ÜBER DIE AUFLÖSBAREN GLEICHUNGEN VON DER FORM

$$x^5 + ux + v = 0$$

VON

C. RUNGE

in BERLIN.

Eine irreductible Gleichung von Primzahlgrad p ist dann und nur dann auflösbar, wenn, unter $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ eine gewisse Anordnung der Wurzeln verstanden, die Substitutionen ihrer Gruppe unter den folgenden enthalten sind:[1]

$$\begin{pmatrix} \xi_\lambda \\ \xi_{\alpha\lambda+\beta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha=1, 2, \ldots, p-1 \\ \beta=0, 1, \ldots, p-1 \end{pmatrix}$$

(wo der Index auf den kleinsten Rest modulo p zu reduciren ist), oder in der Ausdrucksweise von Herrn KRONECKER, wenn eine der »metacyklischen» Functionen rational ist.[2]

Um zu entscheiden, ob eine irreductible Gleichung von Primzahlgrad auflösbar ist oder nicht, hat man also die Gleichung aufzustellen, welcher irgend eine metacyklische Function genügt und zu untersuchen, ob dieselbe eine rationale Wurzel besitzt oder nicht.

Theoretisch ist es dabei völlig gleichgültig, welche metacyklische Function der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Es genügt, dass sie metacyklisch sei, d. h. dass sie bei den oben genannten Substitutionen ihren Werth nicht ändere, bei jeder andern Substitution dagegen in einen andern Werth übergehe.

---

[1] Vergl. SERRET: *Cours d'Algèbre supérieure,* Tome II, Sect. V, N° 588 u. 589.

[2] Vergl. Monatsberichte der Berliner Akademie, 3 März 1879, II., § 6.

Für die Gleichung fünften Grades genügt jede metacyklische Function einer Gleichung sechsten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades sind. Für eine besondere metacyklische Function hat bereits MALFATTI die entsprechende Gleichung sechsten Grades gebildet, ohne jedoch die wahre Bedeutung derselben zu kennen. Denn er bestritt die von RUFFINI behauptete Unauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades und konnte also nicht wissen, dass die von ihm gebildete Gleichung sechsten Grades das Kriterium der Auflösbarkeit liefert. [1]

MALFATTI's Rechnung ist einigermaassen weitläuftig. Ein kürzeres Verfahren hat JACOBI vorgeschlagen, [2] welches weiter unten angewendet werden soll.

Für die Gleichungen von der Form

$$x^5 + ux + v = 0$$

vereinfachen sich die Ausdrücke erheblich und hier gelingt es die folgenden beiden Resultate abzuleiten:

1. Beschränkt man u und v auf alle ganzzahligen Werthe, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als eine ganze positive Zahl n, wodurch man also $(2n + 1)^2$ Gleichungen erhält, so ist die Menge der auflösbaren unter ihnen für einen hinreichend grossen Werth von n gegen die ganze Anzahl beliebig klein.

2. u und v lassen sich als rationale Functionen zweier Parameter λ und μ dergestalt ausdrücken, dass durch Einsetzen irgend welcher rationalen Grössen für λ und μ immer eine auflösbare Gleichung entsteht und umgekehrt jede irreductible auflösbare Gleichung von der Form $x^5 + ux + v = 0$ durch Einsetzung zweier rationalen Grössen für λ und μ erhalten werden kann.

---

[1] Vergl. BRIOSCHI, Atti dell' Istituto Lombardo, IX, 1863, pag. 215—232.

[2] *Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes,* CRELLE's Journal, Bd. 13, und Gesammelte Werke, Bd. III, pag. 276.

I.

Versteht man unter x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die fünf Wurzeln der Gleichung fünften Grades, so ist

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0$$

eine zwölfwerthige Function. Denn sie bleibt bei den zehn Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\alpha\lambda+\beta} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha=1,4 \\ \beta=0,1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

und nur bei diesen ungeändert.

