u_0 etc. désignant $u(x_0, y_0, z_0, t)$ etc. et f_i désignant une fonction de x, y, z, t qui reste inférieur à une quantité finie, lorsque x, y, z d'une manière quelconque tendent vers les valeurs x_0, y_0, z_0. — Nous avons:

$$\int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^3} = \int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\sum (x - x_0)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\frac{dS}{r^4} + \int_0^{t_0}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\Sigma(x - x_0)f_4\frac{dS}{r^2},$$

les intégrales de la forme:

$$\int_{r=\delta}(x - x_0)(y - y_0)\,dS$$

s'évanouissant. La dernière intégrale tend vers zéro avec δ. Dans la première intégrale, nous avons:

$$\int_{r=\delta}\sum (x - x_0)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\frac{dS}{r^4} = \frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right) = -\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_0.$$

Cette intégrale tend donc vers la valeur $\frac{4}{3}\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}$.

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta}\sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2}.$$

Nous avons:

$$\int_{r=\delta}\sum (x - x_0)\frac{du}{dn}\frac{dS}{r^2} = \frac{4}{3}\delta\pi\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right) + \delta^2 f(\delta),$$

$f(\delta)$ restant fini, lorsque δ tend vers zéro. D'après ce que nous avons vu plus haut, les termes principaux de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -2a \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $t = t_0$ sont:

$$2a\left(1 - \frac{r^2}{4a(t_0 - t)}\right)\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}} + b^2 \int_t^{t_0} \left(1 - \frac{r^2}{4a(t_0-\tau)}\right)\frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-\tau)} + \frac{b^2(t_0-\tau)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-\tau)^3}}\, d\tau =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(t_0 - t)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}\right] + \frac{b^4}{4a^2}\int_t^{t_0} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-\tau)} + \frac{b^2(t_0-\tau)}{2a}} \frac{d\tau}{\sqrt{t_0-\tau}}.$$

On conclut aisément de là que l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum (x - x_0) \frac{du}{dn} \frac{dS}{r^2}$$

tend vers zéro avec δ. Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u' \frac{du}{dn} + v' \frac{dv}{dn} + w' \frac{dw}{dn}\right) dS = \frac{4}{3}\pi \sqrt{2a\pi} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0}.$$

Considérons enfin l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u \frac{du'}{dn} + v \frac{dv'}{dn} + w \frac{dw'}{dn}\right) dS.$$

Nous avons:

$$\frac{du'}{dn} = -\frac{2(x - x_0)}{r^4}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] - \frac{2(x - x_0)}{r^3}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{x - x_0}{r^2}\frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2}$$

etc. Donc:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{r=\delta} \left(u \frac{du'}{dn} + v \frac{dv'}{dn} + w \frac{dw'}{dn}\right) dS = -2 \int_0^{t_0} \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right]_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \Sigma u (x - x_0) \frac{dS}{r^4} +$$

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}\right)_{r=\delta} dt \int_{r=\delta} \sum \frac{\partial u}{\partial t}(x - x_0)\frac{dS}{r^2} + \left(\frac{2}{r}\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}\right)_{r=\delta, t=0} \int_{r=\delta} [\Sigma u (x - x_0)]_{t=0} \frac{dS}{r^2}.$$

Or:

$$\int\limits_{r=\delta} \Sigma\, u\,(x-x_0)\frac{dS}{r^4}=\frac{4\pi}{3}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\right)+\int\limits_{r=\delta}\Sigma\,(x-x_0)\,f_1\frac{dS}{r^2}=-\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_0+\delta f,$$

$$\int\limits_{r=\delta}\sum\frac{\partial u}{\partial t}(x-x_0)\frac{dS}{r^2}=\int\limits_{r=\delta}\sum\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0(x-x_0)\frac{dS}{r^2}+\delta\,\varepsilon(\delta)=\delta\,\varepsilon(\delta),$$

$\varepsilon(\delta)$ tendant vers zéro avec δ. On en conclut:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{r=\delta}\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)dS=-\frac{8}{3}\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}.$$

Donc enfin:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{r=\delta}\Bigg[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma' u_n-\sigma u'_n)-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right)+$$

$$\mu\left(u'\frac{du}{dn}+v'\frac{dv}{dn}+w'\frac{dw}{dn}\right)-\mu\left(u\frac{du'}{dn}+v\frac{dv'}{dn}+w\frac{dw'}{dn}\right)\Bigg]dS=$$

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}=4\pi\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma+2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0,y_0,z_0,t_0}.$$

Nous devons maintenant chercher les valeurs limites des intégrales:

$$\int\limits_{\Omega(0),\,r>\delta}\left(\Sigma\,u\,u'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega,\ \int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t),\,r>\delta}(u'X+v'Y+w'Z)\,d\omega,$$

ce qui se fait sans aucune difficulté[1]. Nous obtenons de la première intégrale:

$$\int\limits_{\Omega(0)}\left(\Sigma\,u\,u'-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)d\omega$$

et de la seconde:

$$\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\Omega(t)}(u'X+v'Y+w'Z)\,d\omega.$$

Donc, enfin:

---

[1] Voir p. 119.

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(b^2\sigma + 2a\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, z_0, t_0} = \int_{\Omega(0)} (\Sigma u u' - b^2\sigma\sigma')\,d\omega + \int_0^{t_0} dt \int [b^2(\sigma u'_n -$$

$$- \sigma' u_n) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn} + w\frac{dw'}{dn}\right) - \mu\left(u'\frac{du}{dn} + \right. \qquad 7.$$

$$\left. + v'\frac{dv}{dn} + w'\frac{dw}{dn}\right) - U_n(\Sigma u u' - b^2\sigma\sigma')]\,dS + \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega(t)} (u'X + v'Y + w'Z)\,d\omega.$$

3. Le problème à deux dimensions conduit au système:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x} + \mu\Delta u,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial\sigma}{\partial y} + (\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \mu\Delta v, \qquad 8.$$

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}.$$

Nous supposons dans ce paragraphe qu'il soit permis de dériver ces équations une fois par rapport à x, y et t. Nous avons dans ce cas:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} - 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta\sigma - b^2\Delta\sigma = -\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = \Phi.$$

L'équation adjointe est:

$$\frac{\partial^2\sigma'}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta\sigma' - b^2\Delta\sigma' = 0.$$

On déduit de ces équations:

$$\int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - \int_{\Omega(0)} \left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=0} d\omega + \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{C(t)} \left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \right.$$

$$\left. + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right) + U_n\left(\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right)\right] dC = \qquad 9.$$

$$= \int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\Omega(t)} \sigma'\Phi\,d\omega.$$

$\Omega(t)$ désigne dans cette formule une aire finie, bornée par la courbe $C(t)$. On suppose que cette courbe admette dans chaque point (à l'exception peut-être d'un nombre fini de points) une tangente déterminée.

Considérons l'intégrale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r} dz_0,$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Il résulte immédiatement de l'inégalité 24 du chap. I que cette intégrale a un sens déterminé et qu'elle définit une fonction de x, y, t continue pour $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \varrho^2 > \delta^2 \; (\delta > 0)$. Les intégrales que l'on obtient en dérivant un nombre fini de fois sous le signe d'intégration par rapport à x, y, z sont, pour $\varrho > \delta$, absolument et uniformément convergentes. On a donc:

$$\frac{\partial^{l+m+n} I}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n} = \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}\right) dz_0.$$

On a de même:

$$\frac{\partial^{l+m+n+1} I}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{l+m+n+1}}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(r, t_0 - t)}{\partial r}\right) dz_0,$$

l'intégrale à droite étant absolument et uniformément convergente pour $\varrho > \delta$, $t \leqq t_0$. Comme:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = -2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + b^2 \Delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right),$$

l'intégrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial t^2} dz_0$$

est encore absolument et uniformément convergente pour $\varrho > \delta$, $t \leqq t_0$ et par conséquent égale à:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}.$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{x,y,z} I - b^2 \Delta_{x,y,z} I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{x,y,z} - b^2 \Delta_{x,y,z}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} dz_0 = 0.$$

Or:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Donc:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial}{\partial t}\Delta_{x,y} I - b^2 \Delta_{x,y} I = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| dz_0$$

et étudions comment elle se comporte, lorsque ϱ tend vers zéro. Nous avons vu plus haut que $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ reste fini dans le voisinge de $r = 0$. En vertu de l'inégalité I: 26 nous pouvons donc trouver un nombre positif A_4, tel que:

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| < A_4,$$

pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ et $0 \leqq r$,

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| < \frac{A_4}{r}$$

pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$ et $r > 1$. Donc:

$$I_1 < 2A_4 \int_0^1 \frac{dz_0}{\sqrt{\varrho^2 + z_0^2}} + 2A_4 \int_1^\infty \frac{dz_0}{\varrho^2 + z_0^2} < 2A_4 \log \frac{1 + \sqrt{\varrho^2 + 1}}{\varrho} + 2A_4.$$

