ÜBER EINE VERMEINTLICHE ANTINOMIE DER MENGENLEHRE.

BRIEF AN DEN HERAUSGEBER

VON

A. SCHOENFLIES

in KÖNIGSBERG I PR.

Im letzten Band Ihrer Acta[1] drucken Sie einen Brief von I. RICHARD ab, der auf eine neue *mengentheoretische Antinomie* hinweist. Seinen Ausführungen hat sich inzwischen auch POINCARÉ angeschlossen.[2] Um so mehr habe ich den Wunsch, darauf hinzuweisen, dass hier keine Antinomie, sondern eine Lücke in der Beweisführung vorliegt. Da Sie einer der Ersten waren, die durch Benutzung der mengentheoretischen Resultate einem ganzen Wissensgebiet neues Blut und neues Leben eingeflösst haben, so bin ich überzeugt, dass diese Lösung Ihnen sehr erwünscht sein wird. Dreierlei ist zu bemerken.

1) Herr RICHARD hat den Beweis, dass die von ihm betrachtete Menge abzählbar ist, gar nicht erbracht; *sie ist es auch nicht.* Sie wird es erst dadurch, dass er infolge einer stillschweigenden Annahme nur mit einer *Teilmenge* aller endlich definierbaren Dezimalbrüche operiert. 2) Auch seine Auflösung der Antinomie bedarf der Kritik. 3) Endlich sind Antinomieen dieser Art der Mengenlehre keineswegs eigentümlich.

1. Zunächst eine Vorbemerkung. Nach der RICHARD'schen Argumentation würde man schliessen können oder müssen, dass *Alles,* was wir durch eine endliche Zahl von Worten definieren können, abzählbar ist. Ich zweifle nicht, dass Sie dies für unrichtig halten. Benutzt doch jede Definition eines mathematischen Objectes nur eine endliche Zahl von Worten; die Gesamtheit dieser Objecte ist aber nicht abzählbar. Die Erklärung ist sehr einfach. Man kann nämlich durch

[1] Bd. 30, S. 295.

[2] Revue de métaphysique et morale, 1906.

eine und dieselbe Definition unendlich viele mathematische Objecte definieren, ja sogar eine Menge der Mächtigkeit c. Die Worte — »Man bilde eine Funktion $f(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 1$ in der Weise, dass man der Funktion für jeden Wert von x denselben Wert beilegt» — bilden eine wohl definierte Vorschrift und definieren eine Funktionsmenge der Mächtigkeit c.

Damit ist die Lücke der RICHARD'schen Beweisführung bereits aufgedeckt. Sein Beweis beruht nämlich auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass *jede* Definition nur je *einen* Dezimalbruch bestimmt. Er denkt sich nämlich die Menge *aller* Definitionen nach der Zahl der in sie eingehenden Buchstaben geordnet und fährt dann fort: Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième etc. On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots. Donc ils forment un ensemble dénombrable.[1]

2. Um seinen Widerspruch abzuleiten, benutzt Herr RICHARD die bekannte CANTOR'sche Methode, die den einfachsten Beweis für die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums liefert. Er argumentirt folgendermassen. Ist

$$\Delta = \{\delta_\nu\} = \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

die geordnete Menge unserer Dezimalbrüche, so kann man einen neuen Dezimalbruch δ' so bestimmen, dass seine ν:te Ziffer die ν:te Ziffer von δ_ν zu 9 ergänzt.[2] Durch diese Vorschrift, die G heissen möge, ist δ' endlich definiert; andererseits ist δ' von jedem δ_ν verschieden, also in Δ nicht enthalten. Wir haben also nach RICHARD eine Antinomie. *Sie verschwindet, sobald die Nichtabzählbarkeit von Δ bewiesen ist.* Sie klärt sich aber auch in einfacher Weise auf, falls man sich auf Mengen Δ beschränkt, die tatsächlich abzählbar sind. Ich beweise zunächst das erste.