Die zwölf conjugirten Functionen gruppiren sich paarweise, so dass je zwei bei derselben Gruppe cyklischer Substitutionen ungeändert bleiben. So gehört zu

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0$$

diejenige conjugirte Function, welche aus ihr durch eine der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\alpha\lambda} \end{pmatrix} \qquad (\alpha=2,3)$$

hervorgeht, also

$$x_0x_2 + x_2x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_3x_0.$$

Es werde die erste mit y_1, die zweite mit y_2 bezeichnet. Beide bleiben bei denselben zehn Substitutionen ungeändert. Daher ist $y_1 - y_2$ ebenfalls eine zwölfwerthige Function. Hier sind die paarweise zusammengehörigen conjugirten Functionen einander entgegengesetzt.

Bei Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante $\sqrt{\Delta}$ bleiben nur 60 Substitutionen übrig, zu denen auch diejenigen gehören bei denen y_1 und y_2 ungeändert bleiben. Daher hat $y_1 - y_2$ nach Adjunction der Quadratwurzel aus der Discriminante nur sechs Werthe. Bezeichnet man dieselben mit $z_1, z_2, \ldots, z_6$, so sind $-z_1, -z_2, \ldots, -z_6$ die andern sechs conjugirten Werthe. Die Functionen $z_1, z_2, \ldots, z_6$ gehen nur durch solche Substitutionen in einander über, bei denen die Quadratwurzel aus der Discriminante ungeändert bleibt. Wendet man daher auf $z_1, z_2, \ldots, z_6$ irgend eine Substitution an, welche die Quadratwurzel aus der Discriminante in ihr Entgegengesetztes verwandelt, so müssen $z_1, z_2, \ldots, z_6$ in irgend einer Reihenfolge in $-z_1, -z_2, \ldots, -z_6$ übergehn.

Eine homogene symmetrische Function von $z_1, \ldots, z_6$ kann also bei irgend welchen Vertauschungen von $x_0, x_1, \ldots, x_4$ höchstens in ihr Entgegengesetztes übergehn und zwar auch nur dann, wenn ihre Dimension ungrade ist.

Sei

$$z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \ldots + a_6 = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_6$ sind, so müssen also a_2, a_4, a_6 ganze symmetrische Functionen von $x_0, x_1, \ldots, x_4$ sein, während a_1, a_3, a_5 sich nur durch einen ganzen symmetrischen Factor von $\sqrt{\Delta}$ unterscheiden können. Nun sind a_1, a_3, a_5 resp. von den Dimensionen 2, 6, 10, und $\sqrt{\Delta}$ von der 10. Dimension in $x_0, x_1, \ldots, x_4$. Also müssen a_1 und a_3 Null sein, während a_5 sich nur durch eine ganze Zahl von $\sqrt{\Delta}$ unterscheidet.

Die Gleichung hat mithin die folgende Form

$$z^6 + a_2 z^4 + a_4 z^2 + a_6 = m\sqrt{\Delta}\, z$$

(wo m eine ganze Zahl bedeutet und a_2, a_4, a_6 ganze ganzzahlige Functionen der Coefficienten der Gleichung fünften Grades sind). [1]

Beschränkt man sich auf die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0,$$

[1] In der oben angeführten Abhandlung von JACOBI, der diese Deduction entnommen ist, findet sich ein Fehler. Er bemerkt nicht, dass die Function

$$x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0$$

ausser bei den cyklischen Substitutionen $\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{\lambda+\beta} \end{pmatrix}$ noch bei den Substitutionen $\begin{pmatrix} x_\lambda \\ x_{4\lambda+\beta} \end{pmatrix}$ ungeändert bleibt und dass diese Eigenschaft für die Argumentation wesentlich ist.