D'où le théorème suivant: α étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, on a:

$$\lim_{\varrho = 0} \varrho^\alpha I_1 = 0. \qquad 10.$$

On démontre de la même manière:

$$\lim_{\varrho = 0} \varrho^\alpha \sqrt{t_0 - t} \int \frac{1}{r}\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right| dz_0 = 0. \qquad 11.$$

Remarquons enfin que l'on a pour $\varepsilon \leqq t_0 - t \leqq T$:

$$\left|\frac{\partial^l \psi}{\partial r^l}\right|, \left|\frac{\partial^{l+1} \psi}{\partial r^l \partial t}\right| < A_5,$$

A_5 étant une certaine constante, qui dépend de ε. Donc:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^l \psi}{\partial r^l}\frac{d z_0}{r^2}\right|, \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^{l+1}\psi}{\partial r^l \partial t}\frac{d z_0}{r^2}\right| < 2 A_5 \int_0^{\infty}\frac{d z_0}{\varrho^2 + z_0^2} = \frac{\pi A_5}{\varrho}. \qquad 12.$$

Posons maintenant dans la formule 9: $\sigma' = I$ à l'intérieur de $\Omega(t)$ et sur $C(t)$, $\sigma' = 0$ à l'extérieur de $C(t)$. Il faut alors exclure le point x_0, y_0 du domaine d'intégration, ce que nous pouvons faire à l'aide du cercle $\varrho = \delta$. Nous obtenons de cette manière un nouveau terme:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta}\left[\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right)\right] dC.$$

Cherchons la valeur limite de ce terme, lorsque δ tend vers zéro. Nous avons immédiatement, à cause de l'équation 10:

$$\lim_{\varrho=0}\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta}\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\frac{d\sigma}{dn}\right) dC = 0.$$

Puis, si pour plus de simplicité nous supposons que le point x_0, y_0 dans tout l'intervalle $0 \leq t \leq t_0$ soit situé dans $\Omega(t)$:

$$2a\frac{d}{dn}\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn} = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^3}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) dz_0 + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\left(2a\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial t} - b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right) dz_0 =$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^3}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) dz_0 - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} dz_0.$$

Or:

$$\varrho \leq r.$$

L'inégalité 12 montre alors que l'intégrale:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta}\sigma\, dC \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\, d z_0}{r^3}$$

reste inférieur à une quantité finie, lorsque δ tend vers zéro. Je dis que la valeur limite de cette intégrale est nulle. En effet, $2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}$ s'annullant pour $r = 0\,(t < t_0)$ on peut trouver un nombre positif A_ε tel que:

$$\left|2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|<A_6 r,$$

$$\text{si } 0\leqq r\leqq 1 \text{ et } \varepsilon\leqq t_0-t\leqq T,$$

$$\left|2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}-b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|<A_6$$

si $r>1$, $\varepsilon\leqq t_0-t\leqq T$. De là, on conclut sans difficulté que notre thèse est vraie. — Enfin:

$$\lim_{\delta=0}-\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\varrho=\delta}\sigma\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}dz_0=\lim_{\delta=0}\left\{-\int\limits_{\varrho=\delta}\left[\varrho\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right]_{t=t_0-\varepsilon}dC+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\varrho=\delta}\left[\varrho\sigma\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right]_{t=0}dC+\int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\varrho=\delta}\varrho\frac{\partial\sigma}{\partial t}dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}\right\}.$$

Or, en vertu de 11:

$$\lim_{\delta=0}\int\limits_{\varrho=\delta}\varrho\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{dz_0}{r^2}=0.$$

Donc, enfin, notre intégrale tend vers zéro avec δ.

Le passage à la limite $\delta=0$ dans les intégrales:

$$\int\limits_{\Omega(t),\varrho>\delta}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]d\omega,$$

$$t=t_0-\varepsilon \text{ ou } =0$$

etc., se fait sans aucune difficulté à l'aide de 10, 11, 12. Nous obtenons:

$$\int\limits_{\Omega(t)}\left[\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t}-\sigma\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+2a\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial\sigma'}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial\sigma'}{\partial y}\right)\right]d\omega,$$

$$t=t_0-\varepsilon \text{ ou }=0.$$

La formule 9 subsiste donc sans modification si l'on y pose $\sigma'=I$.

Il faut maintenant approfondir l'étude de la fonction σ' dans le voisinage de $t=t_0$. Il résulte immédiatement des inégalités 26 et 27 du chap. I que σ', $\frac{\partial\sigma'}{\partial x}$, $\frac{\partial\sigma'}{\partial y}$ et $\frac{\partial\sigma'}{\partial t}$ tendent vers zéro avec t_0-t, si $\varrho>\delta\,(\delta>0)$. Comme:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^\alpha I_1 = 0,$$

nous avons de plus:

$$\lim_{\varrho=0} \varrho^\alpha |\sigma'| = 0$$

pour toute valeur de t entre $t_0 - T$ et t_0, les limites y comprises. Considérons maintenant la fonction $\frac{\partial \sigma'}{\partial t}$. Nous avons:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 = \int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{z+1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{-\infty}^{z-1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0.$$

Dans les deux dernières intégrales on a d'après I: 27:

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t}\right| < \frac{C^{T,1,1,1}(t_0 - t)}{r}.$$

Donc:

$$\left|\int_{z+1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \int_{-\infty}^{z-1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0\right| < 2\, C^{T,1,1,1}(t_0 - t) \int_1^{\infty} \frac{dz_0}{z_0^2} = 2\, C^{T,1,1,1}(t_0 - t).$$

D'autre part, l'inégalité I: 10 et les propriétés connues de la fonction $P_2(r, t)$ montrent que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que pour $0 \leq t_0 - t \leq T$:

$$\left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} + \frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0 - t)^3}}\right| < A_6.$$

Donc:

$$\left|\int_{z-1}^{z+1} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial t} dz_0 + \frac{1}{4a} \int_{z-1}^{z+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dz_0\right| < 2 A_6 \log \frac{1 + \sqrt{\varrho^2 + 1}}{\varrho}.$$

Or:

$$\int_{z-1}^{z+1} \frac{e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{\sqrt{(t_0 - t)^3}} dz_0 = \frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0 - t} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-\frac{z_0^2}{8a(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0 - t}} dz_0 =$$

$$= 2\sqrt{2a}\, \frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0 - t} \left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi - \int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi\right].$$

Soit A_7 un nombre positif plus grand que la plus grande valeur de la fonction:

$$|\xi|^3 e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Alors:

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi < A_7 \int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^3} = A_7 a (t_0-t).$$

Donc:

$$2\sqrt{2a}\, \frac{e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{t_0-t} \int_{\frac{1}{\sqrt{2a(t_0-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi < 2a\sqrt{2a}\, A_7 e^{\frac{b^2T}{2a}},$$

si $t_0 - t \leqq T$.

Il résulte de tout cela que l'on peut trouver deux nombres positifs A_8 et A_9, tels que l'on a:

$$\left|\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\sqrt{2a\pi}\, e^{-\frac{\varrho^2}{8a(t_0-t)}+\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{2a(t_0-t)}\right| < A_8 \log|\varrho| + A_9 \qquad 13.$$

pour toute valeur de ϱ positive et pour $0 \leqq t_0 - t \leqq T$.

Cherchons maintenant la valeur limite pour $\varepsilon = 0$ de l'intégrale:

$$\int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega =$$

$$= \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} - 2a\sigma' \varDelta \sigma\right]_{t=t_0-\varepsilon} d\omega - 2a \int_{C(t_0-\varepsilon)} \sigma' \frac{d\sigma}{dn} dC.$$

On voit immédiatement que ces deux intégrales tendent vers zéro avec ε. Enfin, nous avons:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega(t_0-\varepsilon)} -\sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} d\omega = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\sqrt{2a\pi}\, e^{\frac{b^2\varepsilon}{2a}}}{2a\varepsilon} \int_{\varrho \leqq \delta} \sigma e^{-\frac{\varrho^2}{8a\varepsilon}} d\omega =$$

$$= 4\pi \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\, \sigma(x_0, y_0, t_0) \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\delta} \varrho e^{-\frac{\varrho^2}{8a\varepsilon}} d\varrho = 4\pi\sqrt{2a\pi}\, \sigma(x_0, y_0, t_0).$$

Le passage à la limite dans les termes restants de la formule 9 se fait sans aucune difficulté. Donc:

$$4\pi \sqrt{2a\pi}\, \sigma(x_0, y_0, t_0) = \int\limits_{\Omega(0)} \left[\sigma' \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial \sigma'}{\partial t} + 2a\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)\right]_{t=0} d\omega -$$

$$- \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} \left\{\sigma'\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b^2 \frac{d\sigma}{dn}\right) + \sigma\left(2a\frac{d}{dn}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} - b^2\frac{d\sigma'}{dn}\right) + U_n\left(\sigma'\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma\frac{\partial \sigma'}{\partial t} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2a\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y}\frac{\partial \sigma'}{\partial y}\right)\right)\right\} dC + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega(t)} \sigma' \Phi \, d\omega .$$