3. Dazu bringe ich das Resultat der RICHARD'schen Argumentation zunächst in folgende widerspruchsfreie Form:

Sei $D = \{d_\nu\}$ *irgend eine* abzählbare Menge endlich definierbarer Dezimalbrüche, so kann man durch eine endliche Definition einen Dezimalbruch bestimmen, der ihr nicht angehört.

Ich nehme nun noch eine Modifikation dieser Definition vor und ersetze sie durch folgende, die ich G' nenne:

Sei D eine abzählbare Menge endlich definierbarer Dezimalbrüche und

---

[1] Materiell gehe ich auf den Begriff der endlich definierbaren Dezimalbrüche zunächst nicht weiter ein; ich komme weiter unten (Nr. 9) auf ihn zurück.

[2] Ich habe die RICHARD'sche Definition im Interesse der Kürze etwas abgeändert.

$D' = \{d'_\nu\}$ eine unendliche *Teilmenge* von D.[1] Man bestimme mit ihr einen Dezimalbruch d'' in der Weise, dass man die ν:te Ziffer von d'_ν zu 9 ergänzt, so ist auch d'' endlich definiert.

Von dieser Definition G' werde ich sofort beweisen, dass die Menge der Dezimalbrüche, die durch sie definiert wird, die Mächtigkeit c besitzt. Der Einfachheit halber führe ich den Beweis für Dyalbrüche.

4. Ich definiere zunächst auf Grund einer einzigen Definition eine abzählbare Menge $D = \{d_\nu\}$ von Dyalbrüchen. Sie lautet:

Man bestimme einen Dyalbruch d so, dass seine ν:te Ziffer Eins ist, und jede andere Ziffer gleich Null.

Auf diese Menge D wende ich nun die oben angegebene Definition G' an, bestimme also, wenn $D' = \{d'_\nu\}$ eine Teilmenge von D ist, einen Dyalbruch d'' in der Weise, dass seine ν:te Ziffer die ν:te Ziffer von d'_ν zu 1 ergänzt.

Von der Menge $D'' = \{d''\}$ dieser Dyalbrüche beweist man nun leicht, dass sie die Mächtigkeit c hat. Um dies nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass man zu jedem beliebigen Dyalbruch δ, der nicht der abzählbaren Menge D angehört, eine geeignete Menge $D' = \{d'_\nu\}$ so bestimmen kann, dass die auf sie angewandte Vorschrift G' als Dyalbruch d'' den Dyalbruch δ liefert.

Sei also

$$\delta = 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

ein solcher Dyalbruch, so kann α_ν den Wert 0 oder 1 haben. Ist $\alpha_\nu = 0$, so muss die ν:te Ziffer von d'_ν eine Eins sein. Damit ist alsdann d'_ν bestimmt. Die Menge aller dieser Dyalbrüche $\{d'_\nu\}$, also aller derjenigen, für die $\alpha_\nu = 0$ ist, möge noch D_1 heissen. Ist zweitens $\alpha_\nu = 1$, so muss die ν:te Ziffer von d'_ν eine Null sein. Dann kann man noch auf mannigfache Art den Dyalbruch d'_ν so wählen, dass er nicht zur Menge D_1 gehört.[2] Wir können daher die Menge $D' = \{d'_\nu\}$ so bilden, dass der durch die obige Vorschrift bestimmte Dyalbruch d'' mit δ übereinstimmt.

Damit ist der Schlusstein der Deduktion vorhanden; wir haben eine endliche Definition aufgestellt, die eine *nicht abzählbare* Menge von Dyalbrüchen bestimmt.

5. Die Analogie mit solchen Mengen, bei denen sonst aus der Endlichkeit

---

[1] Die Reihenfolge der d'_ν bleibt willkürlich.