An Stelle der cyklischen Function, welche er mit dem Symbol (12345) bezeichnet, ist eine solche zu setzen, die bei den genannten 10 Substitutionen ungeändert bleibt; alsdann sind seine Folgerungen richtig.

so sind a_2, a_4, a_6 ganze ganzzahlige Functionen von u und v. Da aber v von der fünften, u von der vierten Dimension ist, so folgt, dass

$$a_2 = m_1 u, \qquad a_4 = m_2 u^2, \qquad a_6 = m_3 u^3$$

(wo m_1, m_2, m_3 ganze Zahlen sind).

Um m_1, m_2, m_3, m zu finden, setze man $u = -1$, $v = 0$. Dann ist $\Delta = -4^4$ und $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, i, i^2, i^3, i^4$,

$$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 = -2i, -2i, -2i, -2i, 2+4i, -2+4i,$$

$$z^6 - m_1 z^4 + m_2 z^2 - m_3 \pm 16imz = (z+2i)^4(z^2 - 8iz - 20)$$
$$= z^6 + 20z^4 + 240z^2 - 320 + 512iz$$

und daher

$$(z^6 - m_1 z^4 + m_2 z^2 - m_3)^2 + 16^2 m^2 z^2 = (z^2+4)^4(z^4 + 24z^2 + 400).$$

Mithin wird die Gleichung für z, nachdem man durch Quadriren die Wurzel $\sqrt{\Delta}$ weggeschafft hat,

$$(z^6 - 20uz^4 + 240u^2z^2 + 320u^3)^2 = 4^5 \Delta z^2, \qquad \Delta = 4^4 u^5 + 5^5 v^4,$$

oder

$$(z^2 - 4u)^4(z^4 - 24uz^2 + 400u^2) = 4^5 \cdot 5^5 \cdot v^4 z^2.$$

Setzt man $\sigma = \frac{z^2}{4}$, so ist σ eine metacyklische Function und ihre Gleichung

$$(1) \qquad (\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)^2 = \Delta\sigma$$

oder in andrer Form

$$(2) \qquad (\sigma - u)^4(\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2) = 5^5 v^4 \sigma.$$

Nur für solche Werthe von u und v, für welche diese Gleichungen eine rationale Wurzel haben, kann die Gleichung $x^5 + ux + v = 0$ auflösbar sein, vorausgesetzt, dass sie nicht in Factoren zerfällt. Im letzteren Falle ist nicht nothwendig einer der sechs Werthe von σ rational, wie weiter unten an einem Beispiele gezeigt werden wird. Umgekehrt, wenn die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel ergeben, so kann man daraus noch nicht schliessen, dass $x^5 + ux + v = 0$ auflösbar ist.

Sondern es ist erforderlich, dass die rationale Wurzel eine einfache Wurzel sei. Nur unter dieser Voraussetzung ist die Function von $x_0, x_1, .., x_4$, welche diesen Werth annimmt, eine metacyklische. Denn im entgegengesetzten Falle bleibt sie bei noch anderen Substitutionen ausser den metacyklischen ungeändert. Untersuchen wir, welche Beziehung zwischen u und v bestehen muss, damit die Gleichungen (1) und (2) eine mehrfache Wurzel besitzen. In diesem Falle muss zugleich die Ableitung nach σ verschwinden. Es muss sein

$$2(3\sigma^2 - 10u\sigma + 15u^2)(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3) = \Delta\,.$$

Also wenn dieser Ausdruck für Δ in (1) eingesetzt wird

$$(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)$$
$$(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3 - 6\sigma^3 + 20u\sigma^2 - 30u^2\sigma) = 0$$

oder

$$-5(\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3)(\sigma - u)^3 = 0.$$

Es wäre also entweder

$$\sigma^3 - 5u\sigma^2 + 15u^2\sigma + 5u^3 = 0$$

oder

$$\sigma - u = 0.$$

Im ersten Falle folgt aus (1) $\Delta\sigma = 0$, also entweder $\Delta = 0$ oder $\sigma = 0$. Im zweiten Falle $\sigma - u = 0$ folgt aus (2) $v^4\sigma = 0$, also auch entweder $v = 0$ oder $\sigma = 0$ und daher $u = 0$.

