SUR LES SURFACES POSSÉDANT LES MÊMES PLANS DE SYMÉTRIE QUE L'UN DES POLYÈDRES RÉGULIERS[1]

PAR

L. LECORNU

à CAEN.

Première partie. Théorie générale.

1. Pour former l'équation générale des surfaces qui jouissent d'une symétrie déterminée, on peut employer une méthode synthétique dont voici le principe. Prenons un système quelconque de coordonnées ponctuelles, et soient α, β, γ les valeurs de ces coordonnées pour un point arbitrairement choisi. Imaginons que, par un moyen ou un autre, on soit parvenu à trouver trois fonctions L, M, N de α, β, γ, qui demeurent invariables lorsqu'on passe du point considéré à tout autre point déduit de celui-là d'après la symétrie considérée. Les surfaces $L =$ *Constante*, $M =$ *Constante*, $N =$ *Constante*, jouissent évidemment de cette symétrie, et il en est de même de toute surface, ou tout groupe de surfaces, représenté par l'équation $\varphi(L, M, N) = 0$, φ étant une fonction quelconque. Inversement, si α, β, γ peuvent s'exprimer en fonction de

[1] Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 27 Décembre 1886, a bien voulu décerner une mention honorable. Le début a été légèrement remanié, en vue de préciser la portée de la méthode.

L, M, N, l'équation $\varphi = 0$ comprend toutes les surfaces répondant à la question; car, d'après l'hypothèse même que nous faisons, n'importe quelle surface peut se représenter par l'équation $\varphi = 0$, et ceci s'applique en particulier aux surfaces cherchées. Mais en général, si la fonction φ est choisie au hasard, l'équation $\varphi = 0$ ne représente pas une surface unique; elle fournit un certain nombre de surfaces dont chacune, prise isolément, est dépourvue de la symétrie demandée, et qui, par leur réunion, composent un ou plusieurs *groupes* symétriques. Le caractère propre des surfaces symétriques consiste en ce que chacune d'elles remplace à elle seule un de ces groupes. Pour éclaircir ceci par un exemple simple, supposons qu'on cherche, dans un plan, les courbes symétriques par rapport à deux axes rectangulaires ox, oy. En prenant $x^4+y^4=2L$, $x^4 - y^4 = 2M$, on a deux fonctions L et M qui ne sont pas altérées par le changement de signe des variables, et l'on est conduit à représenter les courbes cherchées par l'équation $\varphi(x^4 + y^4, x^4 - y^4) = 0$. Si l'on veut mettre sous cette forme la droite $y = mx$, on trouve

$$(x^4 + y^4)(1 - m^4) - (x^4 - y^4)(1 + m^4) = 0.$$

C'est un groupe de quatre droites, comprenant la droite considérée. S'il s'agit de la conique $Ax^2 + By^2 = 1$, l'équation $\varphi = 0$ devient:

$$(A^2x^4 - B^2y^4)^2 - 2A^2x^4 - 2B^2y^4 + 1 = 0.$$

Elle représente alors les quatre coniques $\pm Ax^2 \pm By^2 = 1$, parmi lesquelles figure la conique donnée, et dont chacune possède séparément la symétrie voulue.

Si les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont un nombre de points communs exactement égal au minimum exigé par la symétrie, toute surface algébrique symétrique peut se représenter isolément par une équation $\varphi(L, M, N) = 0$, entière en L, M, N. Ce théorème fondamental s'établit de la manière suivante. Soient:

$$L = f_1(x, y, z) \tag{1}$$

$$M = f_2(x, y, z) \tag{2}$$

$$N = f_3(x, y, z) \tag{3}$$

les valeurs de L, M, N, en coordonnées cartésiennes, et soit:

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface algébrique symétrique. Nous supposons que f_1, f_2, f_3, F sont des fonctions entières. L'équation:

$$F(x, y, z) = h \tag{4}$$

où h est une constante arbitraire, représente une surface également symétrique. Entre les équations (1), (2), (3) et (4), éliminons x, y, z. Nous parvenons à une équation entière $\Psi(L, M, N, h) = 0$, exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre équations admettent un système de solutions communes. Je dis que Ψ est du premier degré en h; en effet, par hypothèse, les équations (1), (2), (3) n'ont pas d'autres solutions communes que celles qui résultent de la symétrie, et toutes ces solutions donnent à h la même valeur; il n'y a donc qu'une seule valeur de h compatible avec les valeurs attribuées à L, M, N. Ceci posé l'équation $\Psi = 0$ peut s'écrire $h = \dfrac{\varphi(L, M, N)}{\omega(L, M, N)}$, φ et ω étant deux fonctions entières; et, par suite, l'équation $F = 0$ équivaut, au moins pour les points à distance finie, à $\varphi(L, M, N) = 0$, ce qui démontre la proposition. [1]

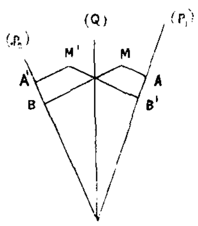
2. Nous sommes ainsi conduits à la recherche des fonctions L, M, N, que nous désignerons désormais sous le nom *d'éléments symétriques*. Comme tous les plans de symétrie d'un polyèdre régulier passent par un même point (qu'on peut appeler *l'origine* du système), le carré de la distance d'un point quelconque à celui-là fournit un premier élément, auquel nous donnerons le nom *d'élément sphérique* et que nous représenterons par L. En coordonnées rectangulaires, $L = x^2 + y^2 + z^2$. Nous entendrons par *sphère centrale* une sphère ayant son centre à l'origine. Pour former les autres éléments, considérons un système de plans P_1, P_2, $\ldots$, P_k passant par l'origine et formant une figure douée de la symétrie voulue. Supposons qu'aucun d'eux ne coïncide avec les plans de symétrie, et soit Q l'un de ces derniers. Les plans P sont groupés sy-

---

[1] Ce théorème ne figurait pas dans le mémoire présenté à l'Académie des sciences.

métriquement de part et d'autre du plan Q. Si P_1 et P_2 se correspondent de cette façon, les trois plans P_1, P_2, Q se coupent suivant une même droite qui dans la figure 1, est placée perpendiculairement au plan du tableau.

