EINIGE SÄTZE ÜBER SUMMEN VON DIVISOREN

VON

JACOB HACKS
in BONN.

Bezeichnet man mit $f(m)$ die Anzahl der in m aufgehenden ganzen Zahlen, so ist bekanntlich, wenn die Zerlegung von m in seine Primfactoren gegeben ist

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots k^\rho,$$

wo $a, b, c, \dots, k$ von einander verschiedene Primzahlen sind,

$$(1) \qquad f(m) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) \dots (\rho + 1).$$

Bedeutet $F(m)$ die Summe

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(m),$$

so ist

$$F(m) = \left[\frac{m}{1}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] + \left[\frac{m}{3}\right] + \dots + \left[\frac{m}{m}\right],$$

wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Bedeutet $g(m)$ die Summe der Divisoren der Zahl m, so ist

$$(2) \qquad g(m) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \dots \frac{k^{\rho+1} - 1}{k - 1},$$

und bezeichnet man mit $G(m)$ die Summe

$$g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(m),$$

so ist

$$G(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 2\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + \dots + m\left[\frac{m}{m}\right]. \tag{3}$$

Es sei jetzt m eine ungerade Zahl und es werde ein Ausdruck gesucht für die Function

$$F(m) = f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(m).$$

Offenbar kommt bei den Zahlen $1, 3, 5, \dots, m$ die Einheit

$$\left[\frac{m+1}{2}\right] = \left[\frac{\left[\frac{m}{1}\right]+1}{2}\right]$$

mal als Divisor vor, die Zahl 2, ebenso alle andern geraden Zahlen können nicht als Teiler vorkommen, die Zahl 3 erscheint $\left[\frac{\left[\frac{m}{3}\right]+1}{2}\right]$ mal als Teiler, u. s. w., die Zahl m endlich $\left[\frac{\left[\frac{m}{m}\right]+1}{2}\right]$ mal. Demnach ist

$$F(m) = \left[\frac{\left[\frac{m}{1}\right]+1}{2}\right] + \left[\frac{\left[\frac{m}{3}\right]+1}{2}\right] + \dots + \left[\frac{\left[\frac{m}{m}\right]+1}{2}\right],$$

oder da allgemein die Gleichung besteht

$$\left[\frac{[x]+1}{2}\right] = \left[\frac{x+1}{2}\right],$$

$$F(m) = \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{m+3}{6}\right] + \left[\frac{m+5}{10}\right] + \dots + \left[\frac{m+m}{2m}\right].$$

Wenn man mit $G(m)$ die Summe

$$g(1) + g(3) + g(5) + \dots + g(m)$$

bezeichnet, so ergibt sich

$$G(m) = 1\left[\frac{m+1}{2}\right] + 3\left[\frac{m+3}{6}\right] + \dots + m\left[\frac{m+m}{2m}\right].$$

Wir bezeichnen mit $k(m)$ die Summe aus den ungeraden und den halben geraden Divisoren der Zahl m, mit $l(m)$ die Differenz aus den geraden und den ungeraden Divisoren der Zahl m, und setzen

$$K(m) = k(1) + k(2) + \ldots + k(m),$$
$$L(m) = l(1) + l(2) + \ldots + l(m).$$

Dann ist

$$K(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 1\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{4}\right] + \ldots + m\left[\frac{m}{m}\right],$$

wenn $m \equiv 1 \pmod 2$, und

$$K(m) = 1\left[\frac{m}{1}\right] + 1\left[\frac{m}{2}\right] + 3\left[\frac{m}{3}\right] + 2\left[\frac{m}{4}\right] + \ldots + \frac{m}{2}\left[\frac{m}{m}\right],$$

wenn $m \equiv 0 \pmod 2$.

Dem letzten Gliede kann man in beiden Fällen die Form geben

$$m\left[\frac{m}{m}\right]\left(\frac{m+1}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

da $\frac{m+1}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]$ für gerades m gleich $\frac{1}{2}$, für ungerades m gleich 1 ist.

Ferner ist

$$L(m) = -\left[\frac{m}{1}\right] + 2\left[\frac{m}{2}\right] - 3\left[\frac{m}{3}\right] \pm \ldots + (-1)^m m\left[\frac{m}{m}\right]. \tag{4}$$

Die Kenntniss der Functionen $F(m)$, $G(m)$, $k(m)$, $l(m)$, $K(m)$, $L(m)$ verdanke ich einer Vorlesung des Herrn Professor LIPSCHITZ. Obige Ausdrücke für $K(m)$ und $L(m)$ finden sich im 100. Bande der Comptes Rendus (R. LIPSCHITZ, *Sur les sommes des diviseurs des nombres*, p. 845).