4. Reprenons le système 8. Supposons que u, v, σ, X, Y et les dérivées de ces fonctions, qui y figurent, soient continues. Le système adjoint est:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu \Delta u', \\ -\frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial y} + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \mu \Delta v', \\ \Theta' &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}. \end{aligned} \qquad 15.$$

De 8 et 15 il suit:

$$\int\limits_{\Omega(t_0),\, \varrho > \delta} \left(uu' + vv' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right) d\omega - \int\limits_{\Omega(0),\, \varrho > \delta} \left(uu' + vv' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right) d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{C(t)} \left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma' u_n - \sigma u'_n) -\right.$$

$$- (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} u'_n + \frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right) + \qquad 16.$$

$$\left. + U_n\left(uu' + vv' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)\right] dC + \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma' u_n - \sigma u'_n) - (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} u'_n + \frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) +\right.$$

$$\left. + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right)\right] dC = \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega(t),\, \varrho > \delta} (u'X + v'Y)\, d\omega,$$

$$\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad u_n = u \cos nx + v \cos ny .$$

Soit à l'intérieur de $\Omega(t)$ et sur $C(t)$:

$$u' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(2a\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right),$$

$$v' = -\frac{\partial}{\partial y}\left(2a\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right),$$

$$\sigma' = \frac{\partial I}{\partial t},$$

à l'extérieur de $\Omega(t)$ $u' = v' = \sigma' = 0$. La première intégrale dans la formule 16 s'évanouit. Cherchons les valeurs limites des termes restants, lorsque δ tend vers zéro. Commençons par l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left[\frac{1}{\varkappa^2}(\sigma' u_n - \sigma u'_n) - (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} u'_n + \frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \right.$$
$$\left. - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right)\right] dC.$$

Supposons pour plus de simplicité que le point x_0, y_0 dans tout l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ soit situé dans l'intérieur de $\Omega(t)$. Nous aurons:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{1}{\varkappa^2}\sigma' u_n - (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma'}{\partial t} u_n\right) dC = \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \sigma' \left(\frac{u_n}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_n}{\partial t}\right) dC +$$
$$+ (\lambda+\mu)(\sigma')_{t=0,\varrho=\delta} \int_{\varrho=\delta} (u_n)_{t=0}\, dC.$$

L'inégalité 13 montre que la dernière intégrale tend vers zéro avec δ. Je dis qu'il en est de même de la première. Il suffit pour le prouver de montrer que:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0 - t}\, dt = 0.$$

Or:

$$\int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0 - t}\, dt = \delta \int_0^{\frac{8at_0}{\delta^2}} e^{-\frac{1}{u}} \frac{du}{u}.$$

Soit A_{10} un nombre positif plus grand que la valeur maximum de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{u}} e^{-\frac{1}{u}}.$$

On a alors:

$$\int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0-t}\, dt < A_{10}\,\delta \int_0^{\frac{8at_0}{\delta^2}} \frac{du}{u^{2/3}} = 3\,A_{10}\,(8\,a\,t_0\,\delta)^{\frac{1}{3}}.$$

Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} \frac{\delta e^{-\frac{\delta^2}{8a(t_0-t)}}}{t_0-t}\, dt = 0.$$

Par conséquent:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{1}{\varkappa^2}\,\sigma' u_n - (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\,u_n\right) dC = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) u'_n\, dC.$$

Nous avons:

$$u'_n = -\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(2\,a\,\frac{\partial I}{\partial t} - b^2 I\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2\,a\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} - b^2\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\, dz_0}{r^3} + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\varrho\, dz_0}{r^2}.$$

Or:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\varrho\,dz_0}{r^2} = -\int_{\varrho=\delta}\left[\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\varrho\,dz_0}{r^2}\right]_{t=0} dC\, -$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta}\left[\left(\frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{\partial\sigma}{\partial t} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\varrho\,dz_0}{r^2}\right] dC.$$

Donc, en vertu de 11:

$$\lim_{\delta=0}\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta}\left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\frac{\varrho\,dz_0}{r^2} = 0.$$

Nous avons vu plus haut qu'une intégrale de la forme:

$$\int_0^{t_0-\varepsilon} dt \int_{\varrho=\delta} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right) dC \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho dz_0}{r^3}$$

tend vers zéro avec δ quelque petite que soit la quantité positive ε. Nous avons donc, en posant pour plus de simplicité:

$$\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial t} = S:$$

$$\lim_{\delta=0}\left\{\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n dC - \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S dC \int_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right\} = 0. \qquad 17.$$

Nous avions:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial r}\right| < A_4$$

pour $0 \leq t_0 - t \leq T$ et pour toute valeur de r. Donc:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right| < 2A_4\int_0^{\infty}\frac{dz_0}{\varrho^2+z_0^2} = \frac{\pi A_4}{\varrho}.$$

Donc:

$$\left|\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S dC \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\varrho dz_0}{r^3}\right| < 2\pi^2 A_4 \varepsilon \operatorname*{Max.}_{\varrho=\delta,\, t_0-\varepsilon \leq t \leq t_0} |S|. \qquad 18.$$

Nous avons vu plus haut que l'on peut trouver un nombre positif A_6 tel que:

$$\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} + \frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}}\right| < A_6.$$

Or:

$$e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}} - e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}} < \frac{b^2(t_0-t)}{2a} e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)} + \frac{b^2(t_0-t)}{2a}} < \frac{b^2(t_0-t)}{2a} e^{\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}$$

Donc:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial t} = -\frac{r e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{4a\sqrt{(t_0-t)^3}} + \psi_2,$$

où:

$$|\psi_2| < \frac{b^2 r e^{\frac{b^2(t_0-t)}{2a}}}{8a^2\sqrt{t_0-t}} + A_6.$$

De cette inégalité on conclut:

$$\left|\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S\,dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_2 \varrho\, dz_0}{r^3}\right| < \int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S\,dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b^2 \varrho e^{\frac{b^2\varepsilon}{2a}}}{8a^2\sqrt{t_0-t}} + A_6\right)\frac{dz_0}{\varrho^2+z_0^2} <$$

$$< \left[\frac{\pi^2 b^2 \delta e^{\frac{b^2\varepsilon}{2a}}\sqrt{\varepsilon}}{2a^2} + 2\pi^2 A_6 \varepsilon\right] \underset{\varrho=\delta,\, t_0-\varepsilon \leqq t \leqq t_0}{\text{Max.}} |S|. \qquad 19.$$

Considérons enfin l'intégrale:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} S\,dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}\,dz_0.$$

Soit S_0 la valeur de S pour $x=x_0$, $y=y_0$, $t=t_0$. L'intégrale peut s'écrire:

$$\frac{S_0}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}\,dz_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0} dt \int\limits_{\varrho=\delta} (S-S_0)\,dC \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varrho e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}\,dz_0.$$

Posons dans la première intégrale:

$$t_0 - t = \frac{r^2}{2a\xi^2},\ z_0 = \eta\delta.$$

Nous obtenons:

$$2\pi\sqrt{2a}\,S_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} \int\limits_{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{2a\varepsilon}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,d\xi.$$

On conclut de cette expression que la valeur absolue de cette intégrale va en croissant, lorsque δ diminue. Soit ϑ un nombre positif aussi petit que l'on veut. Choisissons une quantité positive η_1, assez grande pour que:

$$4\pi\sqrt{2a}\,|S_0| \int\limits_{\eta_1}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}\,d\xi < \frac{\vartheta}{4}.$$

Déterminons une valeur δ_0 de δ, telle que l'inégalité

$$\delta < \delta_0$$

entraîne l'inégalité:

$$2\pi\sqrt{2a}\,|S_0|\int\limits_{-\eta_1}^{+\eta_1}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int\limits_0^{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{2a\varepsilon}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi < \frac{\vartheta}{2}.$$

On a alors, si $\delta < \delta_0$:

$$\left|2\pi\sqrt{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int\limits_{\frac{\delta\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{2a\varepsilon}}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi - 2\pi\sqrt{2a}\,S_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi\right| < \vartheta.$$

Donc:

$$\lim_{\delta=0}\frac{S_0}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int\limits_{\varrho=\delta}dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho\, e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}dz_0 = 2\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} = 4\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0. \quad 20.$$

On voit de plus que l'on a:

$$\left|\frac{1}{2}\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int\limits_{\varrho=\delta}(S-S_0)\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varrho\, e^{-\frac{r^2}{8a(t_0-t)}}}{r^2\sqrt{(t_0-t)^3}}dt\right| \leqq 4\pi\sqrt{2a\pi}\underset{0\leqq\tau\leqq\varepsilon}{\operatorname{Max.}}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{\varrho=\delta,\,t=t_0-\tau}S\,dC - S_0\right| \leqq \quad 21.$$

$$\leqq 4\pi\sqrt{2a\pi}\underset{0\leqq\tau\leqq\varepsilon}{\operatorname{Max.}}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{\varrho=\delta,\,t=t_0-\tau}S\,dC - \frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{\varrho=\delta,\,t=t_0}S\,dC\right| + 4\pi\sqrt{2a\pi}\left|\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{\varrho=\delta,\,t=t_0}S\,dC - S_0\right|.$$

Il résulte de 18, 19, 20 et 21 que l'on a:

$$\left|\int\limits_{t_0-\varepsilon}^{t_0}dt\int\limits_{\varrho=\delta}S\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\, dz_0}{r^3} + 4\pi\sqrt{2a\pi}\,S_0\right| < d(\delta) + e(\varepsilon),$$

où d et e désignent des fonctions positives, qui tendent vers zéro en même temps que leurs arguments.