Fig. 1.



Soit M un point quelconque, soit M' son symétrique par rapport à Q. En abaissant les perpendiculaires MA, MB, $M'A'$, $M'B'$ sur P_1 et P_2, on a, en grandeur absolue:

$$MA \times MB = M'A' \times M'B'.$$

Cette relation est également vraie en signe: car, si M et M' sont de même côté par rapport à P_1, ils sont aussi de même côté par rapport à P_2 et alors MA est de même signe que $M'B'$; MB, de même signe que $M'A'$. Si au contraire M et M' sont de côtés différents par rapport à P_1, ils sont aussi de côtés différents par rapport à P_2 et, dans ce cas, MA et $M'B'$ sont de signes contraires, ainsi que MB et $M'A'$.

Si donc on forme le produit des distances du point M à tous les plans P, ce produit conserve même grandeur et même signe quand on remplace M par son symétrique relatif à Q. La même chose a lieu quel que soit le plan de symétrie Q. Par conséquent: *le produit des distances d'un point quelconque aux plans P est un élément symétrique.* Par suite, il suffira de chercher les deux systèmes les plus simples de plans P et de former les produits correspondants, pour avoir les deux nouveaux éléments M et N dont nous avons besoin.

Nous avons admis que le système des plans P ne comprenait pas de plans de symétrie. Cette restriction est nécessaire, car on voit sans peine que, si le plan de symétrie Q fait partie des plans P, le produit des distances à ces plans change de signe quand on substitue à un point son symétrique par rapport à Q. Mais on éviterait ce changement de signe en considérant le plan Q comme représentant deux plans P confondus, et introduisant par suite le carré de la distance au plan Q.

Il est aisé de fixer une limite inférieure de la somme des degrés m et n des éléments M et N, exprimés en coordonnées cartésiennes. En effet, ces deux éléments, joints à l'élément sphérique $L = x^2 + y^2 + z^2$, doivent former un système indépendant, autrement dit, on ne doit pas avoir, identiquement:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut toujours s'assurer que ceci n'est pas une identité, et l'équation précédente représente alors la surface, lieu des points pour lesquels les trois surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ ont des plans tangents passant par une même droite. Le lieu est un cone de degré $m + n - 1$, ayant son sommet à l'origine, et comprenant tous les plans de symétrie, puisqu'en un point quelconque de l'un de ces plans les plans tangents aux trois surfaces passent évidemment par la normale au plan.

Il résulte de là que le nombre $m + n - 1$ est au moins égal à celui des plans de symétrie. S'il lui est exactement égal, le cone dont il s'agit se réduit aux plans de symétrie, et, en dehors de ces plans, les trois systèmes de surfaces $L = Const.$, $M = Const.$, $N = Const.$ sont aptes à constituer un système de coordonnées.

Pour chaque type de symétrie, il y a deux éléments non sphériques, M et N, de degrés minima, nous les appellerons les *éléments simples.* On peut appeler éléments complexes les éléments symétriques qui ne sont ni sphériques, ni simples.

3. Une surface est dite *élémentaire* quand son équation dépend d'un seul élément, simple ou complexe. Cette équation est donc de la forme $M = Const.$, ..., et elle exprime que le produit des distances de chacun des points de la surface à K plans fixes concourants P_1, P_2, P_3, ..., P_k est constant. Une telle surface possède un certain nombre de propriétés, indépendantes de la disposition symétrique des K plans, et que nous nous bornerons à énoncer. Elle est asymptotique aux K plans. Pour construire sa normale en un point, il suffit d'abaisser de ce point les perpendiculaires sur les plans asymptotiques, et de les limiter à leur point de rencontre avec un plan mené par l'origine perpendiculairement au rayon vecteur du point considéré. La résultante géométrique des K

droites ainsi obtenues donne la direction de la normale. Le produit des distances interceptées, à partir d'un point de la surface, sur une droite de direction arbitraire, mais fixe, par les plans asymptotiques, a une valeur constante. On en conclut que tout point M de la surface est un point central pour le système de points déterminé par les plans asymptotiques sur une tangente quelconque de la surface au point M. On en conclut aussi que les directions asymptotiques sont imaginaires, et par suite que les deux courbures d'une surface élémentaire sont toujours de même sens. Ceci reste vrai lors même que les plans P ne sont pas concourants, par exemple lorsque ce sont les faces d'un polyèdre régulier.

La transformée d'une surface élémentaire par polaires réciproques, relativement à une sphère ayant son centre à l'origine, peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan qui intercepte sur K droites fixes concourantes (les normales aux plans asymptotiques) à partir de leur point de rencontre, K longueurs dont le produit soit constant. Chaque plan tangent à la surface réciproque la touche au centre de gravité du système de points déterminé par ses intersections avec les K droites fixes. Les directions principales sont les axes d'inertie principaux de ce même système. La somme des rayons de courbure principaux varie en raison inverse de la distance du plan tangent à l'origine, et en raison directe du moment d'inertie du système des points d'intersection, par rapport à la normale.

