NACHWEIS DES ZUSAMMENHANGES ZWISCHEN DEN VIER DREHUNGSAXEN EINER LAGENÄNDERUNG EINES ORTHOGONALEN SYSTEMS UND EINEM MAXIMUMSTETRAEDER

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

Wenn ein System von drei durch einen Punkt laufenden zu einander senkrechten halb unendlichen geraden Linien, deren Reihenfolge auf irgend eine Art festgesetzt ist, und ein zweites durch denselben Punkt laufendes, eben solches von dem ersten verschiedenes System gegeben ist, und wenn das zweite System mit dem ersten unter Correspondenz der jedesmal gewählten Reihenfolge durch eine Drehung zur Deckung gebracht werden soll, so muss bekanntlich für die Lösbarkeit der Aufgabe die Bedingung der Übereinstimmung zwischen den beiden Reihenfolgen erfüllt sein; in diesem Fall ist dann die zu der Auflösung gehörende Drehungsaxe vollständig bestimmt.

Wenn dagegen verlangt wird, dass ein System von drei durch einen Punkt gehenden zu einander senkrechten ganz unendlichen geraden Linien, deren Reihenfolge irgendwie festgesetzt ist, und ein zweites durch denselben Punkt gehendes, in gleicher Weise definirtes, von dem ersten verschiedenes System durch eine Drehung entsprechend der Reihenfolge zur Deckung gebracht werden soll, so leuchtet ein, dass diese Aufgabe immer möglich ist, dass sie vier Auflösungen zulässt, und dass zu jeder derselben eine vollständig bestimmte Drehungsaxe gehört. In der gegenwärtigen Arbeit wird die Beziehung aufgezeigt werden, in welcher die Gruppe der beschriebenen vier Drehungsaxen zu dem Quaternion steht, welches mit der Bestimmung der gegenseitigen Lage der betreffenden orthogonalen Systeme correspondirt. Es wird ferner nachgewiesen werden, dass, wenn von dem gemeinsamen

Durchschnittspunkt aus auf jeder der vier Drehungsaxen nach einer festen nur von dem bezüglichen Drehungswinkel abhängenden Regel eine Strecke abgeschnitten wird, die Endpunkte der Strecken die vier Ecken eines Tetraeders bilden, welches die Beschaffenheit eines Maximumstetraeders hat. Der gemeinsame Durchschnittspunkt der beiden orthogonalen Systeme ist der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Höhen des Maximumstetraeders und liegt innerhalb desselben; die vier Drehungsaxen sind die Höhen des Tetraeders. Umgekehrt wird dann ein geometrisches Verfahren aus einander gesetzt werden, um für jedes gegebene Maximumstetraeder, bei dem der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Höhen innerhalb desselben liegt, zwei in dem gemeinsamen Durchschnittspunkte der Höhen zusammentreffende Systeme von je drei ganz unendlichen gegen einander senkrechten geraden Linien so zu bestimmen, dass das eine System auf das andere durch eine Drehung um eine von vier Axen zurückgeführt werden kann, die beziehungsweise mit den Höhen des Tetraeders übereinstimmen.

Schliesslich werde ich eine Verallgemeinerung des Begriffs der Gruppe der vier Drehungsaxen auf eine ebene Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen entwickeln, und dabei erörtern, wie sich die hierfür gebrauchte Definition einer Axe zu der von Schläfli angewendeten Definition verhält.

1.

Es mögen die Coordinaten eines Punktes für ein in dem Raume festes rechtwinkliges Axensystem mit x_1, x_2, x_3, die Coordinaten desselben Punktes für ein zweites von dem ersten verschiedenes bewegliches rechtwinkliges Axensystem mit y_1, y_2, y_3 bezeichnet werden. Dann bestehen die drei mit den constanten Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{33}$ gebildeten Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3, \end{cases}$$

bei welchen die Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ gleich der Quadratsumme $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ ist. Hierbei wird angenommen, dass das zweite System auf das erste durch eine Drehung zurückgeführt werden kann; deshalb muss die Determinante der Substitution gleich der positiven Einheit sein. Weil nun, wenn alle Coordinaten auf das erste System bezogen werden, der Punkt (x_1, x_2, x_3) bei der Bewegung des zweiten in die Lage des ersten Systems in den Punkt (y_1, y_2, y_3) übergeht, so gilt für jeden von dem Anfangspunkte verschiedenen Punkt (ρ_1, ρ_2, ρ_3) der Axe, um welche das zweite System gedreht werden muss, damit die angegebene Lagenänderung erfolge, die Gleichung

$$(2) \qquad \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \rho_3 y_3,$$

welche ausdrückt, dass die Cosinus der Winkel, die von der Drehungsaxe mit den von dem Anfangspunkte nach (x_1, x_2, x_3) und nach (y_1, y_2, y_3) gezogenen Strahlen gebildet werden, einander gleich sind. Um hingegen festzustellen, auf welche Weise, wenn die Axensysteme als Systeme von ganz unendlichen Linien betrachtet werden, das zweite System mit dem ersten der Reihenfolge der Linien entsprechend in Coincidenz gebracht werden kann, erkennt man leicht, dass dies möglich ist, indem das eine System ungeändert bleibt, dagegen für eine gerade Anzahl von Axen des anderen die eine Seite mit der entgegengesetzten vertauscht wird. Es möge das erste System ungeändert bleiben, und bei dem zweiten die Vertauschung der Seiten der betreffenden Axen vorgenommen werden. Dann lässt sich offenbar nur so zu neuen Auflösungen gelangen, dass entweder die erste oder zweite oder dritte Axe des zweiten Systems unberührt bleibt, während an den jedesmaligen übrigen beiden Axen die angegebene Vertauschung bewerkstelligt wird. Wofern nun für diese erste, zweite oder dritte Voraussetzung ein von dem Anfangspunkt verschiedener Punkt der aufzusuchenden Drehungsaxe respective mit $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)}, \rho_3^{(1)})$ oder $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)}, \rho_3^{(2)})$, oder $(\rho_1^{(3)}, \rho_2^{(3)}, \rho_3^{(3)})$ bezeichnet wird, erhält man auf dieselbe Weise, wie (2) entstanden ist, beziehungsweise die drei Gleichungen

$$(3) \qquad \rho_1^{(1)} x_1 + \rho_2^{(1)} x_2 + \rho_3^{(1)} x_3 = \rho_1^{(1)} y_1 - \rho_2^{(1)} y_2 - \rho_3^{(1)} y_3,$$

oder

$$(4) \qquad \rho_1^{(2)} x_1 + \rho_2^{(2)} x_2 + \rho_3^{(2)} x_3 = -\rho_1^{(2)} y_1 + \rho_2^{(2)} y_2 - \rho_3^{(2)} y_3,$$

oder

$$(5) \qquad \rho_1^{(3)} x_1 + \rho_2^{(3)} x_2 + \rho_3^{(3)} x_3 = -\rho_1^{(3)} y_1 - \rho_2^{(3)} y_2 + \rho_3^{(3)} y_3.$$

Aus (2), (3), (4), (5) folgen unmittelbar die vier Systeme von Gleichungen

$$
(6) \qquad \begin{cases} (\alpha_{11} - 1)\rho_1 + \alpha_{21}\rho_2 + \alpha_{31}\rho_3 = 0 \\ \alpha_{12}\rho_1 + (\alpha_{22} - 1)\rho_2 + \alpha_{32}\rho_3 = 0 \\ \alpha_{13}\rho_1 + \alpha_{23}\rho_2 + (\alpha_{33} - 1)\rho_3 = 0, \end{cases}
$$

$$
(7) \qquad \begin{cases} (\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(1)} + \alpha_{21}\rho_2^{(1)} + \alpha_{31}\rho_3^{(1)} = 0 \\ -\alpha_{12}\rho_1^{(1)} + (-\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(1)} - \alpha_{32}\rho_3^{(1)} = 0 \\ -\alpha_{13}\rho_1^{(1)} - \alpha_{23}\rho_2^{(1)} + (-\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(1)} = 0, \end{cases}
$$

$$
(8) \qquad \begin{cases} (-\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(2)} - \alpha_{21}\rho_2^{(2)} - \alpha_{31}\rho_3^{(2)} = 0 \\ \alpha_{12}\rho_1^{(2)} + (\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(2)} + \alpha_{32}\rho_3^{(2)} = 0 \\ -\alpha_{13}\rho_1^{(2)} - \alpha_{23}\rho_2^{(2)} + (-\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(2)} = 0, \end{cases}
$$

$$
(9) \qquad \begin{cases} (-\alpha_{11} - 1)\rho_1^{(3)} - \alpha_{21}\rho_2^{(3)} - \alpha_{31}\rho_3^{(3)} = 0 \\ -\alpha_{12}\rho_1^{(3)} + (-\alpha_{22} - 1)\rho_2^{(3)} - \alpha_{32}\rho_3^{(3)} = 0 \\ \alpha_{13}\rho_1^{(3)} + \alpha_{23}\rho_2^{(3)} + (\alpha_{33} - 1)\rho_3^{(3)} = 0. \end{cases}
$$

Die Systeme (7), (8), (9) gehen aus (6) hervor, indem in der orthogonalen Substitution (1) beziehungsweise die Coefficienten der zweiten und dritten, oder der dritten und ersten, oder der ersten und zweiten Verticalreihe mit der negativen Einheit multiplicirt werden. In der Schrift *Untersuchungen über die Summe von Quadraten*, Bonn 1886, habe ich in I, Art. 3, S. 24 nachgewiesen, dass von den Determinanten, welche auf eine der angegebenen Arten aus dem Schema

$$
\begin{matrix} \alpha_{11} + 1, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} + 1, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} + 1 \end{matrix}
$$

entstehen, die ursprüngliche Determinante mitgerechnet, wenigstens eine von Null verschieden sein muss, und dass man deshalb voraussetzen darf, dass bei der zu Anfang angenommenen orthogonalen Substitution diese Bedingung erfüllt, also der halbe Werth jener Determinante, $1 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, nicht gleich Null sei. Indem diese Annahme gemacht wird, werden für eine beliebige von Null verschiedene reelle Grösse die reellen Grössen λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} durch die Gleichungen (7), l. c. S. 25, wie folgt, bestimmt

$$(10)\qquad \begin{cases} -\dfrac{a_{23}-a_{32}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\lambda_{23}, & \dfrac{a_{31}-a_{13}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\lambda_{31}, \\ \lambda_{23}+\lambda_{32}=0, & \lambda_{31}+\lambda_{13}=0, \\ \multicolumn{2}{c}{\dfrac{a_{12}-a_{21}}{1+a_{11}+a_{22}+a_{33}}=\lambda_{12},} \\ \multicolumn{2}{c}{\lambda_{12}+\lambda_{21}=0.} \end{cases}$$

Mit Hülfe derselben ergeben sich die Gleichungen (9) und (10), l. c. S. 25, welche so zusammengefasst werden können

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda_0\, x_1+\lambda_{21}x_2+\lambda_{31}x_3=\lambda_0\, y_1+\lambda_{12}y_2+\lambda_{13}y_3 \\ \lambda_{12}x_1+\lambda_0\, x_2+\lambda_{32}x_3=\lambda_{21}y_1+\lambda_0\, y_2+\lambda_{23}y_3 \\ \lambda_{13}x_1+\lambda_{23}x_2+\lambda_0\, x_3=\lambda_{31}y_1+\lambda_{32}y_2+\lambda_0\, y_3 \\ \lambda_{23}x_1+\lambda_{31}x_2+\lambda_{12}x_3=\lambda_{23}y_1+\lambda_{31}y_2+\lambda_{12}y_3. \end{cases}$$

Durch die Benutzung der Symbole i_{23}, i_{31}, i_{12}, die mit den Symbolen Hamilton's, j, k, i der Reihe nach übereinstimmen, folgt dann l. c. S. 27 für die obige orthogonale Substitution (1) die Zusammenfassung

$$(12)\qquad \Lambda X=Y\Lambda_1,$$

wo

$$i_{23}+i_{32}=0,\qquad i_{31}+i_{13}=0,\qquad i_{12}+i_{21}=0,$$
$$\Lambda=\lambda_0+i_{12}\lambda_{12}+i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23},\qquad \Lambda_1=\lambda_0-i_{12}\lambda_{12}-i_{13}\lambda_{13}+i_{23}\lambda_{23},$$
$$X=x_1+i_{12}x_2+i_{13}x_3,\qquad Y=y_1+i_{12}y_2+i_{12}y_3$$

gesetzt ist.