Wir haben also drei Möglichkeiten $\Delta = 0$, $v = 0$, $\sigma = 0$. Die dritte reducirt sich auf die erste; denn soll $\sigma = 0$ eine mehrfache Wurzel sein, so muss in (1) sowohl das von σ unabhängige Glied als der Coefficient der ersten Potenz von σ verschwinden, also $u = 0$ und $\Delta = 0$ sein. Mithin können die Gleichungen (1) und (2) nur dann eine mehrfache Wurzel besitzen, wenn entweder $\Delta = 0$ oder $v = 0$ ist. In beiden Fällen ist die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0$$

reductibel.

Für irreductible Gleichungen ist es daher eine nothwendige und hinreichende Bedingung der Auflösbarkeit, dass die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen.

II.

Für den Fall ganzzahliger Werthe von u und v sollen nun die Gleichungen einer näheren Betrachtung unterworfen werden. Dann sind die Coefficienten der Gleichungen (1) und (2) ganze Zahlen und der Coefficient der höchsten Potenz von σ ist gleich 1. Daher ist jede rationale Wurzel nothwendig eine ganze Zahl.[1] Nach dieser Bemerkung ist es nicht schwer zu sehen, dass jedem ganzzahligen Werthe von u nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von v und jedem ganzzahligen Werthe von v nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u entspricht, für welche (1) und (2) eine rationale Wurzel erhalten können. Auszunehmen sind dabei nur die Werthe $u = 0$ und $v = 0$. Für diese erhalten (1) und (2) bei beliebigen rationalen Werthen von v resp. u immer eine rationale Wurzel.

Habe zunächst u einen bestimmten ganzzahligen von Null verschiedenen Werth. Soll ein ganzzahliger Werth von σ die Gleichungen (1) und (2) befriedigen, so muss dieser Werth ein Theiler des von σ unabhängigen Gliedes sein. Der Werth von σ, welcher diese beiden Gleichungen befriedigt, muss also ein Theiler von $25u^6$ sein. Das ergiebt eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe für σ. In Folge von (2) lässt sich nun v^4 rational durch σ und u ausdrücken. Wir erhalten also für v nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe, für welche σ rational sein kann.

Giebt man andrerseits v irgend einen von Null verschiedenen ganzzahligen Werth, so ergiebt sich durch eine ähnliche Schlussfolge nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u, für welche die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen können.

Es folgt zunächst aus (2), dass σ nothwendig positiv sein muss, weil $(\sigma - u)^4$, $\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2$ oder (was dasselbe ist) $(\sigma - 3u)^2 + 16u^2$ und v^4 positiv sind. Ferner muss $\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2$ ein Theiler von $5^5 v^4 \sigma$ sein. Mithin

$$\sigma^2 - 6\sigma u + 25u^2 < 5^5 v^4 \sigma$$

---

[1] Vergl. SERRET: *Cours d'Alg.*, Section I, Chap. VII, N:o 149.

oder

$$\sigma^2 - 6\sigma u < 5^4 v^4 \sigma$$

und daraus

$$\sigma - 6u < 5^4 v^4.$$

Andrerseits ist

$$(\sigma - 3u)^2 + 16u^2 \leq 5^5 v^4 \sigma$$

und daher

$$16u^2 < 5^5 v^4 \sigma.$$

Mithin

$$16u^2 < 5^{10} v^8 + 5^5 . 6 . v^4 u$$

oder

$$u(16u - 5^5 . 6 . v^4) < 5^{10} v^8.$$

Für negative Werthe von u sind beide Factoren der linken Seite gleichen Zeichens und daher der absolute Betrag eines jeden kleiner als $5^{10} v^8$. Für positive Werthe von u ergiebt sich

$$16u - 5^5 . 6 . v^4 < 5^{10} v^8$$

oder

$$16u < 5^{10} v^8 + 5^5 . 6 . v^4.$$

Auch hier kann es also nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von u geben, wofür (1) und (2) eine rationale Wurzel besitzen.

