SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE D'UNE BRANCHE UNIFORME D'UNE FONCTION MONOGÈNE

(Première note[1])

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Désignons par a un point du plan de la variable complexe x, et adjoignons à a une suite infinie de quantités,

$$(1) \qquad F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots\,,\, F^{(\mu)}(a)\,,\, \ldots$$

où chaque quantité est parfaitement déterminée quand on sait le rang qu'elle occupe dans la suite. Supposons, ce qui sera possible d'une infinité de manières, que ces quantités F soient choisies telles que la limite supérieure des valeurs limites[2] des modules $\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)}\right|$ soit un nombre fini, par exemple $\frac{1}{r}$.

---

[1] La présente note est un extrait des différentes communications qui ont été faites à l'Académie des sciences de Stockholm dans le courant de l'année 1898, et qui ont été publiées sous les titres suivants:

Om en generalisering af potensserien (9 Mars 1898).

Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion: Första meddelande (11 Maj 1898); Andra meddelande (11 Maj 1898); Tredje meddelande (14 Sept. 1898).

[2] P désignant une suite infinie de nombres, on nommera nombre limite ou valeur limite de ces nombres, un nombre tel que, dans un voisinage aussi rapproché de lui que l'on voudra, il se trouve une infinité de nombres appartenant à P. *L'infini* est dit *la valeur limite* de la suite si, dans un voisinage aussi rapproché de zéro que l'on voudra,

Si, au moyen des quantités F comme éléments, l'on forme une série de puissances

$$(2) \qquad \mathfrak{P}(x\,|\,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,.\,(x-a)^{\mu},$$

cette série sera convergente tant que x remplira la condition

$$|\,x-a\,| < r,$$

et sera divergente tant que

$$|\,x-a\,| > r.$$ [1]

Le domaine $|\,x-a\,| < r$, qui dans le plan des x est représenté par un cercle ayant pour centre le point a et pour rayon la quantité positive r, est le cercle de convergence de la série $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$.[2]

Dans la théorie des fonctions analytiques, édifiée par WEIERSTRASS, la fonction est définie par la série $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ et par la continuation analytique de cette série. Chaque fonction analytique est parfaitement déterminée, pourvu que les éléments

$$F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots\,,\, F^{(\mu)}(a)\,,\, \ldots$$

soient donnés. On désigne en général par $F(x)$ la fonction qui dans sa totalité est définie par ces éléments.

Si K est un continuum formé d'une seule pièce qui ne se recouvre

---

il existe une infinité de nombres qui sont les inverses des nombres appartenant à la suite P. Si P est formée de nombres réels quelconques, et, si parmi ces nombres il en existe un qui n'est inférieur à aucun des autres, ce nombre sera dit *la limite supérieure* de P. Si, parmi les nombres qui appartiennent à P, il en est de plus grands que tout nombre donné, c'est *l'infini* qui sera dit *la limite supérieure* de P. Si aucun de ces deux cas n'a lieu il existe toujours, ainsi que WEIERSTRASS l'a démontré d'une manière rigoureuse, un nombre plus grand que tous les nombres appartenant à P et tel que dans chaque voisinage de ce nombre il existe un nombre infini de valeurs appartenant à P. Ce nombre alors sera dit *la limite supérieure* de P.

La limite inférieure de P peut aussi être définie d'une manière analogue.

[1] Voir: CAUCHY, Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. I^ère Partie. Analyse algébrique, Paris 1821. Chapitre 9, § 2, théorème I, pag. 286.

[2] Nous ne comptons donc pas le contour du cercle de convergence comme faisant partie du cercle.

nulle part elle-même, renfermant le point a, et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ et sa continuation analytique à l'intérieur de K, reste uniforme et régulière, nous désignerons cette branche par $FK(x)$.

Le problème dont nous allons nous occuper sera de trouver une représentation analytique d'une branche $FK(x)$ choisie aussi étendue que possible.

De la définition même de la fonction analytique $F(x)$, et de celle de la branche $FK(x)$, résulte immédiatement une sorte de représentation analytique de la branche $FK(x)$ en question.