In dem Aufsatze *Bemerkungen über die Differentiale von symbolischen Ausdrücken*, Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 16. Februar 1899 ist gezeigt, dass statt der obigen Gleichung (12) auch die Gleichung

$$(12')\qquad \Lambda(i_{23}x_1+i_{31}x_2+i_{12}x_3)=(i_{23}y_1+i_{31}y_2+i_{12}y_3)\Lambda$$

gesetzt werden darf, in welcher nur das Quaternion

$$A = \lambda_0 + i_{23}\lambda_{23} + i_{31}\lambda_{31} + i_{12}\lambda_{12}$$

auftritt. In Folge der Einführung der reellen Bestandtheile $\lambda_0, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12}$ des Quaternions A erhalten die Substitutionscoefficienten die folgenden, zuerst von Euler ermittelten Ausdrücke, welche in der Schrift über die Summe von Quadraten I, Art. 3, S. 28 angegeben sind,

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = \dfrac{\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2}{N(A)}, & \alpha_{12} = \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{12} - \lambda_{13}\lambda_{23})}{N(A)}, \quad \alpha_{13} = \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{13} + \lambda_{12}\lambda_{23})}{N(A)} \\[2ex] \alpha_{21} = \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{12} - \lambda_{13}\lambda_{32})}{N(A)}, & \alpha_{22} = \dfrac{\lambda_0^2 - \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2}{N(A)}, \quad \alpha_{23} = \dfrac{2(\lambda_0\lambda_{23} - \lambda_{12}\lambda_{13})}{N(A)} \\[2ex] \alpha_{31} = \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{13} + \lambda_{12}\lambda_{23})}{N(A)}, & \alpha_{32} = \dfrac{2(-\lambda_0\lambda_{23} - \lambda_{12}\lambda_{13})}{N(A)}, \quad \alpha_{33} = \dfrac{\lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 - \lambda_{13}^2 - \lambda_{23}^2}{N(A)}. \end{cases}$$

Der gemeinsame Nenner ist die Norm des Quaternions A,

$$(14)\qquad N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2.$$

Zu dem System der Coefficienten in den Gleichungen (6) gehört das System der adjungirten Elemente

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha_{11} - \alpha_{22} - \alpha_{33} + 1, & \alpha_{21} + \alpha_{12}, & \alpha_{31} + \alpha_{13} \\ \alpha_{12} + \alpha_{21}, & -\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{33} + 1, & \alpha_{32} + \alpha_{23} \\ \alpha_{13} + \alpha_{31}, & \alpha_{23} + \alpha_{32}, & -\alpha_{11} - \alpha_{22} + \alpha_{33} + 1; \end{cases}$$

die entsprechende Determinante hat den Werth Null, wie es sein muss, damit die Gleichungen (6) zusammen bestehen können. Durch Anwendung von (13) geht (15) in die folgende Gestalt über

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{4\lambda_{23}^2}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{23}\lambda_{31}}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{23}\lambda_{12}}{N(A)} \\[2ex] \dfrac{4\lambda_{31}\lambda_{23}}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{31}^2}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{31}\lambda_{12}}{N(A)} \\[2ex] \dfrac{4\lambda_{12}\lambda_{23}}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{12}\lambda_{31}}{N(A)}, & \dfrac{4\lambda_{12}^2}{N(A)}. \end{cases}$$

In Folge der Voraussetzung, dass das ursprünglich angenommene zweite orthogonale System von dem ersten verschieden sei, darf (1) nicht die identische Substitution sein, folglich dürfen λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} nicht sämmtlich verschwinden. Aus diesem Grunde können auch nicht alle in (16) enthaltenen adjungirten Elemente gleich Null sein. Deshalb sind die Verhältnisse der Grössen ρ_1, ρ_2, ρ_3 durch (6) eindeutig bestimmt, und können aus (16) entnommen werden. Durch Weglassung des gemeinsamen Factors in einer der drei Horizontalreihen erhält man für die Grössen ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Proportion

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = \lambda_{23} : \lambda_{31} : \lambda_{12}. \tag{17}$$

Auf genau dieselbe Weise finden sich aus (7), (8), (9) die Proportionen

$$\rho_1^{(1)} : \rho_2^{(1)} : \rho_3^{(1)} = \lambda_0 \ : \lambda_{21} : \lambda_{31}, \tag{18}$$

$$\rho_1^{(2)} : \rho_2^{(2)} : \rho_3^{(2)} = \lambda_{12} : \lambda_0 \ : \lambda_{32}, \tag{19}$$

$$\rho_1^{(3)} : \rho_2^{(3)} : \rho_3^{(3)} = \lambda_{13} : \lambda_{23} : \lambda_0 \ . \tag{20}$$

Weil λ_0 nothwendig von Null verschieden ist, können in keiner der drei Proportionen alle Glieder auf der rechten Seite verschwinden, und somit ist die Gruppe der vier Drehungsaxen, welche zu der vorhandenen Lagenänderung des gegebenen rechtwinkligen Axensystems gehören, unzweifelhaft bestimmt.

An dieser Stelle möchte ich eine Bemerkung einschalten. Wenn für jedes der Systeme (6), (7), (8), (9) festgestellt ist, dass die bezügliche Determinante verschwindet, ohne dass alle adjungirten Elemente verschwinden, so ist der Beweis geliefert, dass durch die Systeme (6), (7), (8), (9) die Verhältnisse der jedesmaligen drei Unbekannten

$$\rho_1 , \rho_2 , \rho_3 ; \rho_1^{(1)} , \rho_2^{(1)} , \rho_3^{(1)} ; \rho_1^{(2)} , \rho_2^{(2)} , \rho_3^{(2)} ; \rho_1^{(3)} , \rho_2^{(3)} , \rho_3^{(3)}$$

vollständig bestimmt sind. Nun fallen aber die Gleichungen (2), (3), (4), (5), aus denen (6), (7), (8), (9) entstanden sind, in ihrer Gestalt respective mit der vierten, ersten, zweiten, dritten Gleichung des obigen Systems (11) zusammen. Hieraus darf der Schluss gezogen werden, dass die Verhältnisse der jedesmaligen drei Unbekannten mit den Verhältnissen der Grössen

$$\lambda_{23} , \lambda_{31} , \lambda_{22} ; \lambda_0 , \lambda_{21} , \lambda_{31} ; \lambda_{12} , \lambda_0 , \lambda_{32} ; \lambda_{13} , \lambda_{23} , \lambda_0$$

der Reihe nach zusammenfallen müssen. Darin besteht aber der Inhalt der vier Proportionen (17), (18), (19), (20).

2.

Man gelangt zu einer Bestimmung der Drehungswinkel, welche zu den vier definirten Drehungsaxen gehören, indem man in dem System (11) des vorigen Artikels beziehungsweise die erste, zweite, dritte Gleichung mit x_1, x_2, x_3, oder die zweite, dritte, vierte Gleichung mit $-x_3$, x_2, x_1, oder die erste, dritte, vierte mit x_3, $-x_1$, x_2, oder die erste, zweite, vierte mit $-x_2$, x_1, x_3 multiplicirt, und die Resultate jedes Mal addirt. Die hervorgehenden Relationen sind die folgenden

$$\begin{aligned}(1)\quad \lambda_0(x_1^2+x_2^2+x_3^2) &= \lambda_0(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+\lambda_{23}(x_2y_3-x_3y_2)\\ &\quad +\lambda_{31}(x_3y_1-x_1y_3)+\lambda_{12}(x_1y_2-x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad \lambda_{23}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) &= -\lambda_{23}(-x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+\lambda_0(x_2y_3-x_3y_2)\\ &\quad +\lambda_{21}(-x_3y_1-x_1y_3)+\lambda_{31}(x_1y_2+x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \lambda_{31}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) &= -\lambda_{31}(x_1y_2-x_2y_2+x_3y_3)+\lambda_{12}(x_2y_3+x_3y_2)\\ &\quad +\lambda_0(x_3y_1-x_1y_3)+\lambda_{32}(-x_1y_2-x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\quad \lambda_{12}(x_1^2+x_2^2+x_3^2) &= -\lambda_{12}(x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3)+\lambda_{13}(-x_2y_2-x_3y_2)\\ &\quad +\lambda_{23}(x_3y_1+x_1y_3)+\lambda_0(x_1y_2-x_2y_1).\end{aligned}$$

Vermöge der Gleichung $x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ nehmen dieselben respective die Gestalt an

$$\begin{aligned}(5)\quad \lambda_0((x_1-y_2)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2) &= 2\lambda_{23}(x_2y_3-x_3y_2)\\ &\quad +2\lambda_{31}(x_3y_1-x_1y_3)+2\lambda_{12}(x_1y_2-x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6)\quad \lambda_{23}((x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2) &= -2\lambda_0(-x_2y_3+x_3y_2)\\ &\quad -2\lambda_{21}(x_3y_1+x_1y_3)-2\lambda_{31}(-x_1y_2-x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7)\quad \lambda_{31}((x_1+y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2) &= -2\lambda_{12}(-x_2y_3-x_3y_2)\\ &\quad -2\lambda_0(-x_3y_1+x_1y_3)-2\lambda_{32}(x_1y_2+x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8)\quad \lambda_{12}((x_1+y_2)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3-y_3)^2) &= -2\lambda_{13}(x_2y_3+x_3y_2)\\ &\quad -2\lambda_{23}(-x_3y_1-x_1y_3)+2\lambda_0(-x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

Die Gleichungen (1), (2), (3), (4) können in der Weise gleichzeitig erhalten werden, dass die beiden Seiten der Gleichung (12′) des vorigen Art. rechts mit dem Factor $(i_{23}x_1 + i_{31}x_2 + i_{12}x_3)$ multiplicirt werden, und dass in der hervorgehenden Gleichung

$$(9) \qquad -\Lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = (i_{23}y_1 + i_{31}y_2 + i_{12}y_3)\Lambda(i_{23}x_1 + i_{31}x_2 + i_{12}x_3)$$

auf beiden Seiten die reellen Factoren von 1, i_{23}, i_{31}, i_{12} respective einander gleich gesetzt werden.