Untersuchen wir z. B. die Gleichung

$$x^5 + x + v = 0.$$

Eine rationale Wurzel von (1) und (2) müsste bei ganzzahligen Werthen von v ein positiver Theiler von 25 sein. Es bleiben also nur die Möglichkeiten $\sigma = 1, 5, 25$. Für dieselben hat $(\sigma - u)^4 (\sigma^2 - 6u\sigma + 25u^2)$ die Werthe $0, 4^5 . 5, 3^4 . 4^9 . 5^3$. Da diese Werthe durch $5^5 . \sigma$ theilbar sein müssen um ganzzahlige Werthe von v zu liefern, so ergiebt sich $\sigma = 1$, $v = 0$ allein als zulässig. $v = 0$ ist der einzige ganzzahlige Werth von v, wofür die Gleichungen (1) und (2) eine rationale Wurzel haben. Man bemerke zugleich, dass auch für solche ganzzahligen Werthe von v, für welche $x^5 + x + v$ reductibel ist, z. B. für $v = 2$, die Gleichungen (1) und (2) keine rationale Wurzel besitzen, dass also aus der Auflösbarkeit der Gleichung fünften Grades allein ohne die weitere Voraussetzung der Irreductibilität nicht auf die Rationalität einer der Werthe von σ geschlossen werden kann.

III.

Beschränkt man u und v auf alle ganzzahligen Werthe, deren absoluter Betrag nicht grösser ist als n, so erhält man $(2n + 1)^2$ Gleichungen. Von diesen sind zunächst alle diejenigen auflösbar, in denen $u = 0$ ist. Ihre Anzahl ist $2n + 1$, welche gegen $(2n + 1)^2$ mit wachsendem n verschwindet. Alle übrigen auflösbaren Gleichungen sind nach dem, was wir oben gesehn haben, jedenfalls nicht zahlreicher als die Anzahl aller Divisoren der Zahlen

$$25u^6 \qquad (u = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$$

vermehrt um die Anzahl aller reductibeln Gleichungen.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass auch diese Anzahl gegen $(2n + 1)^2$ für hinreichend grosse Werthe von n verschwindend klein ist.

Die Anzahl der positiven und negativen Divisoren einer Zahl μ

$$\mu = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \ldots p_\alpha^{\lambda_\alpha} \qquad (p_1, p_2, \ldots, p_\alpha \text{ Primzahlen})$$

ist gleich

$$2(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \ldots (\lambda_\alpha + 1)$$

und das Verhältniss dieser Anzahl zu der Zahl selbst demnach gleich

$$2 \cdot \frac{\lambda_1 + 1}{p_1^{\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2 + 1}{p_2^{\lambda_2}} \ldots \frac{\lambda_\alpha + 1}{p_\alpha^{\lambda_\alpha}}.$$

Diese Zahl ist, wenn λ die grösste der Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ und p die grösste der Zahlen $p_1, \ldots, p_\alpha$ bezeichnet, zugleich nicht grösser als

$$2 \cdot \frac{\lambda + 1}{2^\lambda} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \frac{2}{p}.$$

Denn hier sind alle Brüche ausser demjenigen, wo λ resp. p vorkommt, durch 1, d. h. den grössten Werth, welchen sie überhaupt annehmen können, ersetzt; der Bruch aber, wo λ resp. p vorkommt, ist ebenfalls durch seinen grössten Werth ersetzt, indem im ersten Falle der betreffende Primfactor gleich 2, im zweiten Falle der betreffende Exponent gleich 1 angenommen worden ist.