En effet, pour obtenir une représentation de cette branche, il suffit d'effectuer un nombre dénombrable de prolongements analytiques de $\mathfrak{P}(x|a)$, par exemple

$$\mathfrak{P}_\nu(x\,|\,a_\nu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} \left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu} (x - a_\nu)^\mu,$$

$$\nu = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,;\; a_0 = a\,;\; \mathfrak{P}_0(x\,|\,a) = \mathfrak{P}(x\,|\,a).$$

Les séries $\mathfrak{P}_\nu(x\,|\,a_\nu)$ sont formées au moyen des éléments

$$\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu}; \qquad \binom{\mu=0,1,2,\ldots}{\nu=0,1,2,\ldots}$$

et ces éléments eux-mêmes peuvent être calculés au moyen des éléments primitifs

$$F^{(\mu)}(a)\,;\; \big(\mu = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,;\; F^{(0)}(a) = F(a)\big).$$

Mais, pour opérer ce calcul, il faut connaître le rayon du cercle de convergence de chaque série $\mathfrak{P}_\nu(x\,|\,a_\nu)$, car il est impossible d'effectuer la continuation immédiate d'une telle série sans en connaître le rayon de convergence. Nous avons déjà cité le théorème de Cauchy qui nous donne ce rayon de convergence exprimé par l'inverse de la limite supérieure des quantités positives

$$\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}}\left(\frac{d^\mu FK(x)}{dx^\mu}\right)_{x=a_\nu}}\right|;\; \mu = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots.$$

On voit que cette manière de représenter $FK(x)$ au moyen d'expressions analytiques est d'une complication extrême et d'une transcendance très élevée. Il semble d'ailleurs que WEIERSTRASS n'ait guère regardé la continuation analytique autrement que comme un mode de définition de la fonction analytique. Les avantages de cette définition sont bien connus, et je n'ai pas besoin d'y insister.

Au premier abord il semble que la théorie de CAUCHY, qui est édifiée sur des principes tout autres que celle de WEIERSTRASS, possède un grand avantage sur celle-ci, lorsqu'il s'agit de la représentation analytique de $FK(x)$. En effet une telle représentation est donnée par la formule

$$(3) \qquad FK(x) = \int^{S} \frac{FK(z)}{z-x} dz,$$

où l'intégrale est prise le long d'un contour fermé S situé à l'intérieur de K et aussi rapproché de la frontière de K que l'on voudra. D'après la définition même d'une intégrale, il est évident que l'intégrale (3) peut être remplacée par une somme infinie de fonctions rationnelles de x dont les coefficients sont exprimés par des valeurs spéciales de x en nombre dénombrable et par les valeurs correspondantes de $FK(x)$. Cette observation a été le point de départ d'un travail magistral de M. RUNGE, que j'ai publié dans le tome 6 de ce journal.[1] La représentation analytique que l'on obtient ainsi exige donc que l'on connaisse la valeur de $FK(x)$ en un nombre infini et dénombrable de points qui doivent se rapprocher indéfiniment de la frontière de K. Or, dans les problèmes habituels de l'analyse, ces valeurs ne sont nullement connues. En général, c'est au contraire la série des valeurs

$$F(a)\,,\; F^{(1)}(a)\,,\; F^{(2)}(a)\,,\, \ldots$$

qui est donnée. Si l'on se met au point de vue usuel, il en est ainsi, par exemple, dans le problème si vaste de l'intégration des équations différentielles.

Quand il s'agira de trouver la représentation analytique de $FK(x)$, il faudra donc la tirer des éléments (1) et s'efforcer à l'aide seule de ces éléments de construire une formule qui représente la branche $FK(x)$ toute entière.

---

[1] *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, § 1, p. 229—239.

Désignons par C le cercle de convergence de la série (2). L'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a) \,.\, (x - a)^{\mu}$$

donnera alors la représentation analytique de $FC(x)$, l'égalité

$$FC(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a) \,.\, (x - a)^{\mu}$$

ayant lieu pour tous les points de C.

Cette expression est construite au moyen des éléments

$$F(a)\,,\, F^{(1)}(a)\,,\, F^{(2)}(a)\,,\, \ldots$$

et des nombres rationnels $\frac{1}{\underline{|\mu}}$ indépendants du choix des dits éléments.

Est-il possible d'obtenir de même pour une branche $FK(x)$ ayant la plus grande étendue possible une représentation analytique de cette nature? Nous allons voir que la réponse est affirmative, et qu'il est par conséquent possible de combler une lacune de la théorie des fonctions analytiques; en effet, jusqu'ici l'on n'avait pu donner pour la branche générale $FK(x)$ une représentation analytique pareille à celle trouvée dès les débuts de la théorie pour la branche $FC(x)$.

Pour traiter à fond la question que nous avons posée, il faut définir un domaine K qui soit aussi vaste que possible. C'est ce que nous allons faire en introduisant une nouvelle conception géométrique: l'*Etoile*.

Dans le plan de la variable complexe x, soit une aire engendrée de la manière suivante: autour d'un point fixe a on fera tourner une fois un vecteur[1] l; sur chaque vecteur on déterminera d'une manière univoque un point, soit a_l, dont la distance au point fixe a sera plus grande qu'une quantité positive donnée, la même pour tous les vecteurs. Ce point a_l pourra être situé à une distance finie ou infinie du point a. Dans le cas où la distance de a à a_l est finie, on exclura du plan des x la partie du vecteur qui s'étend de a_l à l'infini. Nous donnerons le nom d'*Etoile* au domaine qui reste après que l'on aura exécuté toutes ces coupures dans le plan des x.