In Betreff der Gleichung (5) ist zu erwägen, dass für die von dem Nullpunkt nach dem Punkte $(\lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{12})$ gezogene Axe die von dem Nullpunkt nach dem Punkte (x_1, x_2, x_3) oder (y_1, y_2, y_3) laufenden Strecken beziehungsweise die Projection

$$\frac{\lambda_{23}x_1 + \lambda_{31}x_2 + \lambda_{12}x_3}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}},$$

oder

$$\frac{\lambda_{23}y_1 + \lambda_{31}y_2 + \lambda_{12}y_3}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}$$

hat, wo die Quadratwurzelgrösse, wie überhaupt im Folgenden, positiv zu verstehen ist. Nach der letzten Gleichung in (11) des vorigen Art. sind die beiden Projectionen stets einander gleich, so dass die Endpunkte der projicirten Strecken zusammenfallen. Der Winkel, den die projicirten Strecken mit einander bilden, ist der aufzusuchende Drehungswinkel ω.

Ich werde von hier ab voraussetzen, dass durch die Wahl des Punktes (x_1, x_2, x_3) der Werth t der zugehörigen einander gleichen Projectionen positiv sei. Nun wird der Inhalt des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte

$$(0, 0, 0), (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3),$$
$$\left(\frac{\lambda_{23}t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}, \frac{\lambda_{31}t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}, \frac{\lambda_{12}t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}\right)$$

sind, durch ein Sechstel des absoluten Werthes des Productes der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ \lambda_{23}, & \lambda_{31}, & \lambda_{12} \end{vmatrix}$$

in den positiven Factor $\frac{t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}$ dargestellt, und ist daher nach (5) gleich einem Sechstel des absoluten Werthes des Products aus dem Ausdruck

$$\lambda_0((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)$$

in den positiven Factor

$$\frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}.$$

Das Vorzeichen von λ_0 giebt die Entscheidung darüber, ob die drei von dem Nullpunkt verschiedenen Ecken des Tetraeders in ihrer obigen Reihenfolge mit den positiven Halbaxen x_1, x_2, x_3 übereinstimmen oder nicht.

Andrerseits ist der Inhalt des bezeichneten Tetraeders gleich einem Drittel des Products aus dem Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), und der gemeinsame Endpunkt der projicirten Strecken sind, und der Höhe des Tetraeders t. Mithin wird der Inhalt des bezeichneten Dreiecks durch den absoluten Werth des Ausdrucks

$$\frac{\lambda_0((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2)}{4\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}$$

gemessen. Weil aber der Inhalt dieses Dreiecks gleich der Hälfte des Products ist, das aus der Verbindungslinie zwischen den Ecken (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) und der zugehörigen Höhe erhalten wird, so ist die bezügliche Höhe gleich dem absoluten Werth des Ausdrucks

$$\frac{\lambda_0\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}}{2\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}},$$

und deshalb hat die Cotangente der Hälfte des zu bestimmenden Drehungswinkels ω die Bestimmung

$$(10)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\omega}{2} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}.$$

Aus (5) entstehen beziehungsweise die Gleichungen (6), (7), (8) dadurch, dass, während x_1, x_2, x_3 ungeändert bleiben, mit den übrigen auftretenden Bestandtheilen die folgenden Vertauschungen vorgenommen werden

$$(11)\qquad \left|\begin{array}{l} \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3, \lambda_0, \quad \lambda_{23}, \quad \lambda_{31}, \quad \lambda_{12} \\ \text{in } y_1, -y_2, -y_3, \lambda_{23}, -\lambda_0, -\lambda_{21}, -\lambda_{31}, \end{array}\right.$$

oder

$$(12)\qquad \left|\begin{array}{l} \quad y_1\,,\ y_2\,,\ \ y_3\,,\ \lambda_0\,,\ \ \lambda_{23}\,,\ \ \lambda_{31}\,,\ \ \lambda_{12} \\ \text{in}\ -y_1\,,\ y_2\,,\ -y_3\,,\ \lambda_{31}\,,\ -\lambda_{12}\,,\ -\lambda_0\,,\ -\lambda_{32}\,, \end{array}\right.$$

oder

$$(13)\qquad \left|\begin{array}{l} \quad y_1\,,\ \ y_2\,,\ y_3\,,\ \lambda_0\,,\ \ \lambda_{23}\,,\ \ \lambda_{31}\,,\ \ \lambda_{12} \\ \text{in}\ -y_1\,,\ -y_2\,,\ y_3\,,\ \lambda_{12}\,,\ -\lambda_{13}\,,\ -\lambda_{23}\,,\ -\lambda_0\,. \end{array}\right.$$

Es finden daher genau die entsprechenden Schlüsse Anwendung, und die bezüglichen Drehungswinkel ω_1, ω_2, ω_3 sind folgendermassen definirt

$$(14)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\omega_1}{2} = \frac{\lambda_{23}}{\sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{31}^2}}\,,$$

$$(15)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\omega_2}{2} = \frac{\lambda_{31}}{\sqrt{\lambda_{12}^2 + \lambda_0^2 + \lambda_{32}^2}}\,,$$

$$(16)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\omega_3}{2} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{\lambda_{13}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_0^2}}\,.$$

Für den Fall, dass eine oder die andere der Grössen λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} verschwindet, wird offenbar der Inhalt des zugehörigen zu betrachtenden Tetraeders gleich Null, und der entsprechende Drehungswinkel gleich zwei Rechten.

Nachdem die vier Drehungsaxen und die zugehörigen Drehungswinkel für alle Fälle bestimmt sind, werde ich von jetzt ab die Voraussetzung eintreten lassen, dass keiner der vier Drehungswinkel gleich zwei Rechten, oder keine der entsprechenden vier Grössen λ_0, λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} gleich Null sei. Es möge dann auf der zuerst bestimmten Drehungsaxe von dem Nullpunkt O aus eine Strecke abgeschnitten werden, die, wenn q eine beliebige reelle Grösse bedeutet, durch den absoluten Werth des Ausdrucks

$$\frac{\sqrt{\lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{12}^2}}{\lambda_0}\,q$$

dargestellt wird, so dass der Endpunkt E_0 die Coordinaten

$$(17)\qquad \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0}\,q\,,\ \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0}\,q\,,\ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}\,q$$

erhält. Ebenso werde mit den übrigen Drehungsaxen verfahren, wobei die Endpunkte der abzuschneidenden Strecken respective die folgenden Coordinaten bekommen

$$(18)\qquad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}}q\,,\quad -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{23}}q\,,\quad -\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{23}}q\,,$$

$$(19)\qquad -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{31}}q\,,\quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{31}}q\,,\quad -\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{31}}q\,,$$

$$(20)\qquad -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}q\,,\quad -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}q\,,\quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{12}}q\,.$$

Dann sind die Gleichungen der vier Ebenen, welche respective durch die Punkte E_1, E_2, E_3 oder E_2, E_3, E_0, oder E_3, E_1, E_0 oder E_1, E_2, E_0 hindurchgehen, für einen beweglichen Punkt $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die folgenden

$$(21)\qquad \lambda_{23}\mathfrak{x}_1 + \lambda_{31}\mathfrak{x}_2 + \lambda_{12}\mathfrak{x}_3 = -\lambda_0\,q\,,$$

$$(22)\qquad \lambda_0\,\mathfrak{x}_1 + \lambda_{21}\mathfrak{x}_2 + \lambda_{31}\mathfrak{x}_3 = \lambda_{23}q\,,$$

$$(23)\qquad \lambda_{12}\mathfrak{x}_1 + \lambda_0\,\mathfrak{x}_2 + \lambda_{32}\mathfrak{x}_3 = \lambda_{31}q\,,$$

$$(24)\qquad \lambda_{13}\mathfrak{x}_1 + \lambda_{23}\mathfrak{x}_2 + \lambda_0\,\mathfrak{x}_3 = \lambda_{12}q\,.$$

Nun leuchtet ein, dass die von O nach E_0, E_1, E_2, E_3 gezogenen Linien, in der entsprechenden Reihenfolge genommen, auf den vier Ebenen, deren Gleichungen aufgestellt sind, senkrecht stehen. Für das mit den Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 gebildete Tetraeder ist also E_0O, E_1O, E_2O, E_3O beziehungsweise immer ein Theil der von E_0, E_1, E_2, E_3 auf die gegenüber liegende Seitenfläche herabgelassene Höhe, und es schneiden sich die betreffenden vier Höhen in dem Punkte O. Nach einer Bemerkung, die Kronecker in einer, die algebraische Theorie der quadratischen Formen betreffenden Mittheilung, Monatsbericht der Berliner Akademie vom 24 Juli 1872, S. 499, gemacht hat, ist aber ein Tetraeder, dessen Höhen in demselben Punkte zusammentreffen, gleichzeitig ein Tetraeder, das bei gegebener Grösse der Seitenflächen den grössten Inhalt hat, oder ein Maximumstetraeder, und umgekehrt. Daher ist das mit den Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 gebildete Tetraeder in der That ein Maximumstetraeder.

Sucht man jetzt die Coordinaten der Punkte F_0, F_1, F_2, F_3 auf, in welchen die von E_0, E_1, E_2, E_3 auf die entsprechenden gegenüber stehenden Seitenflächen herabgelassenen Lothe diese treffen, so finden sich die Werthe

$$(25)\qquad -\frac{\lambda_{23}\lambda_0}{\lambda_{23}^2+\lambda_{31}^2+\lambda_{12}^2}q\,,\quad -\frac{\lambda_{31}\lambda_0}{\lambda_{23}^2+\lambda_{31}^2+\lambda_{12}^2}q\,,\quad -\frac{\lambda_{12}\lambda_0}{\lambda_{23}^2+\lambda_{31}^2+\lambda_{12}^2}q,$$

$$(26)\qquad \frac{\lambda_0\lambda_{23}}{\lambda_0^2+\lambda_{21}^2+\lambda_{31}^2}q\,,\quad \frac{\lambda_{21}\lambda_{23}}{\lambda_0^2+\lambda_{21}^2+\lambda_{31}^2}q\,,\quad \frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_0^2+\lambda_{21}^2+\lambda_{31}^2}q,$$

$$(27)\qquad \frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2+\lambda_0^2+\lambda_{32}^2}q\,,\quad \frac{\lambda_0\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2+\lambda_0^2+\lambda_{32}^2}q\,,\quad \frac{\lambda_{32}\lambda_{31}}{\lambda_{12}^2+\lambda_0^2+\lambda_{32}^2}q,$$

$$(28)\qquad \frac{\lambda_{13}\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2+\lambda_0^2}q\,,\quad \frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2+\lambda_0^2}q\,,\quad \frac{\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_{13}^2+\lambda_{23}^2+\lambda_0^2}q.$$

Aus denselben geht hervor, dass die Fusspunkte F_0, F_1, F_2, F_3 stets auf der entgegengesetzten Seite von O liegen als die correspondirenden Punkte E_0, E_1, E_2, E_3, dass sich also der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb des Tetraeders befindet. Ferner ergiebt sich, dass für die erste Drehungsaxe die Strecken E_0O oder F_0O erhalten werden, indem man respective die Tangente oder Cotangente des zugehörigen halben Drehungswinkels mit dem Werth der beliebig angenommenen Grösse q multiplicirt, und dass für jede der übrigen Drehungsaxen das gleiche gilt. Das Maximumstetraeder E_0, E_1, E_2, E_3 enthält also als die einzigen Bestimmungsstücke seiner Gestalt und Lage die vier Drehungsaxen und die zugehörigen Drehungswinkel. Der Werth q liefert bei der Construction des Maximumstetraeders den anzuwendenden Mass-stab der Grösse.