Soit maintenant ϑ_1 un nombre positif aussi petit que l'on veut. Choisissons ε de telle manière que $e(\varepsilon) < \frac{\vartheta_1}{2}$. Déterminons ensuite un nombre positif δ_1 assez petit pour que l'inégalité $\delta < \delta_1$ entraîne l'inégalité:

$$\left|\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{\varrho=\delta}S u'_n\,dC - \int\limits_0^{t_0-\varepsilon}dt\int\limits_{\varrho=\delta}S\,dC\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(2a\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} - b^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\frac{\varrho\, dz_0}{r^3}\right| + d(\delta) < \frac{\vartheta_1}{2}$$

ce qui est possible d'après 17. On a alors:

$$\left| \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n dC + 4\pi \sqrt{2a\pi}\, S_0 \right| < \vartheta_1,$$

pourvu que $\delta < \delta_1$. Donc:

$$\lim_{\delta=0} \int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} S u'_n dC = -4\pi \sqrt{2a\pi}\, S_0 = -4\pi \sqrt{2a\pi} \left(\frac{\sigma}{\varkappa^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, t_0}.$$

Sans rencontrer des difficultés nouvelles on peut maintenant calculer la valeur limite de l'intégrale:

$$\int_0^{t_0} dt \int_{\varrho=\delta} \left[\mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn}\right) - \mu\left(u\frac{du'}{dn} + v\frac{dv'}{dn}\right)\right] dC.$$

Il suffit donc d'énoncer le résultat. On trouve:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\,\mu \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_{x_0, y_0, t_0}.$$

La formule 16 donne par conséquent:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(2a\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\sigma\right)_{x_0, y_0, t_0} = \lim \left\{ \int_{\Omega(0), \varrho>\delta} (uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')_{t=0}\, d\omega - \right.$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} \left[b^2(\sigma' u_n - \sigma u'_n) - (\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn} - u\frac{du'}{dn} - v\frac{dv'}{dn}\right) + \right.$$

$$\left. \left. + U_n(uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')\right] dC + \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega(t), \varrho>\delta} (u'X + v'Y)\, d\omega \right\}.$$

D'où la formule définitive:

$$4\pi\sqrt{2a\pi}\left(2a\frac{\partial\sigma}{\partial t} + b^2\sigma\right)_{x_0, y_0, t_0} = \int_{\Omega(0)} (uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')_{t=0}\, d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{C(t)} \left[b^2(\sigma u_n - \sigma u'_n) - \right.$$

$$-(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}u'_n + \frac{\partial\sigma'}{\partial t}u_n\right) + \mu\left(u'\frac{du}{dn} + v'\frac{dv}{dn} - u\frac{du'}{dn} - v\frac{dv'}{dn}\right) +$$

$$\left. + U_n(uu' + vv' - b^2\sigma\sigma')\right] dC + \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega(t)} (u'X + v'Y)\, d\omega.$$

III.

Sur le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$.

1. Le cas limite $\lambda + 2\mu = 0$ n'est pas réalisé dans la nature. Pourtant, nous ne croyons pas que les formules que nous allons développer dans ce chapitre, soient dénuées de tout intérêt pour l'hydrodynamique. Considérons en effet un fluide visqueux et compressible, dont la compressibilité soit très faible. Dans ce cas, il existera bien des mouvements, où les termes $(\lambda + \mu)\dfrac{\partial \Theta}{\partial x}$ etc. sont très petits pas rapports aux termes $\mu \Delta u$ etc., du moins si l'on suppose que λ soit du même ordre de grandeur que μ. Dans ces cas, on pourra remplacer le coefficient $\lambda+\mu$ par $-\mu$ sans qu'il y ait lieu de craindre une grande erreur dans les résultats. D'un autre côté, il existe évidemment aussi des mouvements, où l'hypothèse $\lambda+2\mu = 0$ n'est point admissible. C'est p. ex. le cas, si l'on veut étudier les ondes qui peuvent subsister dans un fluide visqueux et compressible.

Considérons donc le système:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial y} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma}{\partial z} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w, \\
\Theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}
\end{aligned}\right\} 1.$$

Nous supposerons dans la suite que $X, Y, Z; u, v, w, \sigma$ et leurs dérivées qui se trouvent dans le système 1 soient continues. Nous supposerons de plus que X, Y, Z admettent des dérivées continues par rapport à x, y, z.

Le système adjoint est:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial \sigma'}{\partial x} - \mu \frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mu \Delta u', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Theta' &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial t}
\end{aligned}\right\} 2.$$

Soit Ω une partie finie de l'espace, bornée par la surface S. Supposons, pour éviter des formules trop compliquées que S soit indépendant de t. Nous aurons dans Ω:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma u u' = \Sigma X u' - \frac{1}{\varkappa^2}\left[\frac{\partial (u'\sigma)}{\partial x} + \frac{\partial (v'\sigma)}{\partial y} + \frac{\partial (w'\sigma)}{\partial z} - \frac{\partial (u\sigma')}{\partial x} - \frac{\partial (v\sigma')}{\partial y} - \frac{\partial (w\sigma')}{\partial z}\right]$$
$$+ \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial (\sigma\sigma')}{\partial t} - \mu\left[\frac{\partial (u'\Theta)}{\partial x} + \frac{\partial (v'\Theta)}{\partial y} + \frac{\partial (w'\Theta)}{\partial z} - \frac{\partial (u\Theta')}{\partial x} - \frac{\partial (v\Theta')}{\partial y} - \frac{\partial (w\Theta')}{\partial z}\right]$$
$$+ \mu\left[u'\Delta u + v'\Delta v + w'\Delta w - u\Delta u' - v\Delta v' - w\Delta w'\right]$$

et par conséquent, si u', v', w', σ' et les dérivées de ces fonctions qui figurent dans le système 2 soient continues dans Ω, la frontière y comprise:

$$\int_\Omega \left(\Sigma u u'\right)_{t=t_1} d\omega - \int_\Omega \left(\Sigma u u'\right)_{t=0} d\omega = \int_0^{t_1} dt \int_\Omega \left(\Sigma X u'\right) d\omega + \frac{1}{\varkappa^2}\int_\Omega (\sigma\sigma')_{t=t_1} d\omega -$$
$$- \frac{1}{\varkappa^2}\int_\Omega (\sigma\sigma')_{t=t_0} d\omega - \int_0^{t_1} dt \int_S \left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn} + \mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma\right)\right] dS +$$
$$+ \int_0^{t_1} dt \int_S \left[\sum u\left(\mu\frac{du'}{dn} - \mu\cos nx\frac{\partial\sigma'}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma'\right)\right] dS.$$

On a ici:

$$\Sigma X u' = X u' + Y v' + Z w',$$
$$\Sigma u u' = u u' + v v' + w w'$$

etc.