[1] Une demi-droite.

On voit que *l'étoile*[1] ainsi définie est un continuum formé d'une seule pièce et à connexion simple.

Adjoignons maintenant à a les éléments

$$F(a)\,,\; F^{(1)}(a)\,,\; F^{(2)}(a)\,,\;\ldots\,,\; F^{(\mu)}(a)\,,\;\ldots\,,$$

et formons la série

$$\mathfrak{P}(x\,|\,a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a)\,.\,(x-a)^{\mu}.$$

Effectuons la continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ le long d'un vecteur issu du point a.

Il se peut que chaque point de ce vecteur appartienne au cercle de convergence d'une série qui est elle-même une continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ obtenue en procédant le long du vecteur; mais il est aussi possible qu'en procédant le long du vecteur on rencontre un premier point qui n'est situé à l'intérieur du cercle de convergence d'aucune continuation analytique de $\mathfrak{P}(x\,|\,a)$ le long du vecteur. Dans ce dernier cas nous exclurons du plan des x la partie du vecteur comprise entre le point ci-dessus et l'infini. En faisant tourner une fois le vecteur autour de a nous obtiendrons une étoile telle qu'elle a été définie précédemment.

Cette étoile étant donnée d'une manière univoque dès que les éléments (1) sont fixés, nous l'appellerons *l'étoile appartenant à ces éléments.*[1] Nous la désignerons en général par A, la première lettre du mot grec ἀστήρ.

En définissant l'étoile, nous avons choisis comme vecteurs des demi-droites. Il est facile de voir qu'on aurait pu prendre aussi bien des lignes courbes définies d'une manière convenable.

En analogie parfaite avec la terminologie: *étoile appartenant aux éléments* (1), nous parlerons du *cercle appartenant à ces éléments,* qui n'est pas autre chose que le cercle de convergence de la série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(a).(x-a)^{\mu}. \tag{2}$$

Nous parlerons de même de *la fonction* $F(x)$ et de *la branche fonctionnelle* $FA(x)$ *appartenant à ces éléments.*

---

[1] J'ai introduit pour la première fois la conception de l'étoile appartenant aux éléments (1) dans ma note déjà citée *Om en generalisering* etc.

Ces préliminaires terminés nous pouvons énoncer ainsi le théorème principal qui sera démontré dans la suite:

La branche $FA(x)$ peut toujours être représentée par une série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{(\mu)}(x),$$

les $G_{(\mu)}(x)$ désignant les fonctions entières rationnelles de x:

$$G_{(\mu)}(x) = \sum_{(\nu)} c_{\nu}^{(\mu)} F^{(\nu)}(a) \, . \, (x - a)^{\nu},$$

où les coefficients $c_{\nu}^{(\mu)}$ sont donnés a priori indépendamment du choix de a et de $F^{(\nu)}(a)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$.

Cette série $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_{\mu}(x)$ est convergente pour chaque point de l'étoile A et uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A.

Dans cette première note on trouvera une démonstration de ce théorème, remarquable par la forme très-simple qu'on obtient pour les coefficients $c_{\nu}^{(\mu)}$. Dans d'autres notes nous donnerons d'autres démonstrations qui se distinguent surtout par une détermination différente des $c_{\nu}^{(\mu)}$. Nous nous occuperons de même d'autres questions rentrant dans le même ordre d'idées ainsi que de leurs applications.

Pour donner la démonstration que nous voulons exposer dans cette note il sera commode d'employer une construction géométrique se rapportant à une étoile quelconque, soit E, qui n'est pas le plan des x tout entier.

Soit a le centre de l'étoile E, et soit n un nombre entier positif donné. Nous définirons une étoile $E^{(n)}$ de la manière suivante. Fixons un vecteur l issu du point a. En désignant par r une quantité positive suffisamment petite et en limitant le vecteur à la longueur $(n - 1)r$, il arrivera que tout cercle de rayon r, décrit d'un point quelconque de ce vecteur limité comme centre, fera partie de E. En désignant par ρ la limite supérieure de r, en portant sur l la longueur $n\rho$ et en faisant tourner l une fois autour de a, nous obtiendrons l'étoile $E^{(n)}$. On voit que l'étoile $E^{(1)}$ est un cercle, que l'étoile $E^{(n+1)}$ renferme l'étoile $E^{(n)}$ et que toutes les étoiles $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, \ldots$ font partie de l'étoile E.