3.

In der angeführten Schrift, *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, II, zweite Abtheilung, Art. 11, S. 112, ist nachgewiesen, dass bei einem Maximumstetraeder, für welches der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb desselben liegt, und das dort ein Tetraeder der ersten Art genannt worden ist, die Quadrate der Längen der sechs Kanten stets durch vier positive Grössen v, v_1, v_2, v_3 ausgedrückt werden können, indem man die Aggregate der sechs vorhandenen Paare bildet,

$$(1)\qquad v+v_1\,,\ v+v_2\,,\ v+v_3\,,\ v_2+v_3\,,\ v_3+v_1\,,\ v_1+v_2.$$

Aus den Coordinaten der Eckpunkte E_0, E_1, E_2, E_3 in (17), (18), (19), (20) des vorigen Art. folgen dagegen für die Quadrate der Längen der sechs Kanten, sobald von (10) des Art. 1 Gebrauch gemacht wird, die Darstellungen

$$
(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_0^2}+\frac{1}{\lambda_{23}^2}\Big),\quad N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_0^2}+\frac{1}{\lambda_{31}^2}\Big),\quad N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_0^2}+\frac{1}{\lambda_{12}^2}\Big),\\
&N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_{31}^2}+\frac{1}{\lambda_{12}^2}\Big),\quad N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_{12}^2}+\frac{1}{\lambda_{23}^2}\Big),\quad N(A)q^2\Big(\frac{1}{\lambda_{23}^2}+\frac{1}{\lambda_{31}^2}\Big).
\end{aligned}\right.
$$

Es dienen also zu der Bestimmung von λ_0^2, λ_{23}^2, λ_{31}^2, λ_{12}^2 die vier Gleichungen

$$
(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
&N(A)q^2\frac{1}{\lambda_0^2}=v, &\qquad &N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{23}^2}=v_1,\\
&N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{31}^2}=v_2, &\qquad &N(A)q^2\frac{1}{\lambda_{12}^2}=v_3.
\end{aligned}\right.
$$

Aus denselben folgt sogleich das System

$$
(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{q^2}=\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3},\\
&\frac{\lambda_0^2}{N(A)}=\frac{\frac{1}{v}}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}},\\
&\frac{\lambda_{23}^2}{N(A)}=\frac{\frac{1}{v_1}}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}},\\
&\frac{\lambda_{31}^2}{N(A)}=\frac{\frac{1}{v_2}}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}},\\
&\frac{\lambda_{12}^2}{N(A)}=\frac{\frac{1}{v_3}}{\frac{1}{v}+\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}.
\end{aligned}\right.
$$

Durch diese Gleichungen sind q und die Verhältnisse der vier Grössen λ_0^2, λ_{23}^2, λ_{31}^2, λ_{12}^2 eindeutig bestimmt, und zwar ist die Determination mit derjenigen im Einklange, welche l. c. Art. 12, S. 122 angegeben ist.

Nachdem nun für jedes Maximumstetraeder, für welches der gemeinsame Durchschnittspunkt der Höhen innerhalb des Tetraeders liegt, das zugehörige System von reellen Grössen λ_0^2, λ_{23}^2, λ_{31}^2, λ_{12}^2 ermittelt ist, von denen keine verschwindet, werde ich die beiden Systeme von drei gegen einander rechtwinkligen Geraden aufsuchen, von denen das eine auf das andere durch Drehung um eine von vier Axen zurückgeführt werden kann, die respective mit den vier Höhen des Tetraeders zusammenfallen. Ein zu diesem Zweck geeignetes Hülfsmittel besteht darin, die Punkte zu bestimmen, in denen die Kanten des Tetraeders von den Coordinatenebenen des ersten Systems x_1, x_2, x_3 oder des zweiten Systems y_1, y_2, y_3 getroffen werden. Die Coordinaten der Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 in (17), (18), (19), (20) und die Gleichungen der Seitenflächen des Tetraeders in (21), (22), (23), (24) des vorigen Art. beziehen sich auf das erste System. Wenn der indefinite Punkt $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)$ des ersten Systems in dem zweiten die Coordinaten $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_3$ hat, so folgen vermittelst (11) des Art. 1 aus den zuletzt genannten Gleichungen die folgenden Gleichungen der vier Seitenflächen

$$\lambda_{23}\mathfrak{y}_1 + \lambda_{31}\mathfrak{y}_2 + \lambda_{12}\mathfrak{y}_3 = -\lambda_0 q, \tag{5}$$

$$\lambda_0 \mathfrak{y}_1 + \lambda_{12}\mathfrak{y}_2 + \lambda_{13}\mathfrak{y}_3 = \lambda_{23} q, \tag{6}$$

$$\lambda_{21}\mathfrak{y}_1 + \lambda_0 \mathfrak{y}_2 + \lambda_{23}\mathfrak{y}_3 = \lambda_{31} q, \tag{7}$$

$$\lambda_{31}\mathfrak{y}_1 + \lambda_{32}\mathfrak{y}_2 + \lambda_0 \mathfrak{y}_3 = \lambda_{12} q. \tag{8}$$

Daher haben die Ecken E_0, E_1, E_2, E_3 in dem zweiten System beziehungsweise die Coordinaten

$$\frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q, \quad \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q, \quad \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q, \tag{9}$$

$$-\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} q, \quad -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} q, \quad -\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}} q, \tag{10}$$

$$-\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{31}} q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{31}} q, \quad -\frac{\lambda_{23}}{\lambda_{31}} q, \tag{11}$$

$$-\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{12}} q, \quad -\frac{\lambda_{32}}{\lambda_{12}} q, \quad -\frac{\lambda_0}{\lambda_{12}} q. \tag{12}$$

Es wird nun die Kante $E_0 E_1$ in dem einen oder anderen der beiden Coordinatensysteme durch die folgenden Systeme von Gleichungen dargestellt

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0}\right) q t_{01}, \\ x_2 - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0}\right) q t_{01}, \\ x_3 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{31}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}\right) q t_{01}, \end{cases}$$

oder

$$(14)\quad \begin{cases} y_1 - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_0}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{23}}{\lambda_0}\right) q u_{01}, \\ y_2 - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{31}}{\lambda_0}\right) q u_{01}, \\ y_3 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0} q = \left(-\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{23}} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_0}\right) q u_{01}. \end{cases}$$

Der Durchschnittspunkt der Kante $E_0 E_1$ mit der Ebene $x_1 = 0$ liefert daher den Werth

$$t_{01} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2 + \lambda_{23}^2},$$

mithin

$$\frac{t_{01}}{1 - t_{01}} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}.$$

In derselben Weise giebt der Durchschnittspunkt der Kante $E_0 E_1$ mit der Ebene $y_1 = 0$ die Bestimmung

$$u_{01} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2 + \lambda_{23}^2},$$

folglich

$$\frac{u_{01}}{1 - u_{01}} = \frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}.$$

Nachdem die Durchschnittspunkte der Kante $E_0 E_1$ mit den übrigen Coordinatenebenen ermittelt sind, ergiebt sich die Zusammenstellung

(15)

Kante $E_0 E_1$	$\frac{t_{01}}{1 - t_{01}}$	$\frac{u_{01}}{1 - u_{01}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_0^2}$	
$x_2 = 0$	$-\frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_0\lambda_{12}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_0\lambda_{31}}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_2^0}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_0\lambda_{12}}$
$y_3 = 0$		$-\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\lambda_0\lambda_{31}}$

Verfährt man ebenso mit den übrigen Kanten, und wendet die entsprechenden Bezeichnungen an, so erhält man die folgenden Schemata

(16)

Kante $E_0 E_2$	$\frac{t_{02}}{1 - t_{02}}$	$\frac{u_{02}}{1 - u_{02}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{23}\lambda_{31}}{\lambda_0\lambda_{12}}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_0^2}$	
$x_3 = 0$	$-\frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_0\lambda_{23}}$	
$y_1 = 0$		$-\frac{\lambda_{23}\lambda_{31}}{\lambda_0\lambda_{12}}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_2^0}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_0\lambda_{23}}$

(17)

Kante $E_0 E_3$	$\frac{t_{03}}{1-t_{03}}$	$\frac{u_{03}}{1-u_{03}}$
$x_1 = 0$	$-\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_0\lambda_{31}}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{31}\lambda_{12}}{\lambda_0\lambda_{23}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_0\lambda_{31}}$
$y_2 = 0$		$-\frac{\lambda_{31}\lambda_{12}}{\lambda_0\lambda_{23}}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_0^2}$

(18)

Kante $E_2 E_3$	$\frac{t_{23}}{1-t_{23}}$	$\frac{u_{23}}{1-u_{23}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{31}^2}$	
$x_2 = 0$	$-\frac{\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_{31}\lambda_{23}}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{31}\lambda_0}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{31}^2}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_0\lambda_{12}}{\lambda_{31}\lambda_{23}}$
$y_3 = 0$		$-\frac{\lambda_{23}\lambda_{12}}{\lambda_{31}\lambda_0}$

(19)

Kante $E_3 E_1$	$\frac{t_{31}}{1 - t_{31}}$	$\frac{u_{31}}{1 - u_{31}}$
$x_1 = 0$	$\frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_0}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_{12}^2}$	
$x_3 = 0$	$-\frac{\lambda_0\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{31}}$	
$y_1 = 0$		$-\frac{\lambda_{31}\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_0}$
$y_2 = 0$		$\frac{\lambda_{23}^2}{\lambda_{12}^2}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_0\lambda_{23}}{\lambda_{12}\lambda_{31}}$

(20)

Kante $E_1 E_2$	$\frac{t_{12}}{1 - t_{12}}$	$\frac{u_{12}}{1 - u_{12}}$
$x_1 = 0$	$-\frac{\lambda_0\lambda_{31}}{\lambda_{23}\lambda_{12}}$	
$x_2 = 0$	$\frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{23}\lambda_0}$	
$x_3 = 0$	$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_{23}^2}$	
$y_1 = 0$		$\frac{\lambda_0\lambda_{31}}{\lambda_{23}\lambda_{12}}$
$y_2 = 0$		$-\frac{\lambda_{12}\lambda_{31}}{\lambda_{23}\lambda_0}$
$y_3 = 0$		$\frac{\lambda_{31}^2}{\lambda_{23}^2}$

Nach den Gleichungen (13) ist der Ausdruck $\frac{t_{01}}{1 - t_{01}}$ für einen beliebigen Punkt P der durch E_0 und E_1 laufenden geraden Linie gleich dem Quotienten der Strecken $\frac{E_0 P}{E_1 P}$, und zwar positiv oder negativ genommen, je nachdem P zwischen den Punkten E_0 und E_1 oder ausserhalb der bezüglichen Strecke liegt. Für den Ausdruck $\frac{u_{01}}{1 - u_{01}}$ gilt in Folge von (14) die gleiche Definition, für die Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ oder $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$, die aus den angegebenen durch Einsetzung anderer Paare von Zahlen entstehen, die entsprechende. Sobald deshalb $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$ denselben Werth annehmen, so fallen die zugehörigen Punkte zusammen. Aus diesem Grunde werden die Kanten $E_0 E_1$ und $E_2 E_3$ von den Ebenen $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, die Kanten $E_0 E_2$ und $E_3 E_1$ von den Ebenen $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, die Kanten $E_0 E_3$ und $E_1 E_2$ von den Ebenen $x_3 = 0$, $y_3 = 0$ in denselben Punkten getroffen.

