A PROPOS DU MÉMOIRE: »RECHERCHES SUR LA MÉTHODE DE GRAEFFE ... ETC.» PAR ALEXANDRE OSTROWSKI, À BÂLE.

PAR

R. SAN JUAN

à MADRID.

La concision avec laquelle sont rédigées les »Leçons d'Algébre» de M. Rey Pastor (on pourrait y remplacer, à la page 96, ligne 24, pour plus de clarté, i par j et x_i par x_j) a conduit M. A. Ostrowski à penser que les considérations théoriques faites par M. Rey Pastor dans l'ouvrage cité s'appuient sur une proposition fausse.

Reprenons le raisonnement de M. Rey Pastor.

Au début de la page 100, on démontre que chacune des m plus grandes racines X_i $(i \geqq m)$ de chaque transformée:

$$A_0 X^n + \cdots + A_m X^{n-m} + \cdots + A_n = 0$$

vérifie une équation:

$$f(X) \equiv \frac{A_0}{A_m} X^m + \frac{A_1}{A_m} X^{m-1} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{A_m} X + 1 = \delta$$

dans laquelle on a: $\delta < \varepsilon^m$ lorsque l'ordre de la transformée devient infiniment grand.

Il résulte de là et en vertu du théorème démontré par M. Rey Pastor à la page 96, théorème d'ailleurs si évident que Runge et König, dans leur ouvrage »Numerisches Rechnen» (Berlin 1924 page 169) l'appliquent sans même l'énoncer explicitement comme proposition indépendante, que l'équation:

$$f(X) \equiv \frac{A_0}{A_m} X^m + \cdots + \frac{A_{m-1}}{A_m} X + 1 = 0$$

a au moins une racine X'_j qui vérifie la condition:

$$\frac{|X_i - X'_j|}{|X'_j|} < \varepsilon$$

c'est-à-dire que chacune des m plus grandes racines de l'équation complète est exprimée par *une* des racines du premier fragment de *degré m*, avec une erreur relative inférieure à ε.[1]

C'est là, nous semble-t-il le détail du raisonnement que M. Rey Pastor n'a pas cru devoir exprimer, laissant au lecteur le soin de le faire.

Nous avons procédé de la même manière dans notre mémoire: »Complementos al método de Graeffe para la resolución de ecuaciones algébricas.» (Revista Matematica Hispano-Americana, serie 2, I, 1939)[2]; on pourrait y intercaler le même detail de raisonnement que nous venons de signaler.

La portée de ces théorèmes (que M. Ostrowski qualifie de restreints tout en les reconnaissant comme certaines dans sa critique) est cependant suffisante pour calculer, dans tous les cas, les modules des racines avec une erreur fixée d'avance; elle est également suffisante pour déterminer »a priori» le nombre de transformées permettant de parvenir au calcul précédent, et en particulier, pour résoudre le problème A abordé dans le mémoire de M. Ostrowski, sans utiliser le diagramme de Newton; l'on peut d'ailleurs démontrer sans difficulté que, sauf dans le cas où les fragments sont au plus du second degré (le seul cas dont M. Ostrowski donne des exemples) nos bornes sont sûrement plus serrées que celles indiquées par M. Ostrowski.[3]

Où l'on peut arriver à des bornes plus serrées que les nôtres au moyen du diagramme de Newton comme le fait remarquer, bien à propos, M. Ostrowski, dans »L'Addition . . . etc.», c'est dans le cas de racines équimodulaires; en effet, ainsi que nous l'avons montré dans une note de notre mémoire (au bas de la page 13), nous choisissons une borne moins précise mais indépendante de la nature des coefficients afin de pouvoir l'appliquer au problème réciproque.

Pour terminer, on nous permettra de faire remarquer, au sujet de la coïncidence de la condition, nécessaire et suffisante que nous avons énoncée pour

---

[1] On notera que ce raisonnement n'exige nullement la correspondance biunivoque que M. Ostrowski attribue inutilement au théorème pour signaler ensuite que cette correspondance n'est point vérifiée.

[2] Un résumé de ce Mémoire a paru au »Bulletin des Sciences Mathématiques». LIX, avril 1935.

[3] Une étude approfondie de cette comparaison a été faite par notre élève M. Auge dans sa Thèse initiale de doctorat (en preparation).

l'inégalité des racines en valeur absolu, avec un resultat obtenu par M. Valiron et éluder, par ce fait, notre démonstration directe (démonstration directe avantageuse cependant par le fait qu'elle donne dans le cas où il n'y a pas de racine, une couronne, au lieu de la circonférence séparatrice qui résulte de l'application du théorème de M. Valiron[1]), l'existence de la nécessité de la condition n'a pas été traitée par M. Valiron et c'est seulement plusieurs années après la publication de notre mémoire que M. Ostrowski énonce, sans démonstration, cette condition nécessaire dans le préface de son mémoire.

Seminario Matematico de la Universidad de Madrid.
Madrid 1 Avril de 1942.

Extrait du livre de M. Rey Pastor.

Übersetzung.

Wir betrachten zwei Gleichungen $f(x)=0$ und $f(x)=\delta$ die sich nur durch das Konstante Glied unterscheiden. Der Satz von der Stetigkeit der Wurzeln sagt nun aus, dass für genügend kleine Werte δ die Wurzeln einer Gleichung sich von denen der andern um weniger als eine beliebige vorher festgesetzte Zahl unterscheiden. Wir gehen von feststehenden δ aus und wollen nun diesen Fehler beschrenken. Wir bezeichnen die Wurzeln der ersten Gleichung mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und die der zweiten mit $x_1', x_2', \ldots, x_n'$. Aus der Gleichung

$$a_0(x_i'-x_1)(x_i'-x_2)\ldots(x_i'-x_n)=\delta$$

ersieht man, dass mindestens eine der Differenzen (z. B. die der Stelle i) die n-te Wurzel des Produktes nicht überschreiten darf; demnach:

$$|x_i'-x_i| \leq \sqrt[n]{|\delta|:|a_0|}.$$

Da man dieselbe Überlegung auch bei umgekehrter Reihenfolge der beiden Gleichungen wiederholen kann, ergibt sich, dass *jede Wurzel der einen Gleichung von einer* (gewissen) *Wurzel der anderen um weniger als $\sqrt{|\delta|:|a_0|}$ verschieden ist.*

Mit anderen Worten: *Der absolute Fehler jeder Wurzel ist nicht grösser als die n-te Wurzel des Fehlers der Funktion, wenn wir den Koeffizienten a_0 gleich 1 setzen.*

---

[1] Des théorèmes très intéressants de ce type sont contenus dans le Mémoire de M. Ostrowski, pages 173 et suivantes.

Wenn wir durch $|x_1 x_2 \ldots x_n| = \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$ dividieren, erhalten wir analog:

$$\left|\frac{x_i' - x_i}{x_i}\right| \leq \sqrt[n]{|\delta| : |a_n|}.$$

Der relative Fehler jeder Wurzel ist nicht grösser als die n-te Wurzel des Funktionsfehlers, wenn man das Konstante Glied der Funktion gleich 1 nimmt.