Soit ensuite α une quantité réelle positive et inférieure à l'unité. Nous considérerons, conjointement avec l'étoile $E^{(n)}$, n autres étoiles $E_{\mu}^{(n)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ obtenues en remplaçant ρ successivement par

$$(4) \qquad \rho_\mu = \alpha^\mu \rho .$$

On voit que $E_{\mu}^{(n)}$ est situé à l'intérieur[1] de $E_{\mu-1}^{(n)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n; E_0^{(n)} = E^{(n)})$.

Soit maintenant $\mathfrak{E}$ une étoile quelconque et soit X un domaine fini situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$, on pourra toujours trouver une étoile finie E concentrique à $\mathfrak{E}$, située toute entière à l'intérieur de $\mathfrak{E}$, et qui renferme à son intérieur tout le domaine X.

En effet, puisque X est situé à l'intérieur de E il existe une quantité positive δ telle que, x étant un point quelconque du domaine X, x' appartient à $\mathfrak{E}$ dès que $|x' - x| < \delta$. Soit X' le domaine formé par tous les points dont la distance à un point de X est inférieure à $\frac{1}{2}\delta$. Il est évident que le domaine X' est situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$ et qu'il comprend le domaine X à son intérieur. Formons maintenant une étoile E de la manière suivante: Quand du point a on mène un vecteur quelconque et que l'on désigne par R la limite supérieure des distances de a aux points de ce vecteur qui appartiennent au domaine X', tous les points du vecteur dont la distance à a est inférieure ou égale à R appartiendront à E, tandis que ceux dont la distance à a est supérieure à R n'y appartiendront pas.

Le domaine X, étant situé à l'intérieur de X', est évidemment situé à l'intérieur de l'étoile E.

Il est encore évident que l'étoile E est finie lorsque le domaine X est fini.

Enfin, il est facile de voir que l'étoile E est située à l'intérieur de l'étoile $\mathfrak{E}$. En effet, on sait que «l'entourage $\frac{1}{2}\delta$» d'un point quelconque de X' fait partie de $\mathfrak{E}$. Considérons un point quelconque de E, soit x, et soit r la distance de a à x. Comme précédemment soit R la portion appartenant à E, du vecteur issu de a et passant par x. Puisque le point à l'extrémité de ce vecteur est sur la frontière de X', son entourage $\frac{1}{2}\delta$

[1] Un domaine fini X est dit situé à l'intérieur d'un autre domaine X' s'il existe une quantité positive δ telle que, x étant un point quelconque appartenant à X, tous les points x' pour lesquels $|x' - x| < \delta$ appartiennent à X'; ce qu'on exprime parfois en disant que «l'entourage δ» de x appartient à X'.

fera partie de $\mathfrak{E}$, et par conséquent, puisque $\mathfrak{E}$ est une étoile dont le centre est en a, l'entourage $\frac{r}{R}\frac{\delta}{2}$ de x fera partie de $\mathfrak{E}$. Soit $\mathfrak{R}$ la limite supérieure des R et soit k une quantité positive fixée d'une manière quelconque, on pourra *a fortiori* dire que l'entourage $\frac{k}{\mathfrak{R}}\frac{\delta}{2}$ du point x fait partie de $\mathfrak{E}$, dès que r, la distance de a à x, n'est pas inférieure à k. Fixons maintenant, ce qui est toujours possible, k de telle manière qu'un cercle décrit du point a comme centre, avec le rayon $k\left(1+\frac{1}{\mathfrak{R}}\frac{\delta}{2}\right)=k+\frac{k}{\mathfrak{R}}\frac{\delta}{2}$, fasse partie de $\mathfrak{E}$. Alors l'entourage $\frac{k}{\mathfrak{R}}\frac{\delta}{2}$ du point x fera partie de $\mathfrak{E}$, même si r est inférieur à k, et il en sera de même, par conséquent, pour toutes les positions du point x à l'intérieur de E. Donc E est, comme nous l'avons dit, situé à l'intérieur de $\mathfrak{E}$.

Nous pouvons aller plus loin encore. Il est toujours possible de trouver un nombre entier $\bar{n}$ suffisamment grand pour que X soit situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geqq \bar{n}$. En effet, soit E' une étoile située tout à fait à l'intérieur de E et contenant X à son intérieur, et désignons par δ' une quantité positive telle que l'entourage δ' de tout point de E' appartient à E. Considérons un vecteur quelconque issu de l'origine. D'après la définition de l'étoile $E^{(n)}$, et puisque tous les vecteurs de E sont inférieurs ou égaux à $\mathfrak{R}$, il est évident que tous les points de ce vecteur qui appartiennent à E' appartiennent aussi à $E^{(n)}$, dès que $\frac{\mathfrak{R}}{n}<\delta'$. Il suffit donc de prendre $\bar{n}$ plus grand que $\frac{\mathfrak{R}}{\delta'}$ pour être sûr que tout le domaine X sera situé à l'intérieur de $E^{(n)}$ dès que $n \geqq \bar{n}$.