Es ist leicht zu erkennen, dass die definirten Durchschnittspunkte mit denjenigen Punkten übereinstimmen, in welchen für jede Seitenfläche des Tetraeders eine Dreiecksseite durch das von der gegenüber liegenden Ecke herabgelassene Loth getheilt wird. Daraus folgt dann weiter, dass der den Ebenen $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ gemeinsame, durch den Punkt O gehende Strahl auf den beiden Kanten $E_0 E_1$ und $E_2 E_3$ senkrecht steht, und dass für die beiden übrigen Paare sich nicht schneidender Kanten die gleiche Beziehung besteht.

Die übrigen 24 Werthe der Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{d_{ab}}{1 - u_{ab}}$, welche in den sechs Zusammenstellungen (15), (16), (17), (18), (19), (20) vorkommen, werden erhalten, indem man die Elemente λ_0, λ_{23}, λ_{31}, λ_{12} auf alle möglichen Arten in je zwei Paare abtheilt, immer das Product des einen Paares durch das Product des zugeordneten dividirt und jeden Quotienten mit der positiven oder negativen Einheit multiplicirt. In der obigen Darstellung haben offenbar die Werthe aller Quotienten, denen kein Zeichen vorgesetzt ist, dasselbe Vorzeichen, alle diejenigen, die mit dem Minuszeichen versehen sind, das entgegengesetzte Vorzeichen. Zwei Punkte der unbegrenzt verlängerten Kante $E_a E_b$, für welche $\frac{t_{ab}}{1 - t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1 - u_{ab}}$ gleiche und entgegengesetzte Werthe annehmen, bilden mit dem festen Paar E_a, E_b vier harmonische Punkte. Deshalb zeigt die bezügliche Zusammenstellung dass auf jeder unbegrenzt verlängerten Kante zwei Paare von Punkten auftreten, die mit den beiden Ecken vier harmonische Punkte liefern, so dass die zusammengehörigen drei Paare eine Involution bilden. Aus den 24 gegebenen Werthen von $\frac{t_{ab}}{1-t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1-u_{ab}}$ werden die zugehörigen Punkte durch eine elementare geometrische Construction gefunden.

Hebt man alle diejenigen Punkte heraus, für welche die Ausdrücke $\frac{t_{ab}}{1-t_{ab}}$ und $\frac{u_{ab}}{1-u_{ab}}$ positiv sind, so liegen dieselben immer zwischen den betreffenden Ecken E_a und E_b. Indem die Punkte, welche derselben Coordinatenebene angehören, durch einen in dieser Ebene in sich zurückkehrenden Zug von geraden in den Seitenflächen des Tetraeders liegenden Linien verbunden werden, erhält man für alle sechs Coordinatenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die geradlinigen Begrenzungen derjenigen Theile, welche innerhalb des Maximumstetraeders eingeschlossen sind; durch diese Spuren sind die Coordinatenebenen selbst geometrisch bestimmt.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Resultate erlauben eine unmittelbare Anwendung auf die Bewegung eines beliebigen Systems von starr mit einander verbundenen Massenpunkten. Sobald der Schwerpunkt des Massensystems und das rechtwinklige System der zugehörigen Hauptträgheitsaxen bestimmt ist, kann bei jeder Bewegung des Systems die Drehung der Hauptträgheitsaxen um den Schwerpunkt verfolgt werden. Wenn man jetzt die im Laufe der Zeit geschehende Lagenänderung der um den Schwerpunkt rotirenden Hauptträgheitsaxen in Bezug auf irgend ein in dem Raume festes System von rechtwinkligen Axen als bekannt annimmt, so lassen sich nach der vorhin entwickelten Methode für jeden Zeitmoment die entsprechenden vier Drehungsaxen und zugehörigen Drehungswinkel ableiten. Aus diesen Daten ergiebt sich, nachdem der anzuwendende Massstab der Grösse gewählt worden ist, ein der Gestalt, Grösse und Lage nach vollständig bestimmtes Maximumstetraeder. Dasselbe bildet für die beobachtete drehende Bewegung einen beständigen Begleiter.

Das Maximumstetraeder enthält aber die Merkzeichen sowohl des in dem Raume festen zur Ortsbestimmung eingeführten wie auch des beweglichen Systems der Hauptaxen. Sowohl diese Spuren als die zu den vier Drehungsaxen gehörenden Drehungswinkel lassen sich vermittelst des auseinandergesetzten Verfahrens auffinden. Es besteht daher die Möglichkeit, aus der festen Gestalt und Lage des Maximumstetraeders rückwärts auf die Natur der drehenden Bewegung zu schliessen, aus deren Betrachtung die Definition des Maximumstetraeders hervorgegangen ist.

4.

Mit der Ausdehnung des Begriffs der Drehungsaxe auf eine ebene Mannigfaltigkeit von n Dimensionen beschläftigt sich die im 65ten Bande des Journals für Mathematik S. 185 veröffentlichte Abhandlung von Schläfli *Über invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck der Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird.*

Man kann das hier untersuchte Problem so ausdrücken, dass ein System von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch eine lineare Substitution in ein System von n Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ transformirt wird

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n, \end{cases}$$

welche die Gleichung

$$(2)\qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

erfüllt, und deren Determinante gleich $+1$ ist, und dass nach solchen Systemen von Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ gefragt wird, für welche der Ausdruck

$$(3)\qquad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

ein Maximum oder Minimum wird, während das Aggregat $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ einen festen Werth behält. Es können nun in einer ebenen Mannigfaltigkeit von n Dimensionen $x_1, x_2, \ldots x_n$ als die Coordinaten eines Punktes in einem festen orthogonalen System, ferner $y_1, y_2, \ldots y_n$ als die Coordinaten desselben Punktes in einem zweiten beweglichen orthogonalen System aufgefasst werden. Wenn alle Coordinaten auf das erste System bezogen werden, so geht bei der Bewegung des zweitens Systems in die Lage des ersten der Punkt $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ in den Punkt $(y_1, y_2, \ldots . y_n)$ über. Ferner stellt dann der Ausdruck (3) den in die feste Grösse $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ multiplicirten Cosinus des Winkels zweier Strahlen dar, die von dem gemeinsamen Nullpunkt nach den Punkten $(x_1, x_2, \ldots . x_n)$ und $(y_1, y_2, \ldots . y_n)$ gezogen werden. Die erwähnte Aufgabe de maximis et minimis bezieht sich jetzt nach dem von SCHLÄFLI angewendeten Sprachgebrauch auf die Ermittelung des Maximums oder Minimums der angularen Verschiebung.

Um bei dem Problem de maximis et minimis die Grössen $x_1, x_2, \ldots . x_n$ als die unabhängigen Variabeln zu haben, werde das System (1) nach den Variabeln $y_1, y_2, \ldots . y_n$ aufgelöst, wodurch das System entsteht

$$(4)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{n1}x_n \\ y_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{n2}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_3 = \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n . \end{cases}$$

Bildet man nun mit Zuziehung eines unbestimmten Factors σ den Ausdruck

$$(5)\qquad x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n - \sigma(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2),$$

und setzt die n partiellen Derivirten desselben nach $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gleich Null, so ergiebt sich das zu dem Problem gehörende System von Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} 2\alpha_{11}x_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})x_2 + \ldots + (\alpha_{1n} + \alpha_{n1})x_n = 2\sigma x_1 \\ (\alpha_{21} + \alpha_{12})x_1 + 2\alpha_{22}x_2 + \ldots + (\alpha_{2n} + \alpha_{n2})x_n = 2\sigma x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_{n1} + \alpha_{1n})x_1 + (\alpha_{n2} + \alpha_{2n})x_2 + \ldots + 2\alpha_{nn}x_n = 2\sigma x_n . \end{cases}$$

Auf Grund desselben gilt die Bedingung, dass die Determinante der n homogenen Functionen verschwinden muss; mithin kommt für σ die Gleichung des n^{ten} Grades

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 2\alpha_{11} - 2\sigma, & \alpha_{12} + \alpha_{21}, & \dots, & \alpha_{1n} + \alpha_{n1} \\ \alpha_{21} + \alpha_{12}, & 2\alpha_{22} - 2\sigma, & \dots, & \alpha_{2n} + \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} + \alpha_{1n}, & \alpha_{n2} + \alpha_{2n}, & \dots, & 2\alpha_{nn} - 2\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Gleichzeitig folgt aus (6), indem man die Gleichungen der Reihe nach mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ multiplicirt und addirt, die Relation

$$(8)\qquad \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sigma.$$

Es wird also der Werth des Cosinus, der zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, durch σ dargestellt, und die Gleichung $\sigma = 1$ bedeutet, dass die von dem Nullpunkt nach den Punkten $(x_1, x_2, \dots x_n)$ und $(y_1, y_2, \dots y_n)$ gezogenen Strahlen zusammenfallen. Es muss nun unterschieden werden, ob die Anzahl n der Dimensionen der Mannigfaltigkeit ungerade oder gerade ist.

Zuerst werde n ungerade vorausgesetzt. Dann zeigt Schläfli, dass die Gleichung (7) stets durch den Werth $\sigma = 1$ so erfüllt wird, dass dabei nicht alle adjungirten Elemente verschwinden. Es sind dann durch (6) die Verhältnisse der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ vollständig bestimmt, und der von dem Nullpunkte nach $(x_1, x_2, \dots x_n)$ gezogene Strahl wird die aufzusuchende Drehungsaxe.

Man gelangt zu einem übereinstimmenden Resultat, wenn man die vorhin in Art. 1. zur Definition der Drehungsaxe benutzte Forderung auf die vorliegende Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ausdehnt.