[2] Eine solche Möglichkeit ist z. B. die folgende. Zunächst beachte man, dass jeder Dyalbruch, der nicht zur Menge D gehört, mehr als eine Eins enthält. Enthält er eine endliche Zahl, so kann man in der Weise verfahren, wie das folgende Beispiel zeigt. Sei in δ die ν_1:te, die ν_2:te und die ν_3:te Stelle eine Eins, und alle übrigen Stellen gleich Null. Dann wähle man d'_{ν_1}, d'_{ν_2}, d'_{ν_3}, so, dass — in zyklischer Vertauschung — die ν_2:te, ν_3:te, ν_1:te Stelle von ihnen eine Eins ist. Falls aber δ unendlich viele Einsen enthält, so teile man sie in Paare von je zwei konsekutiven. Stehen die beiden ersten an der ν_1:ten und ν_2:ten Stelle, so wähle man d'_{ν_1} und d'_{ν_2} so, dass — in einfacher Vertauschung — die ν_2:te und ν_1:te Stelle von ihnen eine Eins ist, und mache das gleiche für je zwei konsekutive Einsen.

gewisser Vorschriften auf die Abzählbarkeit der Menge geschlossen wird, ist hier nämlich nur eine scheinbare. Ein Dezimalbruch δ hat unendlich viele Ziffern, seine Bestimmung erfordert also eine Belegung *unendlich vieler* Stellen. Die endliche Definition eines *jeden* Dezimalbruchs enthält daher an sich immer *unendlich viele* Bestimmungsvorschriften, und hier ist die Stelle, an der die Analogie zerreisst. Offenbar ist dies der Umstand, den RICHARD übersehen hat. Denn die Möglichkeit, mit einer endlichen Zahl von Worten eine unendliche Menge von Definitionsmerkmalen auszudrücken, führt auch zu dem Resultat, dass man — naturgemäss durch Verwendung geeigneter Worte — durch eine und dieselbe Definition unendlich viele Dezimalbrüche, je sogar eine nicht abzählbare Menge definieren kann.

6. Ich gebe noch einen zweiten Beweis für die Nichtabzählbarkeit der Menge Δ. Er stützt sich auf die Theorie der Unendlich und knüpft an das von HARDY abgeleitete Resultat an, dass man aus dem Kontinuum eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ herausheben kann.[1]

Die Bestimmung einer solchen Menge kann am einfachsten durch folgende Definition geschehen: Sei

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_\nu,\ \ldots$$

eine Folge ganzer Zahlen, und $f(x)$ eine monoton ins unendliche wachsende stetige Funktion. Sei ferner

$$f(1) = \xi_1,\ f(2) = \xi_2,\ \ldots\ f(\nu) = \xi_\nu,\ \ldots,$$

und seien die Zahlen a_ν so gewählt, dass a_ν die kleinste ganze Zahl ist, die grösser ist als ξ_ν. Man bilde nun einen Dyalbruch in der Weise, dass er unendlich viele Nullen enthält und zwischen der ν:ten und $(\nu+1)$:ten Null a_ν Einsen.[2]

Der so definierte Dyalbruch ist endlich definiert. Da es nun eine nicht abzählbare Menge monotoner stetiger Funktionen mit wachsendem Unendlich gibt, so wird durch die vorstehende Definition eine nicht abzählbare Menge endlich definierbarer Dyalbrüche bestimmt.

7. Herr RICHARD gibt folgende Erklärung seiner vermeintlichen Antinomie. Er schreibt: Le Groupe G[3] existera dans mon tableau. Mais à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble Δ et celui-ci n'est pas encore défini. Il devrait donc le biffer. Le groupe G n'a pas de sens que si l'ensemble Δ est totalement défini et celui-ci ne peut l'être que par un nombre infini de mots. Il n'y a donc contradiction.

---

[1] Quart. Journ. of math. 35 (1903) p. 87.
[2] Vgl. auch F. HAUSDORFF, Leipz. Ber. 59 (1907) p. 155.
[3] d. h. die Buchstabengruppe, die die Definition G enthält.