Ayant choisi un nombre $\bar{n}$ qui vérifie cette condition, on pourra encore choisir α en sorte que non seulement $E^{(n)}$ mais encore $E^{(n)}_{\alpha}$ renferme à son intérieur tout le domaine X. En réalité, si nous faisons dépendre α de n de telle sorte que α^n converge vers l'unité quand n croît indéfiniment, il arrivera toujours, à partir d'une certaine valeur de n, que $E^{(n)}_{\alpha}$ renfermera à son intérieur le domaine X.

Ces préliminaires posés, nous supposerons que X est un domaine fini quelconque, situé à l'intérieur de l'étoile A appartenant, au sens défini ci-dessus, aux éléments

$$F(a),\, F^{(1)}(a),\, F^{(2)}(a), \ldots .$$

C'est par rapport à cette étoile A que nous formerons aussi bien l'étoile finie E qui renferme à son intérieur le domaine X et qui est située elle-même à l'intérieur de A, que l'étoile $E^{(n)}$ et les n étoiles adjointes

$$E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots, E_n^{(n)},$$

l'entier n étant choisi arbitrairement.

Nous supposerons que n soit choisi suffisamment grand pour que $E_n^{(n)}$ renferme à son intérieur le domaine X.

A l'intérieur et sur la frontière de E la limite supérieure des valeurs $|FA(x)|$ sera une quantité finie que nous désignerons par g.

Pour simplifier les formules suivantes, nous conviendrons d'écrire

$$\xi \text{ au lieu de } \frac{x-a}{n},$$

$$\xi_\mu \text{ au lieu de } a+\mu\frac{x-a}{n}.$$

Nous ferons encore cette convention que dans nos formules $F^{(\mu)}(x)$ signifiera $\frac{d^\mu FA(x)}{dx^\mu}$.

Soit maintenant x un point du domaine X. Fixons le vecteur issu du point a qui passera par x, ainsi que la quantité positive ρ correspondant à ce vecteur, de la manière indiquée à la fin de la page 49. Si maintenant z satisfait à la condition

$$|z-\xi_{n-1}| \leqq \rho, \tag{5}$$

z sera situé à l'intérieur de E, ou sur sa frontière, et l'on aura

$$FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})(z-\xi_{n-1})^{\lambda_1}. \tag{6}$$

Par conséquent, en vertu d'un théorème connu, développé par WEIERSTRASS dans son mémoire de 1841 *Zur Theorie der Potenzreihen*,[1] on aura

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\right| \leqq g\rho^{-\lambda_1}. \tag{7}$$

Le point x appartenant au domaine X appartiendra en même temps

---

[1] Werke, Bd. 1, page 67.

à $E_1^{(n)}$, et on aura $|\xi| < \rho_1$, où ρ_1 est défini par la formule (4). Par conséquent

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}\right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\lambda_1} = g\alpha^{\lambda_1}. \tag{8}$$

Si x appartient à l'étoile $E_1^{(n)}$, et si z et z_1 sont choisis conformément aux conditions

$$\begin{aligned} &|z_1 - \xi_{n-2}| \leqq \rho_1, \\ &|z - z_1| \leqq \rho - \rho_1, \end{aligned} \tag{9}$$

la distance de z au point ξ_{n-2}, situé sur le vecteur allant de a à x, est au plus égale à ρ, et z appartient, par conséquent, à l'intérieur ou à la frontière de E. On aura donc pour toutes les valeurs z qui satisfont à la condition (9)

$$FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) \cdot (z - z_1)^{\lambda_1} \tag{10}$$

et, par conséquent, en vertu du théorème de Weierstrass on aura

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)\right| \leqq g(\rho - \rho_1)^{-\lambda_1}. \tag{11}$$

Multipliant par $|(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1}| \leqq \rho_1^{\lambda_1}$, on obtient immédiatement

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1}\right| \leqq g\left(\frac{\rho_1}{\rho - \rho_1}\right)^{\lambda_1} = g\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\lambda_1}. \tag{12}$$

Or on a

$$F^{(\lambda_1)}(z_1) = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \cdot (z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_2} \tag{13}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})(z_1 - \xi_{n-2})^{\lambda_1+\lambda_2}. \tag{14}$$

Appliquant encore une fois le théorème de Weierstrass nous obtenons, en vertu de (12) et (14)

$$\left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\right| \leqq g\left(\frac{\alpha}{1 - \alpha}\right)^{\lambda_1} \rho_1^{-(\lambda_1+\lambda_2)}. \tag{15}$$

Le point x étant situé non seulement à l'intérieur de $E_1^{(n)}$ mais encore à l'intérieur de $E_2^{(n)}$, on trouve que $\xi = \frac{x-a}{n}$ est inférieur en valeur absolue à ρ_2, et on aura

$$(16) \qquad \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2}) \xi^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1} \alpha^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

