EINE BEMERKUNG ÜBER DIVISORENSUMMEN

VON

M. A. STERN

in BERN.

Die Formel, welche Herr ZELLER in den Acta mathematica Band 4, p. 415 bekannt gemacht hat, beruht auf den zwei bekannten Gleichungen

$$(A) \qquad 1 + (1)x + (2)x^2 \ldots + (n-1)x^{n-1} \ldots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$$

und

$$(B) \qquad \int 1 + \int 2 . x \ldots + \int n . x^{n-1} \ldots = \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 \ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}.$$

Indem man die zweite Gleichung durch die erste dividirt erhält man

$$\int 1 + \int 2 . x \ldots + \int n . x^{n-1} + \ldots$$
$$= [1 + (1)x + (2)x^2 \ldots + (n-1)x^{n-1} \ldots][1 + 2x - 5x^4 \ldots]$$

woraus sich die ZELLER'sche Formel

$$\int n = 1(n-1) + 2(n-2) \ldots$$

unmittelbar ergiebt. Nach EULER's Formel

$$(B') \qquad \int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) \ldots$$

kann man also auch schreiben

$$(C) \qquad \int (n-1) + \int (n-2) \ldots = 1(n-1) + 2(n-2) \ldots$$

Acta mathematica. 6. Imprimé 5 Janvier 1885.

Hier bedeutet (n) die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur Summe n aus den Elementen 1, 2, ..., n und die Formel (C) giebt einen Zusammenhang zwischen diesen Combinationen und der Summe der Divisoren. Einen anderen solchen Zusammenhang habe ich schon früher in dem CRELLE'schen Journal für die Mathematik Band 21, p. 183 abgeleitet.

Man kann aber auch eine der Formel (C) ganz analoge Formel finden, welche einen Zusammenhang zwischen der Summe der Divisoren und der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung angiebt. Bezeichnet man durch $N(n)$. die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung zur Summe n aus den Elementen 1, 2, ..., n, so hat man

$$1 + N(1)x + N(2)x^2 \dots + N(n)x^n + \dots = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \dots$$

wofür man

$$1 + N(1)x + N(2)x^2 \dots + N(n)x^n + \dots = \frac{(1 - x^2)(1 - x^4)(1 - x^6) \dots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots}$$

schreiben kann. Aus der Verbindung dieser letzten Gleichung mit der Gleichung (B) folgt

$$\left(\int 1 + \int 2 . x \dots + \int n . x^{n-1} \dots\right)(1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} \dots)$$
$$= (1 + N(1)x + N(2)x^2 + \dots)(1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 \dots)$$

und hieraus

$$\text{(D)} \quad \int n - \int(n - 2) - \int(n - 4) + \int(n - 10) + \int(n - 14) \dots$$
$$= N(n - 1) + 2N(n - 2) - 5N(n - 5) - 7N(n - 7) \dots$$

Hierbei ist zu beachten, dass nun $\int(n - n)$ den Werth Null hat und nicht, wie in (C), den Werth n; statt $N(n - n)$ ist die Einheit zu nehmen. Setzt man in (D) statt $\int n$ seinen Werth aus (B') so folgt

$$N(n - 1) + 2N(n - 2) - 5N(n - 5) \dots$$
$$= \int(n - 1) - \int(n - 4) - \int(n - 5) - \int(n - 7) + \int(n - 12) + \int(n - 15) \dots$$
$$+ \int(n - 2 . 5) + \int(n - 2 . 7) - \int(n - 2 . 12) - \int(n - 2 . 15) \dots$$