Es handelt sich hier um die Aufgabe, einen Punkt $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ so zu bestimmen, dass der von dem Nullpunkte nach demselben gezogene Strahl mit dem nach einem beliebigen Punkte $(x_1, x_2, \dots x_n)$ gezogenen Strahle und mit dem nach dem zugehörigen Punkte $(y_1, y_2, \dots y_n)$ gezogenen Strahle Winkel von gleichen Cosinus bildet, oder dass die Gleichung

$$(9)\qquad \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \dots + \rho_n x_n = \rho_1 y_1 + \rho_2 y_2 + \dots + \rho_n y_n$$

erfüllt ist. Aus derselben ergiebt sich das System von Gleichungen

$$
(10) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\rho_1 + \alpha_{21}\rho_2 + \ldots + \alpha_{n1}\rho_n = \rho_1 \\ \alpha_{12}\rho_1 + \alpha_{22}\rho_2 + \ldots + \alpha_{n2}\rho_n = \rho_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1n}\rho_1 + \alpha_{2n}\rho_2 + \ldots + \alpha_{nn}\rho_n = \rho_n . \end{cases}
$$

Durch Auflösen nach den links befindlichen Grössen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ folgt aber das System

$$
(11) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\rho_1 + \alpha_{12}\rho_2 + \ldots + \alpha_{1n}\rho_n = \rho_1 \\ \alpha_{21}\rho_1 + \alpha_{22}\rho_2 + \ldots + \alpha_{2n}\rho_n = \rho_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\rho_1 + \alpha_{n2}\rho_2 + \ldots + \alpha_{nn}\rho_n = \rho_n . \end{cases}
$$

und durch Addition der entsprechenden Gleichungen erhält man

$$
(12) \qquad \begin{cases} 2\alpha_{11}\rho_1 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})\rho_2 + \ldots + (\alpha_{1n} + \alpha_{n1})\rho_n = 2\rho_1 \\ (\alpha_{21} + \alpha_{12})\rho_1 + 2\alpha_{22}\rho_2 + \ldots + (\alpha_{2n} + \alpha_{n2})\rho_n = 2\rho_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\alpha_{n1} + \alpha_{\ n})\rho_1 + (\alpha_{n2} + \alpha_{2n})\rho_2 + \ldots + 2\alpha_{nn}\rho_n = 2\rho_n . \end{cases}
$$

Dieses System geht aber aus dem obigen (6) hervor, indem $x_1, x_2, \ldots. x_n$ respective durch $\rho_1, \rho_2, \ldots. \rho_n$ und σ durch die positive Einheit ersetzt wird.

Es kann jetzt die Frage nach der Drehungsaxe für alle Systeme aufgeworfen werden, die aus (1) entstehen, indem auf alle möglichen Arten statt einer geraden Anzahl von Grössen y_f die Grössen $-y_f$ gesetzt werden. Die angegebene Veränderung ist dieselbe, als wenn in der orthogonalen Substitution $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{nn}$ die entsprechende gerade Anzahl von Verticalreihen mit der negativen Einheit multiplicirt würde. Die resultirenden Substitutionen bleiben orthogonale und behalten die Determinante $+1$. In der Schrift *Über die Summen von Quadraten*, II, Art. 1, S. 62, ist bewiesen, dass unter den Determinanten, die aus der Gestalt

$$
(13) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} + 1, & \alpha_{12}, & \ldots, & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22} + 1, & \ldots, & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots, & \alpha_{nn} + 1 \end{vmatrix}
$$

in der angegebenen Weise entstehen, wenigstens eine einen von Null verschiedenen Werth haben muss. Weil nun zwischen den bezüglichen orthogonalen Systemen kein wesentlicher Unterschied besteht, darf angenommen werden, dass für die von Hause aus gewählte Substitution diese Bedingung erfüllt ist. Die betreffende Determinante werde mit D bezeichnet, und nach den Elementen α_{ab} so partiell differentiirt, als ob diese von einander unabhängig wären, dann können vermöge der l. c. mit (9) bezeichneten Gleichungen, unter Benutzung einer beliebigen reellen von Null verschiedenen Grösse λ_0 die Elemente λ_{ab} wie folgt definirt werden

$$\text{(14)} \qquad \frac{1}{D}\left(D - 2\frac{\partial D}{\partial \alpha_{aa}}\right) = \frac{\lambda_{aa}}{\lambda_0}, \qquad \frac{2}{D}\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ab}} = \lambda_{ab},$$

und es zeigt sich, dass die Grössen λ_{aa} sämmtlich verschwinden, für die übrigen aber $\lambda_{ab} + \lambda_{ba} = 0$ sein muss.

Um die Frage nach der definirten Gruppe von Drehungsaxen analytisch zu formuliren, mögen die Indices, für welche in einem einzelnen Falle die Grössen y ungeändert bleiben, mit $a, b, \ldots . e$, die übrigen Indices indefinite mit f bezeichnet werden. Weil nach der gegenwärtigen Annahme n eine ungerade Zahl bedeutet, f eine gerade Reihe von Zahlen durchläuft, so ist die Anzahl der Indices $a, b, \ldots . e$ nothwendig ungerade. Es kommt jetzt darauf an, n Grössen

$$\rho_1^{a,b,\ldots.e}, \rho_2^{a,b,\ldots.e}, \ldots, \rho_n^{a,b,\ldots.e}$$

so zu bestimmen, dass die aus (9) abgeleitete Gleichung

$$\text{(15)} \qquad \rho_a^{a,b,\ldots.e} x_a + \rho_b^{a,b,\ldots.e} x_b + \ldots + \sum_f \rho_f^{a,b,\ldots.e} x_f$$
$$= \rho_a^{a,b,\ldots.e} y_a + \rho_b^{a,b,\ldots.e} y_b + \ldots - \sum_f \rho_f^{a,b,\ldots.e} y_f$$

befriedigt ist. Hieraus folgt, wie oben das System (10) aus (9), das System von Gleichungen

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} \alpha_{11}\rho_1^{a,b,\ldots.e} + \alpha_{21}\rho_2^{a,b,\ldots.e} + \ldots + \alpha_{n1}\rho_n^{a,b,\ldots.e} - \varepsilon_1\rho_1^{a,b,\ldots.e} = 0 \\ \alpha_{12}\rho_0^{a,b,\ldots.e} + \alpha_{22}\rho_2^{a,b,\ldots.e} + \ldots + \alpha_{n2}\rho_n^{a,b,\ldots.e} - \varepsilon_2\rho_2^{a,b,\ldots.e} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{1n}\rho_1^{a,b,\ldots.e} + \alpha_{2n}\rho_2^{a,b,\ldots.e} + \ldots + \alpha_{nn}\rho_n^{a,b,\ldots,e} - \varepsilon_n\rho_n^{a,b,\ldots.e} = 0, \end{cases}$$

wo die Zeichen $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots. \varepsilon_e$ durch $+1$, die Zeichen ε_f durch -1 zu ersetzen sind. Die Anzahl von Verbindungen, die in der angegebenen Weise aus den Zeigern $1, 2, 3, \ldots. n$ erhalten werden können, beträgt

$$1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$

oder 2^{n-1}. Die Gruppe der definirten Drehungsaxen besteht also aus 2^{n-1} Individuen. Sobald festgestellt ist, dass die Determinante des Systems (16) verschwindet, ohne dass die sämmtlichen adjungirten Elemente verschwinden, sind die Verhältnisse der zu suchenden Grössen

$$\rho_1^{a,b,\ldots.e}, \rho_2^{a,b,\ldots.e}, \ldots, \rho_n^{a,b,\ldots.e}$$

bestimmt und können in der folgenden Weise gefunden werden.

Es ist l. c. II, Art. 1, S. 67 angegeben, wie aus den vorhin definirten Grössen λ_0 und λ_{ab}, nachdem 2ν beliebige Zahlen $a, b, \ldots. f$ aus der Reihe von 1 bis n ausgewählt sind, eine Grösse $\lambda_{a,b,\ldots.f}$ abgeleitet wird, die gleich einem Bruche mit dem Nenner $\lambda_0^{\nu-1}$ ist, dessen Zähler erhalten wird, indem man mit den Zahlen $a, b, \ldots, f$ alle Permutationen der ersten Classe vornimmt, hierauf diese Zahlen in der gegebenen Reihenfolge, zu zweien gepaart, an den Buchstaben λ als Zeiger vertheilt, von den Producten, die unter einander gleich sind, nur ein einziges wählt und von allen verschiedenen die Summe nimmt. Alsdann lässt sich das obige System (1) zunächst durch das System von n Gleichungen ersetzen, das l. c. S. 65 aufgestellt ist

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda_0\, x_1 + \lambda_{21} x_2 + \ldots + \lambda_{n1} x_n = \lambda_0\, y_1 + \lambda_{12} y_2 + \ldots + \lambda_{1n} y_n \\ \lambda_{12} x_1 + \lambda_0\, x_2 + \ldots + \lambda_{n2} x_n = \lambda_{21} y_1 + \lambda_0\, y_2 + \ldots + \lambda_{2n} y_n \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2n} x_2 + \ldots + \lambda_0\, x_n = \lambda_{n1} y_1 + \lambda_{n2} y_3 + \ldots + \lambda_0\, y_n, \end{cases}$$

und aus diesem wird mit Einrechnung von ihm selbst ein System von 2^{n-1} Gleichungen erhalten, das nach Art. 2, S. 69 die folgende Gestalt hat

$$(18)\quad \lambda_{bc\ldots e} x_a + \lambda_{c\ldots ea} x_b + \ldots + \lambda_{ab\ldots d} x_e + \sum_f \lambda_{fab\ldots e} x_f$$

$$= \lambda_{bc\ldots e} y_a + \lambda_{c\ldots ea} y_b + \ldots + \lambda_{ab\ldots d} y_e - \sum_f \lambda_{fab\ldots e} y_f;$$

hier haben $a, b, \ldots . e, f$ die vorhin angegebene Bedeutung; bei dem Fortfallen aller Zeiger tritt die Null an ihre Stelle. Eine Vergleichung von (18) und (15) zeigt, dass die beiden Relationen in genau derselben Weise gebildet sind. Ebenso wie (16) aus (15) abgeleitet ist, folgt aus (18) ein System, das aus (16) hervorgeht, indem respective statt

$$(19) \qquad \rho_a^{a,b,\ldots.e}, \ldots . \rho_e^{a,b,\ldots.e}, \rho_f^{a,b,\ldots.e}$$

die Grössen

$$(20) \qquad \lambda_{bc\ldots e}, \ldots . \lambda_{ab\ldots d}, \lambda_{fab\ldots e}$$

substituirt werden. Weil nun die Verhältnisse der Grössen (19) unter der angegebenen Voraussetzung eindeutig bestimmt sind, und weil die Grössen (20) denselben Gleichungen genügen, so werden die Verhältnisse der gesuchten Grössen (19) durch die Verhältnisse der Grössen (20) beziehungsweise dargestellt, und sind auf diese Weise als rationale Verbindungen der Grössen λ_0, λ_{ab} ausgedrückt. Zur Untersuchung der Determinante des Systems (16) eignet sich ein Satz, der l. c. Art. 8, S. 94 mitgetheilt ist, und folgendermassen ausgesprochen werden kann.