En continuant de la sorte, nous aurons finalement à considérer une suite de variables $z_{n-1}, z_{n-2}, \ldots z_1, z$ assujetties aux conditions

$$(17) \qquad \begin{cases} |z_{n-1} - a| \leqq \rho_{n-1}, \\ |z_{n-2} - z_{n-1}| \leqq \rho_{n-2} - \rho_{n-1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |z_1 - z_2| \leqq \rho_1 - \rho_2, \\ |z - z_1| \leqq \rho - \rho_1. \end{cases}$$

Il est évident que les valeurs admissibles de toutes ces variables appartiennent toutes à l'intérieur ou à la frontière du domaine E.

Nous obtiendrons successivement

$$\begin{cases} FA(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) . (z - z_1)^{\lambda_1} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) \right| \leqq g . (\rho - \rho_1)^{-\lambda_1} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1) . (z_1 - z_2)^{\lambda_1} \right| \leqq g\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho - \rho_1}\right)^{\lambda_1} = g\alpha^{\lambda_1} \\ \frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(z_1)(z_1 - z_2)^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2) . (z_1 - z_2)^{\lambda_1+\lambda_2} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2) \right| \leqq g\alpha^{\lambda_1}(\rho_1 - \rho_2)^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \\ \left| \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2 - z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} \right| \leqq g\alpha^{\lambda_1} . \alpha^{\lambda_1+\lambda_2} \end{cases}$$

$$(18)\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(z_2)(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2} = \sum\limits_{\lambda_3=0}^{\infty} \dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3).(z_2-z_3)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \\
\left|\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\,\underline{|\lambda_3}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}(z_3)\right| \leqq g\alpha^{\lambda_1}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}.(\rho_2-\rho_3)^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left|\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})\right| \\
\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}(\rho_{n-2}-\rho_{n-1})^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})} \\
\left|\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\right| \\
\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}} \\
\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_{n-1}}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1})}(z_{n-1})(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}} \\
\qquad\qquad = \sum\limits_{\lambda_n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a).(z_{n-1}-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} \\
\left|\dfrac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}\right| F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\Big| \\
\qquad\qquad \leqq g\alpha^{\lambda_1}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}.\left(\dfrac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}.\rho_{n-1}^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}
\end{array}\right.$$

et enfin, x appartenant à $E_n^{(n)}$,

$$(19)\qquad \left|\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\xi^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}\right|$$
$$\leqq g\alpha^{\lambda_1}.\alpha^{\lambda_1+\lambda_2}\ldots\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-2}}.\left(\frac{a}{1-a}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}}\alpha^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

La condition (5) étant remplie si l'on fait $z = x$, on tire de (6)

$$(20)\qquad FA(x) = \sum_{\lambda=0}^{m_1}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1} + \varepsilon_1$$

où

$$(21) \qquad \varepsilon_1 = \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1}.$$

On aura donc, à cause de (8),

$$(22) \qquad |\varepsilon_1| \leqq g \sum_{\lambda_1=m_1+1}^{\infty} a^{\lambda_1} = g\frac{a^{m_1+1}}{1-a}.$$

De même, les conditions (9) étant remplies en faisant $z_1 = \xi_{n-1}$, $z = z_1$, on aura, en sommant dans (14) par rapport à λ_1 depuis 0 jusqu'à m_1,

$$(23) \qquad \sum_{\lambda_1=0}^{m_1} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}} F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})\xi^{\lambda_1} = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_2$$

où

$$(24) \qquad \varepsilon_2 = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}} F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})\xi^{\lambda_1+\lambda_2}.$$

On aura, par conséquent, en vertu de (16)

$$(25) \qquad |\varepsilon_2| \leqq g\sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=m_2+1}^{\infty} \frac{a^{2\lambda_1+\lambda_2}}{(1-a)^{\lambda_1}} = g\frac{\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-a}{a^2}}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_1+1}\right)\cdot\frac{a^{m_2+1}}{1-a}.$$

On démontrera de la même manière les formules suivantes

$$(26) \qquad FA(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n} \frac{1}{|\underline{\lambda_1}\,|\underline{\lambda_2}\cdots|\underline{\lambda_n}} \cdot F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a)\cdot\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$$
$$+ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_\mu + \ldots + \varepsilon_n$$

où

$$(27) \qquad |\varepsilon_\mu| \leqq g\frac{\left(\frac{a^\mu}{1-a}\right)^{m_1}}{1-\frac{1-a}{a^\mu}}\cdot\frac{\left(\frac{a^{\mu-1}}{1-a}\right)^{m_2}}{1-\frac{1-a}{a^{\mu-1}}}\cdots\frac{\left(\frac{a^2}{1-a}\right)^{m_{\mu-1}}}{1-\frac{1-a}{a^2}}$$

$$\times\left(1-\left(\frac{1-a}{a^\mu}\right)^{m_1+1}\right)\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-1}}\right)^{m_2+1}\right)\cdots\left(1-\left(\frac{1-a}{a^2}\right)^{m_{\mu-1}+1}\right)\frac{a^{m_\mu+1}}{1-a}.$$