Lässt man nun μ sich unbegrenzt vergrössern, so können nicht λ und p zugleich unterhalb fester Grenzen bleiben. Denn da die Anzahl der Primzahlen, welche kleiner sind als p, sicherlich kleiner als p ist, so folgt, dass $\mu < p^{\lambda p}$. Nach Angabe irgend einer noch so grossen Zahl g braucht man also nur die Zahl μ grösser als g^{g^2} anzunehmen, um sicher zu sein, dass entweder λ oder p die Grenze g überschreitet. Mithin wird die Anzahl der Divisoren von μ mit wachsendem μ gegen μ unendlich klein; denn die beiden Zahlen

$$2\,.\,\frac{\lambda+1}{2^{\lambda}} \quad \text{und} \quad 2\,.\,\frac{2}{p}$$

werden für hinreichend grosse Werthe von λ resp. p beliebig klein.

Die Anzahl der Divisoren von μ wird auch noch gegen die m^{te} Wurzel aus μ unendlich klein.

Denn sei g eine Zahl so gross, dass sowohl $\frac{2}{\sqrt[m]{g}}$ als $\frac{g+1}{2^{\frac{g}{m}}}$ kleiner als 1 ist, so wird in

$$2\,.\,\frac{\lambda_1+1}{p_1^{\frac{\lambda_1}{m}}}\,.\,\frac{\lambda_2+1}{p_2^{\frac{\lambda_2}{m}}}\cdots\frac{\lambda_\alpha+1}{p_\alpha^{\frac{\lambda_\alpha}{m}}}$$

jeder Factor, in welchem entweder λ oder p grösser als g ist, kleiner als 1 sein. Bezeichnen wieder λ und p die grössten unter diesen Zahlen, so ist also das Product aller derjenigen Factoren, in denen entweder λ oder p grösser als g ist, zugleich unter den beiden Grenzen

$$2\,.\,\frac{\lambda+1}{2^{\frac{\lambda}{m}}} \quad \text{und} \quad 2\,.\,\frac{2}{p^{\frac{1}{m}}}$$

enthalten. Das Product der übrigen Factoren, in denen weder λ noch p grösser als g sind, liegt unterhalb einer von μ unabhängigen Grenze C, welche mit Hilfe von g bestimmt werden kann. Mithin ist das ganze Product zugleich kleiner als

$$2\,\frac{\lambda+1}{2^{\frac{\lambda}{m}}}\,.\,C \quad \text{und} \quad 2\,\frac{2}{p^{\frac{1}{m}}}\,.\,C.$$

Da nun mit wachsendem μ nicht zugleich λ und p unter einer festen Grenze bleiben, so wird eine dieser beiden Grössen beliebig klein. Also ist die Anzahl der Divisoren von μ auch gegen $\sqrt[m]{\mu}$ beliebig klein, sobald μ hinreichend gross gewählt wird.

Bezeichne nun $f(n)$ die grösste unter den Anzahlen der Divisoren der einzelnen Zahlen

$$25u^6, \qquad (u = \pm 1, \ldots, \pm n)$$

so wird also $f(n)$ für hinreichend grosse Werthe von n gegen $\sqrt[6]{25n^6}$ also auch gegen n beliebig klein. Die Anzahl aller Divisoren der Zahlen

$$25u^6 \qquad (u = \pm 1, \ldots, \pm n)$$

zusammengenommen ist offenbar nicht grösser als $2nf(n)$ also das Verhältniss zu $(2n + 1)^2$ kleiner als

$$\frac{f(n)}{2n+1}$$

und mithin für hinreichend grosse Werthe von n beliebig klein.

Es erübrigt nun nur noch zu zeigen dass auch die Anzahl der reductibeln Gleichungen unter den $(2n + 1)^2$ betrachteten mit wachsendem n gegen $(2n + 1)^2$ unendlich klein wird.

Zunächst erhält man für $v = 0$ $2n + 1$ reductible Gleichungen. Ihre Anzahl verschwindet gegen $(2n + 1)^2$. Die übrigen reductibeln Gleichungen haben entweder einen rationalen Factor ersten oder einen solchen zweiten Grades.