Soient maintenant x_0, y_0, z_0 les coordonnées d'un point dans Ω. Soit r' un nombre aussi petit que l'on veut. Traçons la sphère $r = r'$ $(r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2})$ et appliquons la formule ci-dessus à l'extérieur de cette sphère. Posons pour $r \leqq r' + \frac{t_1 - t}{\varkappa}$, $r \geqq r'$:

$$u' = u'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad v' = v'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad w' = w'_{r'} = \frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \sigma' = \sigma'_{r'} = \frac{\varkappa^2 r'}{2}\frac{\partial F}{\partial t},$$

où:

$$F = \frac{1}{r}\int^{t_1 - t - \varkappa(r - r')} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi$$

et pour $r > r' + \frac{t_1 - t}{\varkappa}$: $u' = v' = w' = \sigma' = 0$. Observons que les fonctions ainsi définies sont continues et admettent des dérivées continues pour $r \geqq r'$. Nous obtenons, en désignant par $\Omega^{t_1}_{tr'}$ la partie de $\Omega_{r'}$ qui est située à l'intérieur de la sphère $r = r' + \frac{t_1 - t}{\varkappa}$ et par $S^{t_1}_{tr'}$ la partie de S qui se trouve à l'intérieur de la même sphère:

$$\int\limits_{\Omega^{t_1}_{0r'}} \left(\Sigma u u'_{r'} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'_{r'}\right)_{t=0} d\omega + \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^{t_1}_{tr'}} \Sigma X u'_{r'}\, d\omega - \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{tr'}} \left[\sum u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu \cos nx \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma\right)\right] dS + \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{tr'}} \left[\sum u \left(\mu \frac{du'_{r'}}{dn} - \mu \cos nx \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma'_{r'}\right)\right] dS - \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} + \mu \cos nx \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma\right)\right] dS +$$

$$+ \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u \left(\mu \frac{du'_{r'}}{dn} - \mu \cos nx \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma'_{r'}\right)\right] dS = 0.$$

Multiplions par dt_1 et intégrons entre les limites o et t_0. Nous aurons:

$$\int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_{\Omega^{t_1}_{0r'}} \left(\Sigma u u'_{r'} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'_{r'}\right)_{t=0} d\omega + \int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{\Omega^{t_1}_{tr'}} \Sigma X u'_{r'}\, d\omega - \int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{tr'}} \left[\sum u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mu \cos nx \,.\, \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma\right)\right] dS + \int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{S^{t_1}_{tr'}} \left[\sum u \left(\mu \frac{du'_{r'}}{dn} - \mu \cos nx \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma'_{r'}\right)\right] dS - \int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u'_{r'} \left(\mu \frac{du}{dn} + \mu \cos nx \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma\right)\right] dS +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_{r=r'} \left[\sum u \left(\mu \frac{du'_{r'}}{dn} - \mu \cos nx \,.\, \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma'_{r'}\right)\right] dS = 0.$$

Faisons maintenant le passage à la limite $r' = 0$. Nous avons pour $r = r'$:

$$u'_{r'} = -\frac{x - x_0}{2 r'^2} \int\limits_0^{t_1 - t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi - \frac{\varkappa (x - x_0)}{2 r'} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}}}{\sqrt{(t_1 - t)^3}} = -\frac{x - x_0}{2 r'} \left(F_{r'} + \frac{\varkappa\, e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}}}{\sqrt{(t_1 - t)^3}}\right)$$

etc., où:

$$F_{r'} = \frac{1}{r'} \int_0^{t_1 - t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi.$$

Puis:

$$\frac{\partial u'_{r'}}{\partial x} = -\frac{1}{2r'}\left(1 - \frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right) - \frac{\varkappa^2 (x-x_0)^2}{2r'^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}},$$

$$\frac{\partial u'_{r'}}{\partial y} = \frac{3(x-x_0)(y-y_0)}{2r'}\left(F_{r'} + \frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right) - \frac{\varkappa^2 (x-x_0)(y-y_0)}{2r'^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}},$$

etc.

Pour $t < t_1$, on a:

$$\lim_{r'=0} r'^2 F_{r'} = \lim_{r'=0} r' \int_0^{t_1-t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}} d\xi = 2\sqrt{\mu} \lim_{r'=0} \int_{\frac{r'}{\sqrt{\mu(t_1-t)}}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4}} du = 2\sqrt{\pi\mu}. \qquad 3.$$

Enfin, nous avons d'après le théorème de TAYLOR:

$$u = u_0 + (x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + (z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + r'^2 \varphi,$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + r' \varphi, \ldots$$

$u_0 = u(x_0, y_0, z_0, t)$ etc. et φ désignant une fonction quelconque de x, y, z, t, dont la valeur absolue reste inférieure à une limite finie lorsque le point x, y, z d'une manière quelconque tend vers x_0, y_0, z_0. A l'aide de ces égalités, on voit sans difficulté que l'on a:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u'_{r'} \frac{du}{dn} dS = -\frac{\mu}{2} \lim_{r'=0} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt \int_{r=r'} (x-x_0)^2 F_{r'} \frac{dS}{r'^2} -$$

$$-\frac{\mu\varkappa}{2} \lim_{r'=0} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt \int_{r=r'} \frac{(x-x_0)^2}{r'^2} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}} dS = -\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\pi\mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt$$

et par conséquent:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sum u'_{r'} \frac{du}{dn} dS = -\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 dt.$$

Nous avons de même:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u\frac{\partial u'_{r'}}{\partial x} \cos nx\, dS = -\lim_{r'=0}\mu\int_0^{t_1} dt\int_{r=r'}\left(u_0+(x-x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+\right.$$

$$\left.+(y-y_0)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+(z-z_0)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+r'^2\varphi\right)\left(F_{r'}+\frac{\varkappa e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}\right)\left(1-\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)\frac{(x-x_0)dS}{2r'^2}-$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa^2\mu\lim_{r'=0}\int_{r=r'}\frac{(x-x_0)^3}{r'^3}dS\int_0^{t_1}u\frac{\partial}{\partial t}\frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}}{\sqrt{(t_1-t)^3}}dt=$$

$$-\frac{1}{2}\mu\lim_{r'=0}\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt\int_{r=r'}\left(1-\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)(x-x_0)^2F_{r'}\frac{dS}{r'^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\varkappa^2\mu\lim_{r'=0}\int_{r=r'}(x-x_0)^2\frac{dS}{r^3}\int_0^{t_1}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-t)}}\frac{dt}{\sqrt{(t_1-t)^3}}.$$

La dernière intégrale tend vers zéro avec r'. Dans la première, nous avons:

$$\int_{r=r'}\left(1-\frac{3(x-x_0)^2}{r'^2}\right)(x-x_0)^2\frac{dS}{r'^3}=\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{12\pi}{5}\right)r'=-\frac{16\pi r'}{15}.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0}\mu\int_0^{t_1}dt\int_{r=r'}u\frac{\partial u'_{r'}}{\partial x}\cos nx\,dS=\frac{16}{15}\pi\mu\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0dt.$$

On a de même:

$$\lim_{r'=0}\mu\int_0^{t_1}dt\int_{r=r'}u\frac{\partial u'_{r'}}{\partial y}\cos ny\,dS=\frac{3}{2}\mu\int_0^{t_1}dt\int_{r=r'}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0F_{r'}(x-x_0)^2(y-y_0)^2\frac{dS}{r'^4}=$$

$$\frac{4}{5}\pi\mu\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0dt.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} u \frac{du'_{r'}}{dn} dS = \frac{8}{3} \pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dt$$

et par conséquent:

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sum \left(u'_{r'} \frac{du}{dn} - u \frac{du'_{r'}}{dn}\right) dS = -4\pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 dt.$$

Cherchons maintenant la valeur limite de l'intégrale:

$$\mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \Sigma u'_{r'} \cos nx\, dS = \frac{\mu r'}{2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS =$$

$$= -\frac{1}{2} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} F_{r'} dS - \frac{\varkappa \mu}{2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma}{\partial t} e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1 - t)}} \frac{dS}{\sqrt{(t_1 - t)^3}}.$$

Nous obtenons donc:

$$-4\pi \mu \sqrt{\pi \mu} \int_0^{t_1} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 dt.$$

Nous avons de même:

$$\lim_{r'=0} \frac{1}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma\, \Sigma u'_{r'} \cos nx\, dS = -\frac{4\pi \sqrt{\pi \mu}}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} \sigma_0\, dt.$$

Enfin:

$$\lim_{r'=0} \frac{1}{\varkappa^2} \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma'_{r'} \Sigma u \cos nx\, dS = 0,$$

$$\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \frac{\partial \sigma'_{r'}}{\partial t} \Sigma u \cos nx\, dS = -\lim_{r'=0} \mu \int_0^{t_1} dt \int_{r=r'} \sigma'_{r'} \sum \frac{\partial u}{\partial t} \cos nx\, dS = 0.$$

Comme:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 = 0,$$

nous avons donc:

$$\frac{4\pi\sqrt{\pi\mu}}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}\sigma_0\,dt = \lim_{r'=0}\Bigg[\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega_{0r'}^{t_1}}\Big[\Sigma\, u\, u'_{r'} - \frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\sigma\sigma'_{r'}\Big]_{t=0} d\omega +$$

$$+\int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{\Omega_{tr'}^{t_1}}\Sigma\, X u'_{r'}\,d\omega - \int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{S_{tr'}^{t_1}}\Big[\sum u'_{r'}\Big(\mu\frac{du}{dn}+\mu\cos nx\frac{\partial\sigma}{\partial t}-$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma\Big)\Big]dS + \int_0^{t_0}dt_1\int_0^{t_1}dt\int_{S_{tr'}^{t_1}}\Big[\sum u\Big(\mu\frac{du'_{r'}}{dn}-\mu\cos nx\frac{\partial\sigma'_{r'}}{\partial t}-\frac{\mathrm{I}}{\varkappa^2}\cos nx.\sigma'_{r'}\Big)\Big]dS\Bigg].$$