La dernière formule pourra s'écrire

$$(28)\quad |\varepsilon_\mu| \leqq g \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-\alpha}{\alpha^{\mu-(\nu-1)}}\right)} \cdot \frac{\alpha^{m_1+1}}{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha^{m_1+m_2}}{(1-\alpha)^{m_1}} \cdot \frac{\alpha^{m_1+m_2+m_3}}{(1-\alpha)^{m_2}} \cdots \frac{\alpha^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-\alpha)^{m_{\mu-1}}}.$$

Nous avons fait la supposition suivante au sujet de α: c'est une quantité positive plus petite que l'unité, indépendante de x, de a et des constantes (1) mais qui dépend du nombre n, et cela de telle sorte que α^n tende indéfiniment vers l'unité en même temps que le nombre n croît indéfiniment.

Faisons maintenant

$$(29)\qquad \alpha = e^{-\frac{1}{n\omega(n)}}$$

où $\omega(n)$ est une quantité positive qui dépend de n de telle sorte que

$$\lim_{n=\infty} \omega(n) = \infty.$$

On aura

$$(30)\qquad 1-\alpha < \frac{1}{n\omega(n)},$$

dès que n devient suffisamment grand, et de même

$$\alpha^{-\lambda} = e^{\frac{\lambda}{n\omega(n)}} \leqq e^{\frac{1}{\omega(n)}} \quad \text{pour } \lambda = 2, 3, \ldots, n.$$

Par conséquent,

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^\lambda} \leqq \frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{1-\alpha}{\alpha^\lambda}} \leqq \frac{1}{1-\frac{e^{\frac{1}{n(\omega)}}}{n\omega(n)}}$$

et enfin

$$\frac{1}{\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)} \leqq \left(1-\frac{e^{\frac{1}{\omega(n)}}}{n\omega(n)}\right)^{-n}$$

où pour n infini la limite du second membre est l'unité. Puisque

$$\prod_{\nu=1}^{\mu-1}\left(1-\left(\frac{1-a}{a^{\mu-(\nu-1)}}\right)^{m_\nu+1}\right) < 1,$$

on voit que si k est une quantité réelle quelconque supérieure à l'unité on aura pour n suffisamment grand

$$(31)\qquad |\varepsilon_\mu| < gk\frac{a^{m_1+1}}{1-a}\cdot\frac{a^{m_1+m_2}}{(1-a)^{m_1}}\cdot\frac{a^{m_1+m_2+m_3}}{(1-a)^{m_2}}\cdots\frac{a^{m_1+m_2+\ldots+m_\mu}}{(1-a)^{m_{\mu-1}}}.$$

Au moyen de cette formule on reconnait immédiatement, puisque

$$(32)\qquad \frac{a}{1-a} < n\omega(n),$$

qu'en faisant

$$(33)\qquad \begin{cases} m_1 \geqq 2n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_2 \geqq m_1 . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ m_1 + m_3 \geqq m_2 . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_{\mu-2} + m_\mu \geqq m_{\mu-1} . n\omega(n)\log n\omega(n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-2} + m_n \geqq m_{n-1} . n\omega(n)\log n\omega(n), \end{cases}$$

on aura

$$(34)\qquad |\varepsilon_\mu| \leqq g.k.\frac{1}{n\omega(n)};\ \mu = 1, 2, \ldots, n$$

et, que par conséquent,

$$(35) \qquad |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n| < g.k.\frac{1}{\omega(n)}.$$

Si on fait dépendre les entiers $m_1, m_2, \dots, m_n$ de n d'une manière déterminée de telle sorte que les inégalités (33) soient vérifiées, au moins pour les grandes valeurs de n, l'expression

$$(36) \qquad g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{m_1}\sum_{\lambda_2=0}^{m_2}\cdots\sum_{\lambda_n=0}^{m_n}\frac{1}{\underline{|\lambda_1}\,\underline{|\lambda_2}\cdots\underline{|\lambda_n}}.F^{(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}(a)\left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n},$$

qui a la forme

$$(37) \qquad \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a).(x-a)^\nu$$

où les coefficients $c_\nu^{(n)}$ sont des nombres rationnels qui dépendent seulement de n et de ν, aura la propriété très remarquable que voici:

Si A est l'étoile qui appartient aux éléments

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots,$$

si X est un domaine quelconque situé à l'intérieur de A et si σ est une quantité positive donnée, on pourra trouver un nombre $\bar{n}$ tel que l'inégalité

$$|FA(x) - g_n(x)| < \sigma$$

soit satisfaite pour tous les x qui appartiennent à X, pourvu que n soit supérieur à $\bar{n}$.