Auch dies veranlasst mich zu einer kritischen Bemerkung. Zuvor bemerke ich, dass die Richard'sche Auflösung schon deshalb versagen muss, weil sie von der Abzählbarkeit der Menge $\varDelta$ ausgeht. Meine eigene Erklärung beruht auf der Analyse aller vorhandenen Möglichkeiten; dabei sehe ich übrigens von der speziellen Bedeutung der Menge $\varDelta$ ab, nehme aber naturgemäss an, dass $\varDelta$ eine widerspruchsfrei definirte Menge ist. Im Sinn der Richard'schen Argumentation nehme ich ferner zunächst an, dass G eine *zur Menge $\varDelta$ gehörige* Vorschrift ist. Dann sind für die Beziehung von $\varDelta$ und G zu einander nur folgende zwei Fälle möglich. Erstens kann $\varDelta$ tatsächlich abzählbar sein. Dann läuft die Vorschrift von G darauf hinaus, ein von *allen* Elementen von $\varDelta$ *verschiedenes* Element einzuführen, das ebenfalls zur Menge $\varDelta$ gehört; sie ist daher in sich *widerspruchsvoll*, und der Endwiderspruch der Argumentation beruht hierauf. Ist aber $\varDelta$ nicht abzählbar, so enthält die *Vorschrift G* keinen materiellen Widerspruch; in diesem Fall stellt vielmehr die RICHARD'sche Argumentation einen *richtigen indirekten Beweis* dar, aus dem die Nichtabzählbarkeit von $\varDelta$ zu schliessen ist. Er ist mit dem klassischen Beweis identisch, mit dem CANTOR die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums beweist. *Jeder indirekte Beweis hat diesen Character.* Der Schluss, der also zu ziehen war, ist die *Nichtabzählbarkeit von $\varDelta$.*

8. Da ich meine, nicht ausführlich genug sein zu können, so frage ich noch, wie die Dinge liegen, wenn man nicht die gesamte Menge $\varDelta$ ins Auge fasst sondern nur, wie oben in 4) die abzählbare Teilmenge D, und die Definition G auf sie bezieht. Die so modifizierte Definition G' ist, wie unser Beispiel in 4) zeigt, *nicht* widerspruchsvoll. Ja, eine an sich widerspruchsfreie Definition, die sich auf unendlich viele Dezimalbrüche bezieht, kann sogar bei dem RICHARD'schen Verfahren vorher auftreten, ehe diese unendlich vielen Dezimalbrüche sämtlich definiert sind, ohne dass sie deshalb widerspruchsvoll wird (Nr. 10). In der Tat hat die Reihenfolge, in der die Definitionen sich einstellen, gar keine Bedeutung, wenn nur ihre Gesamtheit in sich widerspruchsfrei ist. Wird es verlangt, so kann man sie so umordnen, dass keine Definition sich auf solche bezieht, die ihr folgen; der Ordnungstypus wird naturgemäss transfinit.

9. Ich gehe nun zu dem eigentlich RICHARD'schen Fall über, nehme also an, dass jede Definition nur *einen* Dezimalbruch δ bestimmt; doch gelten die folgenden Schlüsse auch für den Fall, dass jede Definition eine *höchstens abzählbare* Menge von Dezimalbrüchen bestimmt.