4. Les courbes résultant de l'intersection des surfaces élémentaires symétriques avec les sphères centrales présentent une importance particulière; nous leur donnerons le nom de *sphérosymétriques*. Les sphérosymétriques provenant des surfaces élémentaires d'une même famille, et placées sur un même cone central, sont évidemment homothétiques; on peut aussi les déduire les unes des autres au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans la transformation par polaires réciproques relativement à une sphère centrale les points d'une sphérosymétrique ont pour correspondants les plans tangents à une sphère le long d'une sphérosymétrique homothétique à la première. Ces plans enveloppent une développable symétrique, circonscrite à la fois à une sphère et à la réciproque de la surface élémentaire qui contient la sphérosymétrique. D'après ce qui a été dit à l'article précédent, la ligne de contact de la développable avec la surface réciproque est une courbe le long de laquelle la somme des rayons de courbure principaux de la développable varie proportionnellement au moment d'inertie, par rapport à la normale, du système de points formé par les intersections du plan tangent avec les normales à l'origine aux plans asymptotiques. Les lignes de courbure de la développable sont sphériques, et, comme elles résultent de l'intersection de deux surfaces (la développable et la sphère) douées de la même symétrie, elles partagent évidemment cette symétrie. L'arête de rebroussement est, d'après un théorème bien connu, ligne géodésique d'un cone central; cette arête, et le cone lui-même, jouissent aussi de la symétrie considérée.

Si n est le degré de la surface élémentaire, les sphérosymétriques correspondantes sont du degré $2n$. D'après les formules connues [1] la développable formée par les plans tangents à la sphère le long d'une sphérosymétrique est caractérisée par les données suivantes:

Classe (nombre de plans tangents passant par un point donné) $\nu = 2n$

Rang (degré de la développable) . . . . $r = 2n^2$

Nombre de plans stationnaires. . . . . $\alpha = 0$

et la connaissance de ces données suffit pour déterminer tous les autres éléments de la surface. Sans insister sur ces détails, voyons seulement quelle est l'influence de la symétrie supposée. Les génératrices de la développable rencontrent à angle droit la sphérosymétrique le long de laquelle elles touchent une même sphère. D'ailleurs, chaque plan de symétrie coupe orthogonalement cette sphérosymétrique en $2n$ points, situés sur une circonférence. Par chacun d'eux passe une génératrice située dans le plan de symétrie, et tangente à la circonférence. On a ainsi $2n$ droites d'intersection du plan de symétrie avec la développable. La section, étant du degré $2n^2$ comprend, en dehors de ces $2n$ droites, une courbe d'ordre $2n(n-1)$. Le long de cette courbe, la développable ne peut rencontrer normalement le plan de symétrie, sans quoi elle se réduirait à un cylindre. Nous avons donc en réalité affaire à une ligne double de la développable: son degré est seulement $n(n-1)$. Elle possède un point de rebroussement en chacun des points où elle rencontre l'arête de rebroussement. Il est facile d'en calculer le nombre. En effet le degré m de l'arête est égal à $3(r-\nu)$ ou à $6n(n-1)$. Chacune des $2n$ génératrices situées dans le plan de symétrie est tangente à l'arête

[1] Voir notamment le *Traité de géométrie analytique* de SALMON.

de rebroussement; par raison de symétrie, elle touche évidemment celle-ci en un point de rebroussement. L'arête de rebroussement possède ainsi $2n$ points de rebroussement dans chaque plan de symétrie. Chacun de ces points correspond à trois points de rencontre de l'arête avec le plan de symétrie. Il reste donc dans le même plan, $6n(n-1)-6n=6n(n-2)$ points de rencontre, qui sont situés sur la ligne double et se réduisent ainsi à $3n(n-2)$ points distincts; tel est le nombre des points de rebroussement de la section, déterminée par le plan de symétrie. Par exemple, pour $n=3$, la section est une sextique ayant 9 points de rebroussement.

Considérons maintenant un plan sécant quelconque P. Il coupe la surface développable qui nous occupe suivant une courbe d'ordre $2n^2$. Sa trace sur un plan de symétrie rencontre la ligne double contenue dans celui-ci en $n(n-1)$ points qui sont des points doubles de la section faite par ce plan P. Si p est le nombre des plans de symétrie, on connait ainsi $pn(n-1)$ points doubles. Mais, d'après les formules générales, le nombre des points doubles doit être égal à $\frac{1}{2}r(r-2)-\frac{4}{3}m$ ou bien $2n^2(n^2-1)-8n(n-1)$. Si donc p est inférieur à

$$\frac{2n^2(n^2-1)-8n(n-1)}{n(n-1)}$$

c'est à dire à $2(n^2+n-4)$, la surface développable possède des lignes doubles en dehors des plans de symétrie; on s'assure facilement que tel est toujours le cas. Outre les $2n(n^3-5n+4)$ points doubles qui viennent d'être indiqués, la section possède $6n(n-1)$ points de rebroussement situés sur l'arête de rebroussement.

On peut également étudier la surface développable formée par les tangentes à une sphérosymétrique. Son degré r est le même que celui de la réciproque de cette courbe, c'est à dire $2n^2$. L'arête de rebroussement est du degré $m=2n$, et elle n'a généralement pas de points doubles. Ici, les plans de symétrie ne contiennent pas de génératrices, et rencontrent la surface suivant des courbes d'ordre n^2. Le nombre des points doubles d'une section quelconque est $4n^2(n^2-2)$. pn^2 de ces points sont, comme précédemment, dans les plans de symétrie, et, comme p se trouve toujours inférieur à $4(n^2-2)$, il y a nécessairement des lignes doubles en dehors des plans de symétrie.