Von allen diesen Summenfunctionen lässt sich, wenn m als gegeben betrachtet wird, im voraus bestimmen, ob sie gerade oder ungerade sind.

Aus der Darstellung (1) der Function $f(m)$ folgt zunächst, dass $f(m)$ für jede nichtquadratische Zahl gerade, für jede Quadratzahl ungerade sein muss. Hieraus ergibt sich mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $f(1) = F(1)$ ungerade ist, dass $F(m)$ für 1, 2, 3 ungerade, für $m = 4$, 5, 6, 7, 8 gerade, für $m = 9$, 10, …, 15 wieder ungerade ist, u. s. f. oder allgemein

$$F(m) \equiv [\sqrt{m}] \pmod 2.$$

Bringt man die Gleichung (2) in die Form

$$g(m) = (1 + a + a^2 + \ldots + a^\alpha)(1 + b + b^2 + \ldots + b^\beta)\ldots,$$

so sieht man, dass $g(m)$ für jede Quadratzahl notwendig ungerade ist. Ist m gleich dem Doppelten einer Quadratzahl, so ist vermöge der Gleichung

$$g(2^{2\mu+1}n^2) = g(2^{2\mu+1})g(n^2),$$

in welcher n eine ungerade Zahl bedeuten soll, $g(m)$ gleichfalls ungerade, da $g(2^{2\mu+1}) \equiv 1 \pmod 2$ ist. Ist hingegen m weder gleich einer Quadratzahl noch gleich dem Doppelten einer Quadratzahl, so ist $g(m)$ offenbar gerade. Demnach ist

$$G(m) \equiv [\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \pmod 2,$$

da $G(m)$ so oft seinen Charakter (ob gerade oder ungerade) ändert, als m die Form n^2 oder $2n^2$ annimmt, und $[\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right]$ genau dieselbe Eigenschaft hat. Da nun $G(1) = [\sqrt{1}] + \left[\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ ist, so ist obige Kongruenz gerechtfertigt.

In gleicher Weise findet man

$$F(m) \equiv \left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Die Richtigkeit dieser Kongruenz leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass $\left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right]$ denselben Wert behält von $m = (2n - 1)^2$ incl. bis $m = (2n + 1)^2$ excl. und einen ungeraden Wert hat für ungerades n, einen geraden Wert für gerades n. Ebenso ist auch

$$G(m) \equiv \left[\frac{[\sqrt{m}] + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Vermöge einer oben gemachten Bemerkung kann man auch schreiben

$$F(m) \equiv G(m) \equiv \left[\frac{\sqrt{m} + 1}{2}\right] \pmod 2.$$

Die Function $k(m)$ ist für ungerades m gleich $g(m)$; wir können also unsere Erörterung auf den Fall $m \equiv 0 \pmod 2$ beschränken. Da gilt nun der Satz, dass für gerades m die Function $k(m)$ stets einen geraden Wert hat. Denn zu jedem geraden Divisor, welcher $\equiv 2 \pmod 4$ ist, gehört ein ungerader Divisor, (nämlich die Hälfte des geraden) und die Summe aus ersterem halb genommen und aus letzterem ist eine gerade Zahl. Denkt man sich daher die sämtlichen halb genommenen geraden Divisoren von der Form $4n + 2$ zu den zugehörigen ungeraden Divisoren addiert, so ist das Resultat eine gerade Zahl, und es bleiben, da auch umgekehrt ein ungerader Divisor ohne zugehörigen geraden Divisor von der Form $4n + 2$ nicht auftreten kann, nur noch etwaige Divisoren von der Form $4n$ übrig, deren Hälften also gerade sind. Aus diesem Satze, dass für $m \equiv 0 \pmod 2$, $k(m)$ eine gerade Zahl sein muss, folgt mit Berücksichtigung des oben über die Function $g(m)$ Gesagten die Kongruenz

$$K(m) \equiv \left[\frac{\sqrt{m}+1}{2}\right] \pmod 2.$$

Zur Herleitung dieser Kongruenz kann man auch vorteilhaft benutzen die von Lipschitz in der oben erwähnten Abhandlung aufgestellte Gleichung

$$k(m) = 2^{\alpha} g(m'),$$

wo $m = 2^{\alpha} m'$ eine beliebige ganze Zahl und m' eine ungerade Zahl ist. An der citierten Stelle findet sich auch die Gleichung

$$l(m) = (2^{\alpha+1} - 3) g(m'),$$

die sich zu einem Beweise der Kongruenz

$$L(m) \equiv [\sqrt{m}] + \left[\sqrt{\frac{m}{2}}\right] \pmod 2$$

verwenden lässt. Andererseits findet man auch durch Addition oder Subtraktion der Gleichungen (3) und (4), dass

$$L(m) \equiv G(m) \pmod 2.$$