Ein Factor ersten Grades hat die Form $x - a$, wo a eine ganze Zahl ist. a muss ein Theiler von v sein, und durch a und v ist alsdann vermittelst der Gleichung $a^5 + ua + v = 0$ die Grösse u bestimmt. Einem bestimmten Werthe von v entsprechen mithin nicht mehr ganzzahlige Gleichungen mit einem Factor ersten Grades, als die Anzahl der Divisoren von v beträgt. Im Ganzen erhalten wir also nicht mehr Gleichungen als die Anzahl der Divisoren der Zahlen

$$v \qquad (v = \pm 1, \ldots, \pm n)$$

zusammengenommen beträgt.

Von den reductibeln Gleichungen, welche einen Factor zweiten Grades enthalten, gilt etwas Ähnliches. Für dieselben muss die symmetrische

Function zweier Wurzeln z. B. $\tau = x_1 + x_2$ mindestens einen rationalen Werth haben. τ genügt einer Gleichung 10^{ten} Grades von der Form

$$\tau^{10} + m_1 u\tau^6 + m_2 v\tau^5 + m_3 u^2\tau^2 + m_4 uv\tau + m_5 v^2 = 0.$$

$m_1, m_2, \ldots, m_5$ sind ganze Zahlen, von denen m_5 sicherlich von Null verschieden ist, wie man sogleich daran sieht, dass für $u = 0$, $v = -1$ keiner der Werthe von τ gleich Null ist. Setzt man $u = -1$, $v = 0$, so werden die Werthe von τ gleich $0, 0, \pm 1, \pm i, \pm(1 + i), \pm(1 - i)$.

Das ergiebt die Gleichung

$$\begin{aligned}\tau^2(\tau^2 - 1)(\tau^2 + 1)(\tau^2 + 2i)(\tau^2 - 2i) &= \tau^2(\tau^4 - 1)(\tau^4 + 4)\\ &= \tau^{10} + 3\tau^6 - 4\tau^2,\end{aligned}$$

also $m_1 = -3$, $m_3 = -4$.

Soll nun für irgend welche ganzzahligen Werthe von u und v ein Factor zweiten Grades existiren, so muss jene Gleichung für τ eine ganzzahlige Wurzel besitzen. Dieselbe muss ein Divisor von $m_5 v^2$ sein. Setzt man für τ die sämmtlichen Divisoren von $m_5 v^2$ ein, so resultirt eine Anzahl Gleichungen, welche nicht identisch in u befriedigt werden, wenn wir von dem Fall $\tau = 0$, $v = 0$ absehn. Dieselben liefern uns für je einen Werth von τ höchstens zwei Werthe von u. Für einen gegebenen Werth von v giebt es also jedenfalls nicht mehr Gleichungen mit einem Factor zweiten Grades als die doppelte Anzahl der Divisoren von $m_5 v^2$ beträgt.

Im Ganzen erhalten wir demnach nicht mehr Gleichungen mit Factoren zweiten Grades als die doppelte Anzahl der Divisoren der Zahlen

$$m_5 v^2 \qquad\qquad (v = \pm 1, \ldots, \pm n)$$

beträgt.

Nach dem Früheren werden also auch die Anzahlen der Gleichungen mit Factoren ersten und zweiten Grades gegen $(2n + 1)^2$ beliebig klein und es gilt mithin der Satz:

Die Anzahl der unter den $(2n + 1)^2$ Gleichungen

$$x^5 + ux + v = 0 \qquad\qquad \begin{pmatrix} u = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \\ v = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \end{pmatrix}$$

enthaltenen auflösbaren Gleichungen ist für hinreichend grosses n gegen die Gesammtanzahl verschwindend klein.

IV.