5. Nous entendons par *surfaces binaires* celles qui dépendent de deux éléments seulement, y compris l'élément sphérique. Leur équation est donc de la forme

$$F(L,\ M) = 0 \tag{1}$$

L étant l'élément sphérique $x^2 + y^2 + z^2$, et M, l'élément d'ordre m, égal au produit des distances du point x, y, z aux plans P_1, P_2, ..., P_m. Nous admettrons que ces plans sont distincts, et nous les appellerons *plans directeurs*. Toute surface élémentaire $M = Const.$ coupe la surface binaire considérée suivant une ou plusieurs courbes sphériques, qui sont des sphérosymétriques d'ordre $2m$. En écrivant que l'équation (1), considérée comme équation en M, a une racine double, on obtient certaines valeurs de L, déterminant les sphérosymétriques le long de chacune desquelles la surface binaire est touchée par une surface élémentaire. En faisant $M = 0$, on obtient une équation en L déterminant les rayons de diverses sphères qui coupent chacune la surface suivant m cercles situés dans les plans directeurs; nous les appellerons les *sphères directrices*. Chacune d'elles est touchée par la surface aux $m(m - 1)$ points où elle est rencontrée par les arêtes d'intersection des plans directeurs pris deux à deux. S'il y a p sphères directrices, chaque plan directeur coupe la surface suivant p cercles, et la surface possède ainsi pm cercles.

L'équation homogène $M^2 - AL^m = 0$, où A est une constante, représente un cone central d'ordre $2m$. Ce cone rencontre la surface suivant des sphérosymétriques situées sur les sphères déterminées par l'équation

$$F(L,\ L^{\frac{m}{2}}\sqrt{A}) = 0. \tag{2}$$

Si l'on choisit A de telle façon que cette équation en L ait une racine double λ, le cone central touche la surface le long d'une sphérosymétrique située sur la sphère $L = \lambda$. Cette sphère coupe orthogonalement la surface binaire, qui admet par suite comme ligne de courbure la sphérosymétrique d'intersection.

Supposons en particulier que la surface soit algébrique, et que l'élément M entre au premier degré dans son équation, que nous écrirons alors:

$$M = \frac{\varphi(L)}{\psi(L)}, \tag{3}$$

φ et ψ étant des polynômes de degrés p et q, sans racines communes. Les p sphères directrices ont pour rayons les racines carrées des racines de $\varphi(L) = 0$. Les q sphères $\psi(L) = 0$ ne peuvent rencontrer la surface qu'à l'infini, et n'ont avec celle-ci aucun point réel commun. Si donc elles sont réelles, elles partagent l'espace en régions telles que la surface ne peut passer réellement de l'une dans l'autre. L'équation (2) prend ici la forme:

$$\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi(L) - \varphi(L) = 0.$$

Pour une racine double L, on a:

$$\frac{m}{2}\sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}-1} \psi(L) + \sqrt{A}\, L^{\frac{m}{2}} \psi'(L) - \varphi'(L) = 0,$$

d'où, en éliminant A:

$$\frac{m}{2}\varphi(L)\psi(L) + L\psi'(L)\varphi(L) - L\varphi'(L)\psi(L) = 0, \tag{4}$$

équation qui est généralement du degré $p + q$ en L. Par conséquent il y a $p + q$ sphères centrales orthogonales à la surface binaire représentée par l'équation (3).

Un cas très important est celui où $\psi(L)$ se réduit à une constante. On a alors $M = \varphi(L)$, et la surface est le lieu des points dont le produit des puissances par rapport à p sphères concentriques est proportionnel au produit des distances à m plans concourant au centre de ces sphères. Pour chaque type de symétrie, la surface générale du degré le plus bas possible est représentée par une équation de cette nature. Car, si M est l'élément non sphérique le plus simple relatif à la symétrie considérée, en prenant pour $\varphi(L)$ un polynôme de degré égal au plus grand entier contenu dans $\frac{m}{2}$ on obtient évidemment la surface de degré minimum. Pour étudier ce cas, il suffit de supposer $q = 0$, et alors on voit que le nombre des sphères orthogonales est précisément égal au nombre des sphères directrices. De plus, l'équation (4) se réduit à:

$$(5) \qquad m\varphi(L) - 2L\varphi'(L) = 0.$$

Cette équation est en général du degré p, et ses racines sont entièrement déterminées par celles de $\varphi(L)$. On voit donc que:

Les surfaces $M = C\varphi(L)$, où M est un élément symétrique d'ordre m, C une constante arbitraire et $\varphi(L)$ un polynôme de degré p en L, forment un faisceau contenant mp cercles fixes, situés à l'intersection des m plans directeurs avec les p sphères directrices; ce faisceau coupe orthogonalement p sphères fixes, concentriques aux premières.

Il y a cependant une exception lorsque le degré de l'équation (5) se trouve abaissé au dessous de p. Cette circonstance se produit si $m = 2p$, c'est-à-dire si le nombre des plans directeurs est égal à deux fois celui des sphères directrices. Alors les sphères orthogonales sont au nombre de $p - 1$ seulement; la dernière est rejetée à l'infini.

Quand il y a deux sphères directrices confondues en une seule, $\varphi(L) = 0$ et $\varphi'(L) = 0$ ont une racine commune, qui vérifie l'équation (5). La sphère directrice est donc dans ce cas orthogonale à la surface, et, comme elle doit généralement toucher la surface en $m(m-1)$ points, il en résulte que la surface possède, sur cette sphère, $m(m-1)$ points où le plan tangent est indéterminé: c'est-à-dire $m(m-1)$ points nodaux.