A droite, nous traitons d'abord les intégrales de volume. Nous avons:

$$\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega_{0r'}^{t_1}}(\Sigma\, u u'_{r'})_{t=0}\,d\omega = -\frac{r'}{2}\int_0^{t_0}dt_1\int_{S_{0r'}^{t_1}}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}F_{t=0}\,dS -$$

$$-\frac{\mathrm{I}}{2}r'\int_0^{t_0}dt_1\int_{r=r'}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}F_{t=0}\,dS + \frac{\mathrm{I}}{2}r'\int_0^{t_0}dt_1\int_{\Omega_{0r'}^{t_1}}\Big[F\frac{\partial\sigma}{\partial t}\Big]_{t=0}d\omega.$$

La première intégrale peut s'écrire, en posant pour plus de simplicité $S_{tr'}^{t_0} = S_{tr'}$:

$$-\frac{r'}{2}\int_{S_{0r'}}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int_{\varkappa(r-r')}^{t_0} rF_{t=0}\,dt_1.$$

Pour les valeurs de t qui satisfont à l'inégalité $t_1 \geqq \varkappa r$, la fonction $rr'F_{t=0}$ tend uniformément vers la limite $2\sqrt{\pi\mu}$, lorsque r' tend vers zéro. On a d'ailleurs toujours:

$$rr'F \leqq 2\sqrt{\pi\mu}.$$

Posons:

$$S_t = \lim_{r'=0} S_{tr'}.$$

Nous avons alors:

$$\lim_{r'=0} -\frac{r'}{2}\int_{S_0}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int_{\varkappa r}^{t_0} rF_{t=0}\,dt_1 = -\sqrt{\pi\mu}\int_{S_0}(\Sigma\, u\cos nx)_{t=0}\Big(\frac{t_0}{r}-\varkappa\Big)dS.$$

Puis:

$$\left|\frac{r'}{2}\int\limits_{S_{0r'}}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{\varkappa r} rF_{t=0}\,dt_1\right| < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'\int\limits_{S_0}|\Sigma u \cos nx|_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

Enfin, nous avons sur la partie $S_{0r'} - S_0$ de la frontière:

$$\frac{t_0}{\varkappa} \leqq r \leqq r' + \frac{t_0}{\varkappa}.$$

Donc:

$$\frac{1}{2}rr'\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0} F_{t=0}\,dt_1 \leqq \sqrt{\pi\mu}\,(t_0 - \varkappa(r-r')) < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'$$

et par conséquent:

$$\left|\frac{r'}{2}\int\limits_{S_{0r'}-S_0}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0} rF_{t=0}\,dt_1\right| < \varkappa\sqrt{\pi\mu}\,r'\int\limits_{S_{0r'}-S_0}|\Sigma u \cos nx|_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

On conclut de là que la première intégrale tend vers la valeur limite:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}(\Sigma u \cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r} - \varkappa\right)dS.$$

On montre sans difficulté que la deuxième intégrale a la valeur limite zéro et que la troisième intrégrale tend vers la valeur:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r} - \varkappa\right)d\omega.$$

On a ici:

$$\Omega_0 = \lim_{r'=0}\Omega_{0r'}^{t_0}.$$

L'intégrale:

$$-\frac{1}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{\Omega_{0r'}^{t_1}}(\sigma\sigma'_{r'})_{t=0}\,d\omega$$

peut s'écrire:

$$\frac{r'}{2}\int\limits_{\Omega_{0r'}}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}\int\limits_{\varkappa(r-r')}^{t_0}\frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_1-\varkappa(r-r'))}}}{\sqrt{(t_1-\varkappa(r-r'))^3}}\,dt_1$$

Elle a donc la valeur limite:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}.$$

Envisageons maintenant l'intégrale:

$$\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega_{tr'}^{t_1}}\Sigma X u'_{r'}\,d\omega.$$

Une intégration par partie donne:

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{S_{tr'}^{t_1}}\Sigma X\cos nx\,F\,dS-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{r=r'}\Sigma X\cos nx\,F\,dS-$$

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega_{tr'}^{t_1}}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)F\,d\omega.$$

La première intégrale peut s'écrire:

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_{0r'}^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt=-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt-$$

$$-\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_{0r'}^{t_1}-S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa(r-r')}\Sigma X\cos nx\,F\,dt.$$

De ces intégrales, la première tend vers la valeur:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}\frac{dS}{r}\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt$$

et la seconde vers zéro, comme on le voit sans difficulté en remarquant que l'on a sur $S_{0r'}^{t_1}-S_0^{t_1}$: $t_1-\varkappa(r-r')\leqq\varkappa r'$. La valeur limite de l'intégrale:

$$\frac{r'}{2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{r=r'}\Sigma X\cos nx\,F\,dS$$

est zéro et celle de l'intégrale:

$$-\frac{r'}{2}\int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_{\Omega_{tr'}^{t_1}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) F d\omega$$

est:

$$-\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0} dt_1 \int_0^{t_1} dt \int_{\Omega_t^{t_1}} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{d\omega}{r}.$$

Passons aux intégrales de surface. Posons:

$$\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx = V_x,$$

etc. La première intégrale de surface peut alors s'écrire:

$$\int_0^{t_0} dt_1 \int_{S_{0r'}^{t_1}} dS \int_0^{t_1 - \varkappa(r - r')} \Sigma u'_{r'} V_x dt,$$

où:

$$u'_{r'} = -\frac{r'(x - x_0)}{2r^2}F + \frac{r'\varkappa(x - x_0)}{2r}\frac{\partial F}{\partial t},$$

etc. Les termes qui contiennent F comme facteur donnent, en effectuant le passage à la limite:

$$\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0} dt_1 \int_{S_0^{t_1}} dS \int_0^{t_1 - \varkappa r}\left[V_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) + V_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + V_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dt.$$

Pour calculer la valeur limite des termes restants de notre intégrale, nous les écrivons comme suit:

$$-\varkappa\int_{S_{0r'}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0 - \varkappa(r - r')}\Sigma V_x(x - x_0)dt\int_{t + \varkappa(r - r')}^{t_0}\frac{r'}{2}\frac{\partial F}{\partial t_1}dt_1 - \frac{\varkappa}{2}\int_{S_{0r'}}\frac{dS}{r^2}\int_0^{t_0 - \varkappa(r - r')}\Sigma V_x(x - x_0)dt\int_0^{t_0 - t - \varkappa(r - r')}\frac{r' e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}}d\xi.$$

D'où la valeur limite:

$$-\varkappa V\overline{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}(V_x(x-x_0)+V_y(y-y_0)+V_z(z-z_0))\frac{dS}{r^2}.$$

Passons à l'intégrale:

$$\mu\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{S_{tr'}^{t_1}}\left(u\frac{du'_{r'}}{dn}+v\frac{dv'_{r'}}{dn}+w\frac{dw'_{r'}}{dn}\right)dS.$$

Nous avons:

$$\frac{du'_{r'}}{dn}=\frac{1}{2}r'rF\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}\varkappa r'r^2\frac{\partial F}{\partial t}\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\varkappa^2r'\frac{\partial^2F}{\partial t^2}\frac{x-x_0}{r}\frac{dr}{dn},$$

etc. Les termes qui contiennent F ou $\frac{\partial F}{\partial t}$ comme facteur, se traitent de la même manière que les termes analogues plus haut et nous donnent:

$$\mu V\overline{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S_0^{t_1}}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)dt+$$

$$+\varkappa\mu V\overline{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\left(u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)+v\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+w\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\right)rdS.$$

Les termes restants donnent:

$$\frac{1}{2}\varkappa^2\mu r'\int\limits_{S_{0r'}}\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}dS\int\limits_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma u(x-x_0)\,dt\int\limits_{t+\varkappa(r-r')}^{t_0}\frac{\partial^2F}{\partial t_1^{\,2}}dt_1=$$

$$=\frac{1}{2}\varkappa^2\mu\int\limits_{S_{0r'}}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}dS\int\limits_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma u(x-x_0)\frac{r'e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-t-\varkappa(r-r'))}}}{V(t_0-t-\varkappa(r-r'))^3}dt.$$

Pour effectuer le passage à la limite nous divisons $S_{0r'}$ en deux parties S_0 et $S_{0r'}-S_0$. Dans la première partie l'intégrale:

$$\int\limits_0^{t_0-\varkappa(r-r')}\Sigma u(x-x_0)\frac{r'e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-t-\varkappa(r-r'))}}}{V(t_0-t-\varkappa(r-r'))^3}dt$$

tend uniformément vers la valeur:

$$2\sqrt{\pi\mu}\,[\Sigma u(x-x_0)]_{t=t_0-\varkappa r}.$$

Comme l'autre partie tend vers zéro avec r', nous voyons que notre intégrale admet la valeur limite suivante:

$$\varkappa^2\mu\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}[\Sigma u(x-x_0)]_{t=t_0-\varkappa r}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn}dS.$$