Wenn in der obigen Determinante (13) die in der Diagonale stehenden additiven Einheiten der Reihe nach durch n unbestimmte Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ ersetzt werden, so entsteht die Determinante

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+s_1, & \alpha_{12}, & \ldots . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+s_2, & \ldots . & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots . & \alpha_{nn}+s_n \end{vmatrix} = D(s_1, s_2, \ldots . s_n).$$

Ferner erhält man aus den Elementen λ_0, λ_{ab} die Determinante

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_0, & \lambda_{21}, & \ldots . & \lambda_{n1} \\ \lambda_{12}, & \lambda_0, & \ldots . & \lambda_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{1n}, & \lambda_{2n}, & \ldots . & \lambda_{nn} \end{vmatrix} = \lambda_0^{n-2} N(\Lambda);$$

hier ist

$$(23) \qquad N(A) = \lambda_0^2 + \lambda_{12}^2 + \ldots + \lambda_{1234}^2 + \ldots,$$

wo bei den Grössen λ zuerst alle Verbindungen der Zeiger von 1 bis n zu je zweien, dann zu je vieren, u. s. f. zu nehmen sind. Alsdann besteht der erwähnte Satz in der folgenden Darstellung der Determinante $D(s_1, s_2, \ldots . s_n)$

$$(24) \quad N(A)D(s_1, s_2, \ldots . s_n) = (s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)\Big(\lambda_0^2 + \frac{(s_1-1)(s_2-1)}{(s_1+1)(s_2+1)}\lambda_{12}^2 + \ldots + \frac{(s_1-1)(s_2-1)(s_3-1)(s_4-1)}{(s_1+1)(s_2+1)(s_3+1)(s_4+1)}\lambda_{1234}^2 + \ldots\Big);$$

die auf der rechten Seite angedeuteten Aggregate werden in derselben Weise gebildet, wie für (23) angegeben ist.

Setzt man die sämmtlichen Grössen $s_1, s_2, \ldots . s_n$ gleich einer einzigen s, so wird die linke Seite von (24) gleich dem Product des nothwendig von Null verschiedenen Aggregats $N(A)$ in die Determinante

$$(25) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}+s, & \alpha_{12}, & \ldots . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}+s, & \ldots . & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}, & \alpha_{n2}, & \ldots . & \alpha_{nn}+s \end{vmatrix};$$

gleichzeitig gehen die auf der rechten Seite von (24) vorhandenen Producte in Potenzen über. Da gegenwärtig n ungerade angenommen ist, so steigen die in den Nennern vorkommenden Potenzen von $(s+1)$ bis zu der $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz, und man kann der rechten Seite von (24) die folgende Gestalt geben

$$(26) \qquad (s+1)\Big((s+1)^{n-1}\lambda_0 + (s+1)^{n-3}(s-1)^2(\lambda_{12}^2+\ldots) + (s+1)^{n-5}(s-1)^4(\lambda_{1234}^2+\ldots)+\ldots\Big).$$

Die Darstellung der linken durch die rechte Seite bringt dann den Satz in Evidenz, der zuerst von Brioschi in der Note *Sur un théorème relatif aux déterminants gauches*, Liouville's Journal de mathématiques, tome 19, S. 253 aufgestellt und bewiesen ist, dass nämlich (26) bei einem ungeraden n für $s = -1$ gleich Null wird, und ausserdem für keinen reellen Werth von s verschwinden kann. Es folgt hieraus, dass die Determinante des Systems, das aus (10) hervorgeht, indem die Ausdrücke rechts, mit der negativen Einheit multiplicirt, auf die linke Seite gebracht werden, verschwinden muss. Wenn bei dem bezüglichen Schema alle adjungirten Elemente gleich Null würden, so müsste der nach s genommene Differentialquotient von (25) für $s = -1$ ebenfalls verschwinden, oder es müsste die Function (25) von s nicht nur durch $(s+1)$ sondern auch durch $(s+1)^2$ theilbar sein. Damit aber in (26) die mit $(s+1)$ multiplicirte Function durch $(s+1)$ aufgehen kann, muss sie gleichfalls für $s = -1$ gleich Null werden, und dies kann nur geschehen, wenn der letzte in $(s-1)^{n-1}$ multiplicirte Bestandtheil oder das Aggregat der Quadrate der Grössen λ, welche mit $n-1$ Indices versehen sind, verschwinden. Es wird daher der Fall, dass (25) durch $(s+1)^2$ aufgeht, durch die Voraussetzung ausgeschlossen, dass die Verbindungen λ, bei denen die Zahl der Indices gleich $n-1$ ist, nicht alle gleich Null sind. Sobald diese Voraussetzung gilt, ist es sicher, dass die Verhältnisse der Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ durch das System (10) vollständig bestimmt sind.

Hier kann die Bemerkung hinzugefügt werden, dass das System (10) aus (16) entsteht, indem die Zeiger $a, b, c, \dots e$ die Werthe $1, 2, 3, \dots n$ erhalten, und der Zeiger f fortfällt. Dem entsprechend fallen auch in (18) die nach f laufenden Summen fort, und für die in (19) aufgeführten Grössen, die mit $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ coincidiren, folgt aus (20), dass ihre Verhältnisse durch die Verhältnisse der Grössen λ bestimmt sind, welche $n-1$ Zeiger haben. Die oben ermittelte Bedingung, dass nicht alle Grössen λ, die $n-1$ Zeiger haben, verschwinden dürfen, bezieht sich hiernach auf diejenigen Grössen λ, denen die gesuchten Grössen $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ proportional sein müssen.

Die Determinante des Systems (16) wird aus $D(s_1, s_2, \dots s_n)$ erhalten, in dem man statt $s_a, s_b, \dots s_e$ die negative, statt s_f die positive Einheit substituirt. Ich werde jetzt die Veränderung betrachten, welche mit der rechten Seite von (24) vor sich geht, wenn die Grössen $s_a, s_b, \dots s_e$ ungeändert bleiben, dagegen für jede Grösse s_f respective $-s_f$ eingesetzt wird. Die rechte Seite von (24) ist ein Aggregat von Summanden, die aus zwei Factoren bestehen. Der eine Factor geht aus dem Product $(s_1+1)(s_2+1)\dots(s_n+1)$ hervor, indem auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl unter den Grössen $s_1, s_2, \dots s_n$ durch ihren negativ genommenen Werth ersetzt wird. Der andere Factor ist das Quadrat derjenigen

Grössen λ, deren Indices mit den Indices der negativ genommen Grössen $s_1, s_2, \ldots s_n$ übereinstimmen. Wofern nun für eine gerade Anzahl von Grössen s_f immer $-s_f$ substituirt wird, so geht der Inbegriff der ersten Factoren in sich selbst über. Weil aber die zweiten Factoren unberührt bleiben, so ist der Erfolg kein anderer, als dass die letzteren in einer regelmässig bestimmten aber anderen Reihenfolge mit den ersten Factoren zusammentreten. Wird nun, nachdem dies geschehen ist, statt $s_1, s_2, \ldots s_n$ dieselbe Grösse gesetzt, so ergiebt sich die Determinante von (16) durch die Annahme $s = -1$. Die über die Determinante (25) angestellten Erörterungen erlauben jetzt in Bezug auf die Determinante des Systems (16) den Schluss, dass diese verschwindet, und dass gleichzeitig nicht alle adjungirten Elemente verschwinden können, vorausgesetzt, dass von einer bestimmten Gruppe von n Grössen λ nicht alle Individuen verschwinden. Eine genaue Erörterung lässt erkennen, dass die bezüglichen Grössen λ dieselben sind, welche in (20) erscheinen, und denen die aufzusuchenden Grössen (19) proportional werden.

Will man die Grössen $\rho_1^{a,b,\ldots e}, \ldots, \rho_n^{a,b,\ldots e}$, deren Verhältnisse durch das System (16) bestimmt sind, vermittelst eines Problems definiren, dass dem von SCHLÄFLI aufgestellten Problem entspricht, so kann man fordern, dass der Ausdruck

$$x_a y_a + x_b y_b + \ldots + x_e y_e - \sum_f x_f y_f \tag{27}$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht werde, während die Summe $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ einen festen Werth hat, und dass der für (27) resultirende Werth, durch die Summe $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ dividirt, gleich der Einheit sei.

Ich komme jetzt zu der Untersuchung des Falles, dass n gerade ist. Für denselben betrachtet SCHLÄFLI das auf den obigen Ausdruck (5) bezügliche Problem de maximis et minimis. Er giebt an, dass die obige Gleichung des n^{ten} Grades (7) alsdann durch den Werth $\sigma = 1$ nicht erfüllt wird, dass deshalb das zugehörige System (6) keine Auflösung zulässt, und zieht hieraus den richtigen Schluss, dass für eine ebene Mannigfaltigkeit einer geraden Ordnung die von ihm aufgesuchte Verallgemeinerung einer Drehungsaxe nicht vorhanden ist. Man kann indessen für eine ebene Mannigfaltigkeit einer geraden Ordnung eine andere Forderung aufstellen, welche immer lösbar ist, und in anderer Weise eine Verallgemeinerung einer Drehungsaxe liefert.

Der angegebene Zweck wird erreicht, indem für die vorliegende Mannigfaltigkeit der n^{ten} Ordnung die Bestimmung eines Punktes $(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n)$ verlangt wird, für welchen die Gleichung befriedigt ist, die aus (9) dadurch hervorgeht, dass auf alle möglichen Arten statt einer *ungeraden* Zahl von Grössen y_f respective die Grössen $-y_f$ substituirt werden. Es bezeichne $a, b, \ldots e$ einen Complex einer ungeraden Anzahl von Zeigern aus der Reihe $1, 2, \ldots n$; die übrigen Zeiger mögen mit f bezeichnet werden, und zwar durchläuft f, weil n jetzt gerade ist, eine ungerade Anzahl von Werthen. Dann handelt es sich darum, n Grössen $\rho_1^{a,b,\ldots e}, \rho_2^{a,b,\ldots e}, \ldots \rho_n^{a,b,\ldots e}$ in der Weise zu bestimmen, dass die mit (15) gleichlautende Gleichung

$$(28)\qquad \begin{aligned} &\rho_a^{a,b,\ldots e} x_a + \ldots + \rho_e^{a,b,\ldots e} x_e + \sum_f \rho_f^{a,b,\ldots e} x_f \\ &= \rho_a^{a,b,\ldots e} y_a + \ldots + \rho_e^{a,b,\ldots e} y_e - \sum_f \rho_f^{a,b,\ldots e} y_f \end{aligned}$$

erfüllt ist. Daraus folgt das der Form nach mit (16) übereinstimmende System

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}\rho_1^{a,b,\ldots e} + \alpha_{21}\rho_2^{a,b,\ldots e} + \ldots + \alpha_{n1}\rho_n^{a,b,\ldots e} - \varepsilon_1\rho_1^{a,b,\ldots e} = 0 \\ \alpha_{12}\rho_1^{a,b,\ldots e} + \alpha_{22}\rho_2^{a,b,\ldots e} + \ldots + \alpha_{n2}\rho_n^{a,b,\ldots e} - \varepsilon_2\rho_2^{a,b,\ldots e} = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \alpha_{1n}\rho_1^{a,b,\ldots e} + \alpha_{2n}\rho_2^{a,b,\ldots e} + \ldots + \alpha_{nn}\rho_n^{a,b,\ldots e} - \varepsilon_n\rho_n^{a,b,\ldots e} = 0; \end{cases}$$

die Zeichen $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots \varepsilon_e$ sind durch $+1$, die Zeichen ε_f durch -1 zu ersetzen. Die Anzahl von Verbindungen, die in der angegebenen Weise aus den Zeigern $1, 2, \ldots n$ erhalten werden, beträgt