6. Toute surface symétrique dont l'équation peut se mettre sous la forme:

$$f = \varphi(M, N, L) + \psi(L) = 0,$$

(φ désignant une fonction homogène des trois éléments symétriques, et ψ, une fonction de l'élément sphérique dont le degré par rapport aux coordonnées soit inférieur à celui de φ), jouit également de la propriété de rencontrer orthogonalement un certain nombre de sphères centrales. En effet, pour exprimer qu'un plan tangent:

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0$$

représenté par une équation rendue homogène, passe par l'origine, il suffit de poser la condition $f_t' = 0$. Or cette condition, d'après l'hypothèse admise, dépend uniquement de l'élément sphérique; elle détermine donc les rayons d'une ou de plusieurs sphères orthogonales à la surface symétrique. On voit en outre que, si la surface a des points nodaux, ses points, devant vérifier la condition $f_t' = 0$, appartiennent à l'une des sphères orthogonales, et par conséquent à l'une des lignes de courbure sphériques.

7. Lorsqu'une surface binaire contient une droite réelle, celle-ci coupe les m plans directeurs en m points réels, qui se trouvent nécessairement sur les sphères directrices. Il faut donc que $\frac{m}{2}$ sphères directrices au moins soient réelles. Remarquons de plus que le plan mené par la droite et par l'origine coupe ces sphères suivant des cercles concentriques, et les plans directeurs suivant des rayons aboutissant aux points de rencontre de la droite avec les cercles. Les traces des plans directeurs sont donc symétriquement disposées de part et d'autre du rayon perpendiculaire à la droite. Cela n'est en général possible que si ce rayon est la trace d'un plan de symétrie perpendiculaire à la droite. Donc *les droites réelles de la surface sont perpendiculaires aux plans de symétrie.* Ce raisonnement n'est nullement applicable aux droites imaginaires, pour lesquelles les considérations de symétrie n'apprennent plus rien. On peut s'en convaincre en remarquant que, dans un plan, les deux droites $x^2 + y^2 = 0$ forment un système doué d'une infinité d'axes de symétrie, ce qui serait absurde pour des droites réelles.

Réciproquement, si on considère une droite réelle perpendiculaire à un plan de symétrie, et une surface binaire d'ordre K, dont l'équation $F(L, M) = 0$ renferme un nombre n de coefficients arbitraires supérieur à $\frac{K}{2}$, on peut déterminer ces coefficients de façon que la surface passe par n points de la droite, placés d'un même côté du plan de symétrie. La surface passera alors par $2n$ points de la droite, et contiendra par suite cette dernière ainsi que toutes celles qui lui correspondent par symétrie.

8. Dès qu'on est en possession d'une surface pourvue des plans de symétrie d'un polyèdre régulier, on peut imaginer une infinité de transformations qui n'altèrent pas sa symétrie. On peut, par exemple, employer la transformation par rayons vecteurs réciproques ou par polaires

réciproques relativement à une sphère centrale. On peut aussi considérer le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à la surface et à une sphère centrale est constant; on obtient ainsi une surface nouvelle douée évidemment de la même symétrie que la première. En faisant varier la somme ou la différence considérée, on réalise une double famille de surfaces symétriques orthogonales.

9. Les polyèdres réguliers convexes sont au nombre de cinq; mais, si l'on tient compte seulement de leur genre de symétrie, ils se ramènent à trois types:

1°. Symétrie tétraédrique (le tétraèdre),

2°. » cuboctaédrique (l'hexaèdre et l'octaèdre),

3°. » icosidodécaédrique [1] (le dodécaèdre et l'icosaèdre).

Le premier type dérive du second par disparition d'un centre de symétrie (hémiédrie). Les polyèdres réguliers non convexes appartiennent tous au troisième type.

Nous étudierons successivement les surfaces qui se rapportent aux trois types, en supposant essentiellement que les coefficients de leurs équations sont réels.

Deuxième partie. Surfaces du type tétraédrique.

9. Le type tétraédrique est caractérisé par six plans de symétrie perpendiculaires deux à deux; ce sont les plans menés par les six arêtes du tétraèdre et par le centre de la sphère circonscrite. Leur existence entraîne celle de quatre axes ternaires (les quatre hauteurs) et de trois axes binaires, rectangulaires deux à deux, joignant les milieux des arêtes opposées. Il n'y a pas de centre de symétrie.

Prenons comme axes de coordonnées les trois axes binaires, et, pour fixer les idées, supposons l'axe des z vertical. Les trois plans de coordonnées, que nous appellerons *plans principaux*, jouissent alors de la symétrie du système, et, comme ils sont distincts des plans de symétrie, le

---

[1] Ces dénominations sont empruntées aux recherches de M. JORDAN sur les polyèdres (Journal de CRELLE, t. 68, 1868).

produit $M = xyz$ des distances d'un point quelconque à ces trois plans nous donne un élément symétrique. Le produit N des distances d'un point aux quatre plans menés par l'origine perpendiculairement aux axes ternaires fournit le second élément dont nous avons besoin. Ces quatre plans ont pour équations: $x \pm y \pm z = 0$. On peut donc, en négligeant un facteur constant, poser:

$$N = -(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$

et l'équation générale des surfaces cherchées se trouve mise sous la forme:

$$\varphi(x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2,\ xyz,\ x^2+y^2+z^2) = 0.$$