Der Zusammenhang von σ, u, v, welcher durch die Gleichung (1) oder (2) constituirt wird, lässt sich auch dadurch ausdrücken, dass man die drei Grössen als Functionen zweier Parameter λ und μ darstellt. Es ist nun möglich für λ und μ zwei rationale Functionen von σ, u und v zu wählen und zwar dergestalt, dass σ, u, v rationale Functionen von λ und μ werden. Sobald also σ, u und v rational sind, so werden auch λ und μ rational sein und umgekehrt. Führt man nun die Ausdrücke von u und v durch λ und μ in die Gleichung

$$x^5 + ux + v = 0$$

ein, so erhält man also den allgemeinen Ausdruck der auflösbaren Gleichungen von dieser Form, abgesehn von denjenigen, welche reductibel sind und zugleich keine rationale metacyklische Function besitzen.

Dividirt man beide Seiten der Gleichung (2) durch u^6 und setzt $\frac{\sigma}{u} = \sigma'$, $\frac{v}{u} = v'$, so ergiebt sich:

$$(\sigma' - 1)^4(\sigma'^2 - 6\sigma' + 25) = 5^5 \frac{v'^4\sigma'}{u}$$

oder

$$u = \frac{5^5 v'^4 \sigma'}{(\sigma' - 1)^4(\sigma'^2 - 6\sigma' + 25)}.$$

Da $v = v'u$, $\sigma = \sigma' u$, so erkennt man, dass σ, u und v durch v' und σ' und zugleich v' und σ' durch σ, u und v rationa ausdrückbar sind.

Die Ausdrücke vereinfachen sich noch ein wenig, wenn wir λ und μ nicht direct gleich σ' und v' setzen. Es sei

$$\lambda = \frac{\sigma' - 3}{4}, \qquad \mu = \frac{5v'}{2(\sigma' - 1)},$$

also

$$\lambda = \frac{\sigma - 3u}{4u}, \qquad \mu = \frac{5v}{2(\sigma - u)}.$$

Dann ist

$$u = \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}, \qquad v = \frac{4\mu^5(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}, \qquad \sigma = \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)^2}{\lambda^2 + 1}.$$

Wir haben mithin das folgende Resultat:

Giebt man λ und μ irgend zwei Werthe irgend eines Rationalitätsbereiches, [1] so ist

$$x^5 + \frac{5\mu^4(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}x + \frac{4\mu^5(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1} = 0$$

oder auch

$$\left(\frac{x}{\mu}\right)^5 + \frac{5(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1}\left(\frac{x}{\mu}\right) + 4\frac{(2\lambda + 1)(4\lambda + 3)}{\lambda^2 + 1} = 0$$

eine für diesen Rationalitätsbereich auflösbare Gleichung. Und umgekehrt ist jede *irreductible* auflösbare Gleichung von der Form $x^5 + ux + v = 0$ aus jenem Ausdrucke dadurch ableitbar, dass man für λ und μ zwei Grössen des betreffenden Rationalitätsbereichs einsetzt, nämlich die beiden Grössen

$$\frac{\sigma - 3u}{4u}, \qquad \frac{5v}{2(\sigma - u)}.$$

Auszunehmen sind nur diejenigen Gleichungen, für welche diese beiden Ausdrücke keine bestimmten Werthe von λ und μ liefern. Das kann nur sein, wenn entweder $u = 0$ oder $\sigma - u = 0$. Im letzteren Falle folgt aus (2), dass auch $v^4\sigma$ gleich Null ist. Wenn eine irreductible Gleichung vorliegt, so ist $v \gtrless 0$ mithin nothwendig $\sigma = 0$ und daher auch $u = 0$. In dem obigen Ausdrucke sind also alle irreductibeln Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$ enthalten mit Ausnahme derjenigen, in denen $u = 0$ ist. Ferner sind in demselben auch reductible Gleichungen enthalten, aber nur diejenigen, für welche einer der Werthe von σ rational ist.

---

[1] Vergl. über diesen Begriff KRONECKER: *Grundzüge* etc. § 1, CRELLE's Journal, Bd. 92.