Nous pouvons résumer au moyen du théorème suivant le résultat que nous avons obtenu:

Théorème 1. *Désignons par A l'étoile appartenant aux éléments*

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \dots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments, et soit X un domaine fini quelconque à l'intérieur de A et σ une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Il est toujours possible de trouver un nombre entier $\bar{n}$ tel, que la différence entre $FA(x)$ et le polynôme

$$g_n(x) = \sum_{\nu} c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu \tag{38}$$

soit, dès que n surpasse $\bar{n}$, inférieure à σ en valeur absolue pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine X.

Les coefficients $c_\nu^{(n)}$ peuvent être choisis à priori et sont absolument indépendants de a, de $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a)$, ... et de x.

De l'expression (36) on tire pour les $c_\nu^{(n)}$ la formule

$$c_\nu^{(n)} = \frac{1}{n^\nu} \sum_{(\lambda)} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} \tag{39}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ parcourent tous les entiers positifs, le nombre zéro y compris, qui verifient les conditions

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \nu,$$
$$\lambda_1 \leqq m_1, \lambda_2 \leqq m_2, \ldots, \lambda_n \leqq m_n$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des entiers positifs dépendant de n.

La dépendance des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$ du nombre n peut être fixée d'une infinité de manières différentes. Il faudra seulement la choisir telle que l'inégalité (35) soit vérifiée.

Nous avons vu que l'inégalité (35) a lieu dès que les $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont choisis de manière à vérifier les inégalités (33).

Ces inégalités subsistent pour des valeurs suffisamment grandes de n si l'on pose

$$m_\mu = n^{2\mu}; \; \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{40}$$

En choisissant cette détermination pour les m_μ, le polynôme $g_n(x)$ prend la forme très simple

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^2} \sum_{\lambda_2=0}^{n^4} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \cdots \underline{|\lambda_n}} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

La forme (39) que nous avons obtenue pour les $c_\nu^{(n)}$ est loin d'être la seule possible. Il y a au contraire un nombre indéfini d'autres formes qui répondent à des conditions spéciales. Il y a lieu de considèrer entr'autres pour les $c_\nu^{(n)}$ des expressions qui sont formées à l'aide des deux célèbres transcendantes e et π.[1]

Il est maintenant facile d'obtenir le théorème que nous avons mis en tête de ce travail.

En effet, posons

$$(42)\qquad \begin{cases} G_0(x) = g_0(x) = F(a), \\ G_\mu(x) = g_\mu(x) - g_{\mu-1}(x); \quad \mu = 1, 2, \ldots, \infty. \end{cases}$$

On a

$$(43)\qquad \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) = g_n(x).$$

Par conséquent, x étant un point quelconque à l'intérieur de A, et σ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, on aura en choisissant n suffisamment grand,

$$(44)\qquad \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma.$$

L'égalité

$$(45)\qquad FA(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

a donc lieu pour chaque point à l'intérieur de A.

La série

$$(46)\qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A. En effet pour un tel domaine on a en même temps

$$(47)\qquad \begin{cases} \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n} G_\mu(x) \right| < \sigma, \text{ le nombre } n \text{ étant suffisamment grand} \\ \left| FA(x) - \sum_{\mu=0}^{n+m} G_\mu(x) \right| < \sigma, \text{ le nombre } m \text{ étant un nombre entier positif quelconque} \end{cases}$$

[1] De telles expressions ont été étudiées dans les deux notes déjà citées: *Om en generalisering af potensserien* et *Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion*, Tredje meddelandet.

et, par conséquent,

$$\left| \sum_{\mu=n+1}^{n+m} G_\mu(x) \right| < 2\sigma. \tag{48}$$

Nous avons donc obtenu le théorème suivant:

Théorème 2. *Désignons par A l'étoile qui appartient aux éléments*

$$F(a)\,,\ F'(a)\,,\ F^{(2)}(a)\,,\ \ldots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments.

Cette branche $FA(x)$ pourra toujours être représentée par une série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) \tag{46}$$

où les $G_\mu(x)$ sont des polynômes de la forme

$$G_\mu(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(\mu)} F^{(\nu)}(a).(x-a)^\nu,$$

chaque coefficient $c_\nu^{(\mu)}$ étant un nombre rationnel déterminé qui ne dépend que de ν et de μ.

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

est convergente pour chaque valeur de x à l'intérieur de A et elle est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A.

On aura partout à l'intérieur de A

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x)$$

où $g_n(x)$ désigne le même polynôme que dans le théorème 1.