En vertu de l'identité:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2+z^2)^2 - 4(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2),$$

la même équation peut s'écrire:

$$\psi(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2,\ xyz,\ x^2+y^2+z^2) = 0$$

ou

$$\chi(x^4 + y^4 + z^4,\ xyz,\ x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Les degrés des éléments sont $m = 3$, $n = 4$, d'où $m + n - 1 = 6$, ce qui est précisément le nombre des plans de symétrie. Ce résultat concorde avec ce qui a été dit au n° **2**. D'ailleurs, il est évident que les valeurs des trois quantités:

$$x^2 + y^2 + z^2 = u$$
$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v$$
$$xyz = w$$

peuvent servir à fixer la position d'un point dans l'espace avec l'indétermination nécessitée par la symétrie tétraédrique; si l'on forme en effet l'équation en S

$$S^3 - uS^2 + vS - w^2 = 0,$$

les trois racines, rangées arbitrairement, donnent les valeurs de x^2, y^2, z^2, soit en tout six solutions. Si l'on choisit en outre les signes de x, y, z de manière à vérifier l'équation $xyz = w$, on parvient à un groupe de 24 points répondant à la symétrie tétraédrique.

10. La surface tétraédrique la plus simple est, après la sphère, la surface cubique qui a pour équation générale:

$$xyz + A(x^2 + y^2 + z^2) + B = 0.$$

Par chaque point de cette surface passe une sphérosymétrique du 6ème ordre, et une seule. D'ailleurs, les deux plans, réels ou imaginaires menés parallèlement à xoy, à une distance z de l'origine déterminée par la condition $Az^2 + B = 0$, coupent chacun la surface suivant deux droites représentées par l'équation

$$A(x^2 + y^2) + xy\sqrt{-\frac{B}{A}} = 0$$

Ces deux droites rencontrent l'axe des z, et la connaissance d'une seule d'entre elles suffit pour déterminer complétement la surface. On peut donc dire que:

La surface cubique symétrique est engendrée par une sphérosymétrique du 6ème ordre assujettie à s'appuyer constamment sur une droite, réelle ou imaginaire, qui rencontre orthogonalement l'un des axes binaires.

Une sphérosymétrique du 6ème ordre a pour équations:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.,$$
$$xyz = Const.$$

On tire de là:

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

Cette courbe rencontre orthogonalement une surface définie par l'équation différentielle:

$$xdx(y^2 - z^2) + ydy(z^2 - x^2) + zdz(x^2 - y^2) = 0$$

dont l'intégrale peut s'écrire:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0 \tag{1}$$

α, β, γ étant trois constantes dont la somme est nulle. On déduit de là que:

Les sphérosymétriques du 6$^{\text{ème}}$ *ordre sont les trajectoires orthogonales des cones du second ordre passant par les quatre axes ternaires; par conséquent, celles qui sont tracées sur une même sphère sont les trajectoires orthogonales de coniques sphériques passant par quatre points fixes d'un même hemisphère.*

On sait [1] que les coniques sphériques circonscrites à un quadrilatère rectiligne imaginaire de la sphère sont des courbes telles que, pour chacune d'elles, il y a un rapport constant entre les distances de ses points à deux diamètres fixes D, Δ, et que cette famille de courbes a pour trajectoires orthogonales les courbes, lieux des points M pour lesquels les grands cercles MD, $M\Delta$ font un angle constant. Ces trajectoires orthogonales sont des cycliques, transformées par rayons vecteurs réciproques d'ellipses de Cassini. Si, dans le cas des sphérosymétriques qui nous occupent, on remplace γ par $-\gamma$, l'on a $\gamma = \alpha + \beta$, et la relation (1) devient:

$$\alpha(x^2 + z^2) + \beta(y^2 + z^2) = 0.$$

Elle exprime alors que le rapport des distances de la conique sphérique aux deux axes ox, oy est constant, et l'on rentre ainsi dans le cas précédent. On parvient au même résultat en remplaçant z par iz, sans changer γ; de là un rapprochement intéressant entre les sphérosymétriques et une classe de cycliques sphériques.

La surface cubique contenant en chacun de ses points une sphérosymétrique, on voit que:

La surface cubique symétrique rencontre orthogonalement tous les cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

Cette propriété subsiste pour les surfaces binaires d'ordre supérieur dont l'équation dépend des deux premiers éléments, $x^2 + y^2 + z^2$ et xyz. Le troisième élément convient, comme on le verra, aux surfaces du type cuboctaédrique aussi bien qu'à celles du type tétraédrique. On peut donc dire que son absence caractérise une surface appartenant purement au type tétraédrique, et énoncer alors ce théorème:

---

[1] Voir l'ouvrage: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Mém. de la société des sciences de Bordeaux, 1870—1873) par M. Darboux.

Toute surface appartenant purement au type tétraédrique est trajectoire orthogonale des cones du second ordre circonscrits aux axes ternaires.

On achève de déterminer la surface en se donnant une courbe, par exemple une section horizontale. La surface est cubique, comme on l'a vu précédemment, si elle contient une droite rencontrant à angle droit l'un des axes binaires.

11. Les équations différentielles d'une sphérosymétrique peuvent s'écrire:

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

La tangente en un point est donc perpendiculaire à la fois au rayon vecteur issu de l'origine, et à la droite, lieu des points dont les coordonnées sont proportionnelles à $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. Cette droite peut être appelée *l'inverse* de celle qui coïncide avec le rayon vecteur. En outre, les sphérosymétriques rencontrant la droite inverse ont également, à leurs points de rencontre, des tangentes perpendiculaires au plan des deux droites. Tout plan mené par l'origine contient, comme il est aisé de le voir, deux droites inverses l'une de l'autre et deux seulement. Chacune d'elles rencontre une surface cubique symétrique en trois points, et, en chacun de ces points, le plan tangent est normal au plan considéré. Par conséquent:

Tout plan mené par l'origine est normal à une cubique symétrique en six points, situés sur deux droites inverses.