Auch in diesem Fall kann ich der RICHARD'schen Argumentation nicht beitreten. Um die Quelle des Widerspruchs aufzudecken, weise ich vielmehr auf die *dritte* Möglichkeit hin, die für die Beziehung von $\varDelta$ und G zu einander noch Platz greifen kann. Auch sie erörtere ich zunächst nur in allgemeiner Form; sie betrifft den Fall, dass sowohl Δ als G materiell widerspruchs*frei* sind. Ist nämlich eine Menge Δ tatsächlich abzählbar, so kann ein Endwiderspruch bei dem RICHARD'schen Verfahren auch so entstehen, dass die Vorschrift G zwar materiell widerspruchsfrei ist, aber *nicht mehr unter den Begriff fällt*, für den die Abzählbarkeit bewiesen ist, so dass das ihr zugehörige Element *der Menge Δ gar nicht angehört*. Eine weitere allgemeine Möglichkeit ist für die Beziehung von Δ zu G nicht vorhanden. So und nicht anders muss daher der Endwiderspruch in dem Fall verursacht sein, dass man den Begriff der endlichen Definirbarkeit seines umfassendsten Inhalts zu entkleiden und auf solche Definitionen zu beschränken vermag, die eine endliche oder abzählbare Menge von Dezimalbrüchen festlegen, und daher zu abzählbaren Gesamtmengen führen. Der *so* gefasste Begriff der endlichen Definirbarkeit enthält dann einen gewissen *engeren* Inhalt — auf dessen Erörterung ich hier nicht eingehe — und diese Inhaltsbeschränkung muss bewirken, dass die RICHARD'sche Vorschrift G nicht mehr unter diejenige *engere* Definition fällt, für die die Abzählbarkeit nachweisbar ist. Es muss also ein ähnlicher Gegensatz vorliegen, wie zwischen den Dezimalbrüchen mit einer endlichen Zahl von Null verschiedener Stellen und den übrigen, für die, analog wie bei der Vorschrift G, eine unendliche Menge von Stellen festzulegen ist, und deren Gesamtheit daher nicht abzählbar ist. Hierin ist die Auflösung der vermeintlichen Antinomie in dem RICHARD'schen Fall zu erblicken.

Zusammenfassend kann ich mich also folgendermassen aussprechen. Aus einem richtigen Urteil von der Form: »Dem Begriff $\mathfrak{A}$ kommt die Eigenschaft $\mathfrak{B}$ zu» kann mittels des Satzes: »Das Object A fällt unter den Begriff $\mathfrak{A}$» durch sonst richtige Schlüsse nur so ein Widerspruch abgeleitet werden, dass das Object A entweder widerspruchsvoll definirt ist oder aber zwar widerspruchsfrei, aber nicht unter den Begriff $\mathfrak{A}$ fällt.

10. Herr RICHARD sieht die Auflösung der Antinomie darin, dass sich die Definition G auf die *gesamte Menge Δ* seiner Dezimalbrüche bezieht; er nimmt nämlich an, dass *jede* Definition dieser Art in seiner Tabelle zu streichen ist, da sie an der Stelle, an der sie auftritt, keinen Sinn habe. Aber im Gegensatz zu ihm muss ich diese *allgemeine* Notwendigkeit verneinen. Allerdings befinde ich mich damit auch im Gegensatz zu POINCARÉ, der in diesem RICHARD'schen Argument die Erklärung der mengentheoretischen Antinomie erblickt. Wenigstens bedarf der Sinn der RICHARD'schen Worte einer näheren Präcisirung, die ich selbst nicht aus ihnen herauszulesen vermag. Ich werde daher an einem Beispiel beweisen, dass eine Definition, die an endlicher Stelle erscheint, und sich auf die Menge Δ selbst bezieht, trotzdem nicht widerspruchsvoll zu sein braucht. Sie wird es erst, wenn sie sich auf *jedes einzelne Element* der Menge bezieht. Beides ist nicht identisch.

Dazu betrachte ich eine spezielle Menge

$$\mathfrak{G} = \{G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots\}$$

von Definitionen von folgender Art. Die Definitionen $G_1, G_2, \ldots G_{\nu-1}, G_{\nu+1}, \ldots$ sind widerspruchslose Definitionen, von denen sich keine auf die gesamte Menge $\mathfrak{G}$ bezieht, nur G_ν soll sich auf die Menge $\mathfrak{G}$ beziehen; der Einfachheit halber nehme ich nur eine *einzige* Definition dieser Art in $\mathfrak{G}$ an. Dann braucht G_ν nicht widerspruchsvoll zu sein.