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

und diese Summe ist wieder gleich 2^{n-1}. Die Gruppe der von dem Nullpunkte nach den Punkten $(\rho_1^{a,b,\ldots e}, \ldots \rho_n^{a,b,\ldots e})$ gezogenen Axen besteht daher ebenfalls aus 2^{n-1} Individuen. Wofern nun nachgewiesen wird, dass die Determinante des Systems (29) gleich Null ist, ohne dass alle adjungirten Elemente gleich Null werden, so sind die Verhältnisse der aufzusuchenden Grössen $\rho_1^{a,b,\ldots e}, \ldots \rho_n^{a,b,\ldots e}$ bestimmt, und können in ganz derselben Weise gefunden werden, wie für einer ungeraden Werth von n geschehen ist. Die oben mit (17) und (18) bezeichneten Gleichungen bestehen, wie l. c. gezeigt worden ist, ohne Unterschied für ungerade oder gerade Werthe von n. Es folgt also genau, wie vorhin, dass unter der erwähnten Voraussetzung die gesuchten Grössen

$$(30) \qquad \rho_a^{a,b,\ldots.e}, \; \ldots . \; \rho_e^{a,b,\ldots.e}, \; \rho_f^{a,b,\ldots.e}$$

den Grössen

$$(31) \qquad \lambda_{bc\ldots e}, \; \ldots . \; \lambda_{ab\ldots d}, \; \lambda_{fab\ldots e}$$

respective proportional sind. Nachdem somit die Gruppe von 2^{n-1} Punkten $(\rho_1^{a,b,\ldots.e}, \ldots . \rho_n^{a,b,\ldots.e})$ vollständig bestimmt ist, bleibt nur übrig, die angegebenen Eigenschaften der Determinante des Systems (29) zu beweisen.

Dies geschieht mit Hülfe der obigen Gleichung (24), welche l. c. ebensowohl für gerade als für ungerade Werthe von n begründet worden ist. Gegenwärtig kommt es darauf an, die Veränderung zu erörtern, welche bei geradem n mit der rechten Seite von (24) erfolgt, sobald die Grössen $s_a, s_b, \ldots . s_e$ ungeändert bleiben, dagegen für jede der Grössen s_f, deren Anzahl jetzt ungerade ist, $-s_f$ substituirt wird.

In den Summanden, aus denen die rechte Seite von (24) besteht, ist, wie oben bemerkt, der eine Factor ein Product, das aus dem Ausdruck $(s_1+1)(s_2+1)\ldots(s_n+1)$ hervorgeht, in dem auf alle möglichen Arten für eine gerade Anzahl von Zeigern die betreffende Grösse s_p durch die mit der negativen Einheit multiplicirte Grösse s_p ersetzt wird. Wendet man die vorgeschriebene Vertauschung auf alle Grössen s_f mit Ausnahme einer einzigen an, so ist die Vertauschung für eine gerade Anzahl von Grössen erfolgt. Dadurch geht der Inbegriff der erwähnten ersten Factoren nach dem obigen in sich selbst über. In jedem dieser Factoren giebt es, weil n gerade ist, eine gerade Anzahl einfacher Factoren von der Gestalt s_p+1 wie auch von der Gestalt $-s_q+1$. Das Product der einen wie der anderen einfachen Factoren möge ein Theilproduct genannt werden. Nimmt man jetzt mit der unter den s_f zuletzt gelassenen Grösse die Verwandlung in ihren negativen Werth vor, so ist die Wirkung nothwendig die, dass von den beiden Theilproducten das eine einen einfache Factor verliert, das andere einen Factor gewinnt. Es verwandelt sich also die rechte Seite von (24) in ein Aggregat, bei dem der erste Factor aus zwei Theilproducten besteht, deren jedes eine ungerade Anzahl von einfachen Factoren enthält.

Die zu untersuchende Determinante des Systems (29) geht aus $D(s_1, s_2, \ldots. s_n)$ hervor, in dem statt $s_a, s_b, \ldots. s_e$ die negative, statt s_f die positive Einheit eingesetzt wird. Nachdem also auf der rechten Seite von (24) $s_a, s_b, \ldots. s_e$ nicht geändert sind, s_f aber durch $-s_f$ ersetzt ist, kann man $s_1, s_2, \ldots. s_n$ gleich derselben Grösse s nehmen, und hat zu zeigen, dass der bezügliche Ausdruck, der bis auf einen von Null verschiedenen Factor durch die Substitution $s = -1$ in die Determinante des Systems (29) übergeht, verschwindet. Weil aber nach der angestellten Erörterung die rechte Seite von (24) gleich einem Aggregat von Summanden wird, deren erster Factor aus zwei Theilproducten von ungerader Anzahl einfacher Factoren gebildet ist, so geht durch die Annahme $s_1 = s_2 = \ldots s_n = s$ das erste oder zweite der beiden Theilproducte in einen Potenz von $(s+1)$ oder $(-s+1)$ von ungeradem Exponenten über. Weil aber die kleinste ungerade Zahl die Einheit selbst ist, so enthält jeder erste Factor den Ausdruck $(s+1)$ mindestens ein Mal. Deshalb ist der ganze Ausdruck durch $(s+1)$ theilbar, oder verschwindet für $s = -1$, wie behauptet worden war.

Die Voraussetzung, dass in dem System (29) nicht alle adjungirten Elemente verschwinden, muss aus dem oben angegebenen Grunde erfüllt sein, wenn die zuletzt betrachtete Function von s zwar durch $s+1$ aber nicht durch $(s+1)^2$ theilbar ist. Zunächst werde ich die Bedingung für das Eintreten dieses Umstandes für die Annahme ableiten, dass die Zeiger $a, b, \ldots. e$, welche ungeändert bleiben sollen, sich auf einen reduciren, und dass $a = 1$ sei. Das Zeichen f durchläuft alsdann die Reihe von Zahlen $2, 3, \ldots, n$. Man hat daher in $D(s_1, s_2, \ldots. s_n)$ die Grössen $s_2 \ldots s_n$ respective durch $-s_2 \ldots -s_n$ zu ersetzen, und hierauf

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = s$$

zu nehmen. Die resultirende Function von s ist dann gleich einem Aggregat, dessen Summanden durch $(s+1), (s+1)^3, \ldots$ aufgehen. Damit die Function nicht durch $(s+1)^2$ theilbar sei, darf der Factor von $(s+1)$ nicht verschwinden. Es zeigt sich aber, dass in demselben als Factor das Aggregat

$$(32) \qquad \lambda^2_{23\ldots n} + \lambda^2_{3\ldots n2} + \ldots + \lambda^2_{n23\ldots(n-1)} + \lambda^2_{123\ldots n}$$

enthalten ist, und daraus ist zu schliessen, dass die zu untersuchende Function von s niemals durch $(s+1)^2$ aufgehen kann, wenn nicht jede einzelne der obigen Grössen λ gleich Null wird.

Wenn, wie in dem allgemeinen Falle, ein beliebiger Complex von Zeigern $a, b, \dots e$ vorliegt, so gilt die gleiche Überlegung und man findet an der Stelle von (32) das folgende Aggregat

$$\lambda^2_{bc\dots e} + \dots + \lambda^2_{ab\dots d} + \sum_f \lambda^2_{fab\dots e}. \tag{33}$$

Die entsprechende Function von s kann dann niemals durch $(s+1)^2$ aufgehen, wenn nicht alle in (33) erscheinenden Grössen λ gleich Null sind. Diese fallen aber mit den in (31) angegebenen Grössen zusammen, welchen die in (30) enthaltenen Grössen $\rho_a^{a,b,\dots e}, \dots \rho_e^{a,b,\dots e}, \rho_f^{a,b,\dots e}$ proportional sind. Somit ist für jeden geraden Werth von n eine Gruppe von 2^{n-1} Punkten $(\rho_1^{a,b,\dots e}, \dots \rho_n^{a,b,\dots e})$, die der gestellten Aufgabe genügen, unzweifelhaft bestimmt.

Eine Forderung, welche dem von Schläfli formulirten Problem analog ist, und zu dem entwickelten Ergebniss führt, besteht darin, für das jedes Mal ausgewählte System von Zeigern zu verlangen, dass der Ausdruck

$$x_a y_a + \dots + x_e y_e - \Sigma_f x_f y_f \tag{34}$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht werde, während die Summe $x_1^2 + \dots + x_n^2$ ihren Werth nicht ändert, und der Ausdruck (34), durch die Summe $x_1^2 + \dots + x_n^2$ dividirt, den Werth Eins annimmt.

Die Aufgabe welche für jeden geraden Werth von n ausgesprochen und gelöst ist, erhält für den Fall $n = 2$ eine anschauliche Bedeutung, insofern die betrachtete Mannigfaltigkeit der zweiten Ordnung durch eine Ebene repräsentirt wird. Hier sind x_1, x_2 die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einem festen, ferner y_1, y_2 die rechtwinkligen Coordinaten desselben Punktes in einem beweglichen Coordinatensystem, das denselben Nullpunkt hat. Wird das zweite System in die Lage des ersten gedreht und jeder Punkt auf das erste System bezogen, so geht der Punkt (x_1, x_2) in den Punkt (y_1, y_2) über. Wenn nun der Punkt (y_1, y_2) durch eine der beiden Axen des festen Systems abgespiegelt wird, so entsteht als sein Spiegelbild respective der Punkt $(y_1, -y_2)$ oder der Punkt $(-y_1, y_2)$. Die oben gestellte Aufgabe fordert einen Punkt $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)})$, für welchen

$$\rho_1^{(1)} x_1 + \rho_2^{(1)} x_2 = \rho_1^{(1)} y_1 - \rho_2^{(1)} y_2$$

oder beziehungsweise einen Punkt $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)})$, für den

$$\rho_1^{(2)} x_1 + \rho_2^{(2)} x_2 = -\rho_1^{(2)} y_1 + \rho_2^{(2)} y_2$$

wird. Der von dem Nullpunkt nach dem Punkte $(\rho_1^{(1)}, \rho_2^{(1)})$ gezogene Strahl soll mit den nach den Punkten (x_1, x_2) und $(y_1, -y_2)$ gezogenen Strahlen gleiche Winkel, der nach dem Punkte $(\rho_1^{(2)}, \rho_2^{(2)})$ gezogene Strahl mit den nach den Punkten (x_1, x_2) und $(-y_1, y_2)$ gezogenen Strahlen gleiche Winkel bilden. Sowohl der eine wie auch der andere gesuchte Strahl ist daher eine Symmetrieaxe für die Lage des Punktes (x_1, x_2) in Bezug auf den Punkt, der aus (y_1, y_2) durch die eine oder die andere der bezeichneten Spiegelungen entstanden ist. Es tritt deshalb an die Stelle der Gruppe von Drehungsaxen für $n = 2$ eine Gruppe von zwei Symmetrieaxen, und für jeden beliebigen geraden Werth von n eine Gruppe von 2^{n-1} Axen, die als Symmetrieaxen aufgefasst werden können.

Bonn, d. 24. October 1899.