Envisageons en dernier lieu l'intégrale:

$$-\frac{1}{2}r'\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{S^{t_1}_{tr'}}\Sigma\, u\cos nx\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\mu\varkappa^2\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)dS.$$

Elle donne:

$$\sqrt{\pi\mu}\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}(\Sigma u\cos nx)\frac{dS}{r}-\mu\varkappa^2\sqrt{\pi\mu}\int\limits_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

Ces longs calculs achevés, on peut résumer leurs résultats dans la formule que voici:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}\sigma_0(t)dt=\int\limits_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)d\omega+\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{t=0}\frac{d\omega}{r}-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_0^{t_1}dt\int\limits_{\Omega^{t_1}_t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{d\omega}{r}-\int\limits_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S^{t_1}_0}\frac{dS}{r}\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt-$$

$$-\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S^{t_1}_0}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\mu\frac{du}{dn}-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx+\mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)dt+$$

$$+\varkappa\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\sum(x-x_0)\left(\mu\frac{du}{dn}-\frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx+\mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)\frac{dS}{r^2}+$$

$$+\mu\int\limits_0^{t_0}dt_1\int\limits_{S^{t_1}_0}dS\int\limits_0^{t_1-\varkappa r}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dt+\mu\varkappa\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)r\,dS+$$

$$+\int\limits_0^{t_0}dt\int\limits_{S_t}\Sigma u\cos nx\frac{dS}{r}-\mu\varkappa^2\int\limits_{S_0}\left(\Sigma u\cos nx-\frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\Sigma u(x-x_0)\right)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

Différentions cette formule par rapport à t_0. A gauche, nous obtenons:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt.$$

A droite, on calcule sans difficulté les dérivées de la plupart des termes. Envisageons p. ex. le terme troisième. Nous avons:

$$\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS=\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\left\{\int_{S_0^{t_0+dt_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa\right)dS-\right.$$

$$\left.-\int_{S_0^{t_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0}{r}-\varkappa\right)dS\right\}=$$

$$\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}+\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\int_{S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\left(\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa\right)dS.$$

Or on a sur $S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}$: $t_0+dt_0-\varkappa r\geqq 0$, $t_0-\varkappa r<0$. Donc:

$$\frac{t_0+dt_0}{r}-\varkappa<\frac{dt_0}{r}.$$

De plus l'aire $S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}$ tend toujours vers zéro avec dt_0. Donc, le troisième terme admet la dérivée:

$$-\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r}.$$

Considérons encore:

$$\frac{d}{dt_0}\int_0^{t_0}dt\int_{S_t}\Sigma u\cos nx\frac{dS}{r}=\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt=$$

$$=\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\left\{\int_{S_0^{t_0+dt_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0+dt_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt-\int_{S_0^{t_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt\right\}=$$

$$\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}+\lim_{dt_0=0}\frac{1}{dt_0}\int_{S_0^{t_0+dt_0}-S_0^{t_0}}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0+dt_0-\varkappa r}\Sigma u\cos nx\,dt=\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

En traitant les autres termes d'une manière analogue, nous obtenons la formule suivante, où S_{ph_0} désigne la limite vers laquelle tend la partie de la sphère $r = \frac{t_0}{\varkappa} + r'$ qui est située à l'intérieur de Ω, lorsque r' tend vers zéro:

$$\frac{4\pi}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt = \int_{\Omega_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{\varkappa}\int_{S_{ph_0}}\sigma_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_0^{t_0}dt\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\frac{d\omega}{r} -$$

$$-\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\frac{dS}{r} - \int_{S_0}dS\int_0^{t_0-\varkappa r}\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)dt -$$

$$-\int_{S_0}\frac{dS}{r}\int_0^{t_0-\varkappa r}\Sigma X\cos nx\,dt + \varkappa\int_{S_0}\sum(x-x_0)\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\cos nx + \mu\frac{\partial\sigma}{\partial t}\cos nx\right)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r^2} +$$

$$+\mu\int_{S_0}dS\int_0^{t_0-\varkappa r}\sum u\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)dt + \mu\varkappa\int_{S_0}\left[\sum n\frac{d}{dn}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\right]_{t=t_0-\varkappa r} r\,dS +$$

$$+\int_{S_0}(\Sigma u\cos nx)_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r} - \mu\varkappa^2\frac{d}{dt_0}\int_{S_0}\left[\Sigma u\cos nx - \frac{1}{r}\frac{dr}{dn}\Sigma(x-x_0)\right]_{t=t_0-\varkappa r}\frac{dS}{r}.$$

2. La fonction:

$$\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\sigma_0(t)\,dt$$

connue, on trouve aisément une expression pour la fonction $u(x_0, y_0, z_0, t_0)$. En effet, le système 1 peut s'écrire:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt\right) = X + \mu\Delta\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt\right) - \frac{\mu}{\varkappa^2}\int_0^t\Delta\frac{\partial\sigma}{\partial x}dt + \mu\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\,\partial t},$$

etc.,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Or on a, si l'on suppose que u, v, w, σ admettent des dérivées continues des trois premiers ordres et X, Y, Z des deux premiers ordres:

$$-\frac{\partial^3\sigma}{\partial x\,\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \frac{1}{\varkappa^2}\Delta\frac{\partial\sigma}{\partial x}.$$

Donc:

$$\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_{t=0} - \frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dt - \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \varDelta \frac{\partial\sigma}{\partial x} dt.$$

Donc:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial x} dt\right) = \mu\varDelta\left(u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial x} dt\right) + X + \mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_{t=0} -$$

$$-\mu\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dt,$$

etc. De ces équations, on déduit d'une manière bien connue des expressions pour $u + \frac{1}{\varkappa^2}\int_0^t \frac{\partial\sigma}{\partial x} dt$ etc. Malheureusement, les expressions pour u, v, w, ainsi obtenues dépendent d'une manière fort compliquée des donnés à la frontière u, v, w, σ $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$. C'est pourquoi nous choisissons une autre méthode pour parvenir à notre but.

Nous avons vu plus haut que l'on a, si u', v', w', σ' est un système de solutions du système 2, régulier à l'extérieur de la sphère $r = r'$:

$$\int_{\Omega_{r'}} \left(\Sigma u u' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)_{t=t_0} d\omega - \int_{\Omega_{r'}} \left(\Sigma u u' - \frac{1}{\varkappa^2}\sigma\sigma'\right)_{t=0} d\omega - \int_0^{t_0} dt \int_{\Omega_{r'}} (\Sigma X u') d\omega +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_S \left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma + \mu\cos nx \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right] dS -$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_S \left[\sum u\left(\mu\frac{du'}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma' - \mu\cos nx \frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\right] dS +$$

$$+ \int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma + \mu\cos nx \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right] dS -$$

$$-\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'} \sum u \left(\mu\frac{du'}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx \,.\, \sigma' - \mu\cos nx \frac{\partial\sigma'}{\partial t}\right)\Bigg] dS = 0.$$

Posons:

$$u' = -\frac{1}{2\mu}\frac{e^{-\frac{r^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{(t_0-t)^3}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2},\ v' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y},$$

$$w' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z},\ \sigma' = 0,$$

où:

$$G = \int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}} d\tau.$$

On peut donner à la fonction G une forme différente. La fonction:

$$E(\xi, \tau) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{t_0-\tau}}$$

satisfait à l'équation:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} = 0.$$

Donc:

$$-\int_{r'}^{r} E(\xi, \tau) d\xi + \mu \int_t^{t_0} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} d\tau - \mu \int_t^{t_0} \left(\frac{\partial E}{\partial \xi}\right)_{\xi=r'} d\tau = 0$$

et par conséquent:

$$-\frac{1}{2} G = \frac{1}{r}\int_{r'}^{r} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0-t}} d\xi - \frac{r'}{2r}\int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}} d\tau.$$

Dans chap. I de la première partie de ce travail, nous avons défini les fonctions $u'(r')$, $v'(r')$, $w'(r')$ par les équations:

$$u'(r') = -\frac{\partial^2 P(r')}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P(r')}{\partial z^2},\ v(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial y},\ w(r') = \frac{\partial^2 P(r')}{\partial x \partial z},$$

où:

$$P(r') = \frac{1}{r}\int_{r'}^{r} \frac{e^{-\frac{\varrho \xi^2}{4\mu(t_0-t)}}}{\sqrt{t_0-t}} d\xi.$$