Ehe ich dies beweise, weise ich darauf hin, wie überhaupt eine Definition beschaffen ist, die einen unendlichen Dezimalbruch bestimmen soll. Sie kann erstens von der Art sein, wie die unter 4) genannte, so dass sie die ν:te Ziffer für *jedes* ν unmittelbar bestimmt; sie kann zweitens von der Art sein, dass es möglich sein muss, jede beliebig herausgegriffene ν:te Ziffer, durch ein endliches Verfahren festzulegen. So ist es auch bei RICHARD. Mehr verlangen, heisst nicht nur die Mengenlehre überhaupt beseitigen, sondern noch vieles andere ausserdem.[1]

Ich nehme nun an, ν sei eine *ungerade* Zahl und gebe der Definition G_ν folgenden Inhalt. Sie soll einen Dezimalbruch δ' so bestimmen, dass seine μ:te Stelle mit der μ:ten Stelle des Dezimalbruchs $\delta_{2\mu}$ übereinstimmt, der durch die Definition $G_{2\mu}$ bestimmt wird. Diese Definition bezieht sich auf die Menge $\mathfrak{G}$ selbst, und ist doch widerspruchsfrei. Sie ist es, weil sie auf G_ν, d. h. ***auf sich selbst keinen Bezug*** nimmt. Nur eine Definition, die auf *jedes* Element der Menge, also *auf sich selbst Bezug* nimmt, wird *immer* widerspruchsvoll sein.

11. Endlich noch eine Schlussbemerkung. Der RICHARD'sche Brief beginnt mit den Worten, dass man in der Mengenlehre zu Antinomieen kommen kann, ohne an die wohlgeordneten Mengen anzuknüpfen. Dies ist gewiss richtig; *es ist aber keine Besonderheit der Mengenlehre.* Der RICHARD'sche Weg ist überall gangbar. Überall wird man im Stande sein, in der Weise, wie es am Schluss von Nr. 9 ausgeführt ist, aus einer richtigen Voraussetzung ihr kontradiktorisches Gegenteil abzuleiten. Will man der RICHARD'schen Argumentation eine gewisse Sonderstellung zugestehen, so wäre es höchstens so zu begründen, dass sie im Gewande eines klassischen mengentheoretischen Verfahrens auftritt und deshalb zunächst als widerspruchsfrei erscheinen konnte.

---

[1] Die Forderung, sich auf das Endliche zu beschränken, hat bisher kein Mathematiker praktisch erfüllt; er hat sie höchstens theoretisch gestellt.

Nachschrift.

Die vorstehende Note wurde im April 1907 niedergeschrieben, unter dem unmittelbaren Eindruck des RICHARD'schen Artikels, den ich damals erst kennen lernte. Sie sollte eine Kritik des Artikels geben, *ohne* auf den zu Grunde gelegten Begriff der endlichen Definirbarkeit materiell einzugehen.

Bei der Korrectur meiner Note empfinde ich jedoch die Notwendigkeit, dies nachzuholen; in der That lässt sich die kritische Analyse des Beweisganges sonst in befriedigender Form nicht vollständig durchführen. Dem habe ich in der neu eingefügten Nr. 9. Rechnung getragen. Das übrige habe ich *sachlich* nicht geändert.[1]

[1] Der Inhalt meiner Note war in sehr knapper Form bereits im Zweiten Teil meines mengentheoretischen Berichts (Leipzig 1908, p. 29) enthalten. Er hat inzwischen eine kritische Bemerkung von G. HESSENBERG veranlasst (Jahresb. d. D. M. V. Bd. 17, p. 145 ff.); leider ehe die obige ausführliche Darstellung erschienen ist.