Nous avons donc, en posant $\varrho = 1$:

$$-\frac{1}{2}G = P(r') - \frac{r'}{2r}\int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}}\,d\tau$$

et:

$$u' = -u'(r') - \frac{r'^2}{2r^3}\left(1 - \frac{3(x-x_0)^2}{r^2}\right)F_{r'},\ v' = -v'(r') + \frac{3r'^2(x-x_0)(y-y_0)}{2r^5}F_{r'},$$

$$w' = -w'(r') + \frac{3r'^2(x-x_0)(z-z_0)}{2r^5}F_{r'},\ \sigma' = 0.$$

On a posé ici:

$$F_{r'} = \frac{1}{r'}\int_t^{t_0} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu(t_0-\tau)}}}{\sqrt{(t_0-\tau)^3}}\,d\tau = \frac{1}{r'}\int_0^{t_0-t} \frac{e^{-\frac{r'^2}{4\mu\xi}}}{\sqrt{\xi^3}}\,d\xi.$$

Cela étant, on calcule assez simplement les valeurs, vers lesquelles tendent les deux derniers termes de notre formule, lorsque r' tend vers zéro. Tout d'abord, nous avons en vertu des résultats trouvés dans la première partie:

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'}\left[\sum u'(r')\left(\mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma + \mu\cos nx\,.\,\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dS = 0.$$

$$\lim_{r'=0}\mu\int_0^{t_0} dt \int_{r=r'}\sum u\frac{du'(r')}{dn}\,dS = \frac{8}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Les termes restants de nos deux intégrales peuvent s'écrire, en mettant:

$$V_x = \mu\frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma + \mu\cos nx\,.\,\frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

etc:

$$\frac{r'^2}{2}\int_0^{t_0} F_{r'}\,dt\int_{r=r'}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)V_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)V_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)V_z\right]dS +$$

$$+\frac{3\mu r'}{2}\int_0^{t_0} F_{r'}\,dt\int_{r=r'}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)u + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)v + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)w\right]dS.$$

Pour calculer les valeurs limites de ces deux intégrales, nous remarquons d'abord que l'on a:

$$u = u_0(t) + (x - x_0)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \varphi,$$

etc.,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \cdots + \psi,$$

etc.,

$$\sigma = \sigma_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + \cdots + \psi,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)_0 + (x - x_0)\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0 + \cdots + \psi,$$

φ et ψ étant des fonctions de x, y, z, t, continues dans le voisinage de $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ et admettant les propriétés:

$$\lim_{r=0} \frac{\varphi}{r^2} = 0, \lim_{r=0} \frac{\psi}{r} = 0.$$

Substituons dans nos intégrales ces expressions pour u, v,... On voit de suite que la plupart des termes ainsi obtenus s'annulent, lorsqu'on effectue l'intégration sur la sphère $r = r'$ et que les termes qui contiennent φ ou ψ s'annulent avec r'. Dans la première intégrale, il reste à considérer les termes:

$$\frac{r'}{2}\int_0^{t_0} F_{r'} dt \int_{r=r'} \left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\mu (x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \mu (y - y_0)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 + \mu (z - z_0)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{(x - x_0)^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + \mu (x - x_0)^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\right] + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\left[2\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\right] + (x - x_0)(z - z_0)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\left[2\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)_0 - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)_0 + 2\mu\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial t}\right)_0\right]\right\} dS.$$

Comme:

$$\int_{r=r'} (x - x_0)^2 dS = \frac{4}{3}\pi r'^4, \int_{r=r'} (x - x_0)^4 dS = \frac{4}{5}\pi r'^6,$$

$$\int_{r=r'} (x - x_0)^2 (y - y_0)^2 dS = \frac{4}{15}\pi r'^6,$$

cette intégrale est égale à:

$$\frac{r'^2}{2}\int_0^{t_0}\left\{\frac{8\pi\mu}{15}\left[2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]+\frac{8\pi\mu}{5}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{8\pi}{3}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0\right]\right\}F_{r'}dt.$$

D'où la valeur limite de la première intégrale:

$$8\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\frac{\mu}{15}\left[2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]-\frac{\mu}{5}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0\right]\right\}dt=$$

$$-8\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\frac{\mu}{15}(\varDelta u)_0-\frac{2\mu}{15}\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+\frac{1}{3\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0\right\}dt.$$

De la seconde intégrale, nous obtenons:

$$\frac{3}{4}\mu r'\int_0^{t_0}F_{r'}dt\int_{r=r'}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\left[(x-x_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+(y-y_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+(z-z_0)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right]+\right.$$

$$\left.+2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)_0+2(x-x_0)(z-z_0)\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)_0\right\}dS,$$

ce qui donne:

$$-\frac{4}{3}\pi\mu\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{3\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+(\varDelta u)_0\right\}dt.$$

Voilà donc la valeur limite de nos deux intégrales:

$$-\frac{8}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0,t_0)-\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}\left\{\mu(\varDelta u)_0+\mu\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}\right)_0+\frac{2}{\varkappa^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0\right\}dt=$$

$$-4\pi\sqrt{\pi\mu}\left(u_0(t_0)+\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0dt\right)+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0,0)+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}X_0dt.$$

Nous avons donc obtenu la formule suivante:

$$4\pi\sqrt{\pi\mu}\left[u_0(t_0)+\frac{1}{\varkappa^2}\int_0^{t_0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0 dt\right]=\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\int_0^{t_0}X_0\,dt+\frac{4}{3}\pi\sqrt{\pi\mu}\,u(x_0,y_0,z_0,0)-$$

$$-\lim_{r'=0}\int_{\Omega_{r'}}(\Sigma uu')_{t=0}d\omega-\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{\Omega_{r'}}\Sigma Xu'\,d\omega+\int_0^{t_0}dt\int_S\left[\sum u'\left(\mu\frac{du}{dn}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\varkappa^2}\cos nx\,.\,\sigma+\mu\cos nx\,.\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right]dS-\mu\int_0^{t_0}dt\int_S\sum u\,\frac{du'}{dn}dS.$$

Posons:

$$\lim_{r'=0}u'(r')=\bar{u}',$$

etc., ce qui donne:

$$\bar{u}'=-u'+\sqrt{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right),\ \bar{v}'=-v'+\sqrt{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\bar{w}'=-w'+\sqrt{\pi\mu}\,\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Les résultats obtenus dans la première partie permettent immédiatement d'écrire les égalités:

$$\lim_{r'=0}\int_{\Omega_{r'}}(\Sigma uu'(r'))_{t=0}\,d\omega=\int_{\Omega}(\Sigma u\bar{u}')_{t=0}d\omega,$$

$$\lim_{r'=0}\int_0^{t_0}dt\int_{\Omega_{r'}}\Sigma Xu'(r')\,d\omega=\int_0^{t_0}dt\int_{\Omega}\Sigma X\bar{u}'\,d\omega.$$

D'autre part:

$$\frac{r'^2}{2}\int_{\Omega_{r'}}\left[\sum u\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)F_{r'}\right]_{t=0}d\omega=-\frac{r'^2}{2}\int_S(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}dS-$$

$$-\frac{r'^2}{2}\int_{r=r'}(\Sigma u\cos nx)_{t=0}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}dS-\frac{r'^2}{2}\int_{\Omega_{r'}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{t=0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)(F_{r'})_{t=0}\,d\omega.$$

Donc:

$$\lim_{r'=0} \frac{r'^2}{2} \int\limits_{\Omega_{r'}} \left[\sum u \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) F_{r'}\right]_{t=0} d\omega = -V\overline{\pi\mu} \int\limits_{S} (\Sigma u \cos nx)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{4}{3}\pi V\overline{\pi\mu}\, u(x_0, y_0, z_0\, 0) + V\overline{\pi\mu} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega.$$

On obtient de la même manière:

$$\lim_{r'=0} \frac{r'^2}{2} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega_{r'}} \sum X \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) F_{r'} d\omega = -V\overline{\pi\mu} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_S \Sigma X \cos nx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \frac{4}{3}\pi V\overline{\pi\mu} \int\limits_0^{t_0} X_0\, dt - V\overline{\pi\mu} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega.$$

Donc enfin:

$$4\pi V\overline{\pi\mu} \left(u_0(t_0) + \frac{1}{\varkappa^2} \int\limits_0^{t_0} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)_0 dt\right) = \int\limits_{\Omega} (\Sigma u \bar{u}')_{t=0} d\omega - V\overline{\pi\mu} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega} \Sigma X \bar{u}' d\omega + V\overline{\pi\mu} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\omega +$$

$$+ V\overline{\pi\mu} \int\limits_S (\Sigma u \cos nx)_{t=0} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS + V\overline{\pi\mu} \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_S \Sigma X \cos nx \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) dS +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_S \left[\sum u' \left(\mu \frac{du}{dn} - \frac{1}{\varkappa^2} \cos nx \,.\, \sigma + \mu \cos nx \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\right] dS - \mu \int\limits_0^{t_0} dt \int\limits_S \sum n \frac{du'}{dn} dS.$$

Les formules analogues s'obtiennent par des permutations des lettres.

Lund, Mai 1909.