12. La sphère, réelle ou imaginaire, dont le rayon a vérifie la relation $Aa^2 + B = 0$, coupe la surface suivant trois grands cercles situés dans les plans principaux. On peut distinguer deux genres de surfaces cubiques symétriques, suivant que cette sphère est réelle ou imaginaire. Comme cas intermédiaire il y a celui d'une sphère directrice évanouissante; la surface possède alors un point isotrope à l'origine. En mettant en évidence le rayon de la sphère directrice, nous écrirons l'équation sous la forme:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0.$$

Comme on est maître de l'orientation des axes, on peut toujours supposer que b est positif.

13. L'équation précédente dépendant seulement de deux constantes, il est évident que toute équation représentant une surface cubique douée de la même symétrie que le tétraèdre régulier, et contenant deux constantes arbitraires, doit conduire à des résultats identiques. Chacune de ces formes d'équation correspond à un mode de génération des surfaces cubiques symétriques. Par exemple, si on appelle t, u, v, w les distances d'un point aux quatre faces d'un tétraèdre régulier de hauteur h, comptées toutes positivement lorsque le point est à l'intérieur du tétraèdre, et si l'on écrit, en appelant m une constante:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = m^3$$

avec la condition évidente:

$$t + u + v + w = h,$$

la surface ainsi représentée en coordonnées tétraédriques ne peut différer de la cubique symétrique; car son équation dépend des deux constantes m et h. Un calcul facile conduit en effet de l'équation cartésienne:

$$2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 0$$

à l'équation tétraédrique:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{4b}{\sqrt{3}}\left(a^2 + \frac{1}{3}b^2\right),$$

pourvu que la hauteur h du tétraèdre soit prise égale à $\frac{4b}{\sqrt{3}}$.

Il résulte de là que:

La cubique symétrique est le lieu des points tels que la somme des cubes de leurs distances aux quatre faces d'un tétraèdre soit constante.

Le tétraèdre ainsi déterminé mérite spécialement le nom de *tétraèdre de référence.* Il y a lieu d'observer que la hauteur h du tétraèdre, et par conséquent toutes ses dimensions, sont indépendantes du rayon a de la sphère directrice. On peut donc dire qu'une surface cubique symétrique est déterminée par les dimensions de sa sphère directrice et de son tétraèdre de référence. Le paramètre b est égal à la distance des arêtes du tétraèdre au centre de la sphère, ou, si l'on veut, à la moitié de la plus courte distance de deux arêtes opposées.

On doit à SYLVESTER la forme canonique de l'équation générale des surfaces du $3^{\text{ème}}$ degré:

$$\alpha t^3 + \beta u^3 + \gamma v^3 + \delta w^3 + \varepsilon \omega^3 = 0$$

équation dans laquelle t, u, v, w, ω sont les distances d'un point de la surface à cinq plans, et α, β, γ, δ, ε sont des coefficients arbitraires. SYLVESTER a en outre annoncé, et CLEBSCH a démontré que, pour une surface donnée, la réduction ne peut se faire que d'une seule manière. Ce qui précède montre que, dans le cas des cubiques symétriques, le pentaèdre de référence se compose d'un tétraèdre régulier et du plan de l'infini.

14. On peut toujours, en partant de la forme réduite de SYLVESTER, supposer que les cinq variables satisfont à la relation:

$$t + u + v + w + \omega = 0.$$

Il suffit pour cela de substituer à chacune d'elles son produit par un facteur constant, convenablement choisi. L'équation du hessien est alors (voir SALMON, *Géométrie à trois dimensions*):

$$\frac{1}{\alpha t} + \frac{1}{\beta u} + \frac{1}{\gamma v} + \frac{1}{\delta w} + \frac{1}{\varepsilon \omega} = 0.$$

Dans le cas de la surface symétrique, la relation identique est: $t + u + v + w - h = 0$. Il suffit donc de prendre $h = -\omega$ pour rentrer dans le cas précédent, et l'équation du hessien est par conséquence:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{\varepsilon h}.$$

C'est une surface symétrique du $4^{\text{ème}}$ degré. En vertu d'un théorème de SYLVESTER, les 10 sommets du pentaèdre de référence sont des points doubles du hessien, et ses dix arêtes sont situées sur la même surface. Donc, dans le cas actuel:

Le hessien de la surface cubique symétrique est une surface du $4^{\text{ème}}$ degré circonscrite au tétraèdre de référence et coupant en outre chacune des *faces suivant une droite à l'infini. Les quatre sommets du tétraèdre, et les points à l'infini sur chaque arête, sont des points doubles de la même surface.*

Si l'on pose:

$$Tt = Uu = Vv = Ww = \lambda,$$

T, U, V, W étant de nouvelles variables, et λ, une constante, l'équation du hessien prend la forme:

$$T + U + V + W = \frac{\lambda}{\varepsilon h}$$

avec la condition:

$$\frac{1}{T} + \frac{1}{U} + \frac{1}{V} + \frac{1}{W} = \frac{h}{\lambda}.$$

En prenant $\lambda = \varepsilon h^2$, on retrouve les équations entre t, u, v, w qui caractérisent le hessien. Par conséquent, *les points du hessien se correspondent deux par deux de telle façon que leurs coordonnées tétraédriques soient inversement proportionnelles.*

15. Lorsque la sphère directrice est imaginaire, et que le carré de son rayon est égal à $-\frac{1}{3}b^2$, l'équation tétraédrique se réduit à:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0.$$

Elle rentre alors dans le type général:

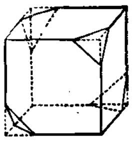
$$\left(\frac{t}{\alpha}\right)^m + \left(\frac{u}{\beta}\right)^m + \left(\frac{v}{\gamma}\right)^m + \left(\frac{w}{\delta}\right)^m = 0$$

où m est un nombre rationnel et α, β, γ, δ sont des coefficients arbitraires, le tétraèdre de référence ayant d'ailleurs une forme quelconque. C'est l'équation générale des surfaces que M. de la Gournerie a étudiées sous la dénomination de »surfaces tétraédrales symétriques simples» (Paris, 1867). Quel que soit m, il est évident qu'en supposant les coefficients égaux et prenant pour tétraèdre de référence un tétraèdre régulier on obtient des surfaces possédant la même symétrie que ce dernier. Mais ce ne sont pas, au point de vue de la symétrie, les surfaces les plus générales de leur degré. Pour $m = \frac{1}{2}$, on a la surface de Steiner; pour $m = -1$, on a la surface réciproque de celle de Steiner. Cette dernière est une forme limite de la surface hessienne, déjà envisagée; il suffit de supposer que le coefficient ε augmente indéfiniment, et par conséquent que la cubique symétrique s'éloigne tout entière à l'infini, par suite de l'agrandissement de sa sphère directrice.

16. Nous devons maintenant déterminer, dans le cas de la surface cubique symétrique, la position des 27 droites qui existent, comme l'on sait, sur toute surface cubique, et faire connaître leurs conditions de réalité. D'abord, la surface possède à l'infini trois droites réelles, situées dans les plans principaux. Toute autre droite, D, de la surface coupe le plan de l'infini en un point qui appartient à la section de la surface par ce plan, et par conséquent à un plan principal. Supposons-la parallèle au plan xoy. Si l'on mène par la droite D un plan parallèle à xoy, il coupe la surface suivant une courbe du 3ème degré comprenant la droite D et une droite à l'infini. Le reste de l'intersection est donc formé d'une autre droite D', à distance finie, et tout revient à chercher, parmi les sections parallèles aux plans principaux, celles qui se décomposent en deux droites.

Ceci posé, une discussion bien facile montre qu'il existe deux cubes, admettant l'un et l'autre les plans principaux pour plans de symétrie, dont les faces coupent chacune la surface suivant deux droites. Le premier est circonscrit au tétraèdre de référence; c'est à dire que son arête est égale à b, et qu'il est toujours réel. Chacune de ses faces rencontre la surface suivant deux droites parallèles entre elles et à une arête du tétraèdre (diagonale d'une face du cube). Ces droites ne sont réelles que si a^2 est positif et supérieur à b^2, par conséquent si la sphère directrice rencontre réellement les arêtes du tétraèdre. Les droites se groupent trois par trois autour de quatre sommets du cube, de manière à constituer quatre facettes parallèles aux faces du tétraèdre. Dans le langage cristallographique, on dirait que ces facettes sont obtenues par une modification hemiédrique du cube, due à des plans tangents sur quatre sommets (Fig. 2). Nous appellerons *droites du premier système* les douze droites ainsi obtenues. Le second cube est circonscrit à la sphère directrice. Chacune de ses faces coupe la surface suivant deux droites passant par le point de contact avec la sphère. De là douze droites, que nous appellerons les *droites du second système,* et qui sont réelles ou imaginaires en même

Fig. 2.



temps que celles du premier. On peut, de deux manières différentes, les grouper en trois quadrilatères gauches. Si elles sont réelles, le cube qui les contient est extérieur à celui qui contient les douze premières droites. Si elles sont imaginaires, leur cube est également imaginaire, et il est impossible de faire passer par l'une d'elles un plan réel. Si l'on considère quatre droites du premier système non situées dans le même plan, il existe deux droites qui rencontrent les quatre droites à la fois, et qui par conséquent appartiennent à la surface cubique; ce sont nécessairement des droites du second système.

En résumé, les 27 droites de la surface sont: les 3 droites de l'infini, les 12 droites du premier système, les 12 droites du second. Les droites de l'infini sont toujours réelles; les autres sont, toutes ensemble, réelles ou imaginaires. On sait que chaque droite d'une cubique est rencontrée par dix autres. Ici, en appelant couple de droites deux droites symétriques par rapport à l'un des plans de symétrie, on trouve qu'une droite du premier système est rencontrée par

1 droite à l'infini	1
1 droite parallèle, du 1^{er} système	1
2 couples de droites du 1^{er} système	4
2 » du 2^{e} »	4
	10.

Une droite du second système est rencontrée par:

1 droite à l'infini.	1
4 droites du 1^{er} système	4
1 droite du 2^{e} système (au centre d'une face du cube).	1
4 droites » (sur les arêtes du cube) . . .	4
	10

Enfin, une droite à l'infini est rencontrée par:

2 droites à l'infini	2
2 couples de droites du 1^{er} système	4
2 » » du 2^{e} »	4
	10.

On sait encore qu'une surface cubique a 45 plans tritangents, contenant chacun trois droites de la surface. Ici, nous avons:

	Le plan de l'infini	1
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples . . . . de droites du 1er système	6
3 fois:	1 droite de l'infini et 2 couples . . . . de droites du 2^{e} système	6
2 fois:	4 plans, contenant chacun 3 droites . . du 1er système	8
2 fois:	12 plans, contenant chacun 1 droite . . du 1er système et 2 du 2ème	24
		45.

Le cube qui contient les droites du 1er système étant toujours réel, ainsi que le plan de l'infini, il y a au moins 7 plans tritangents réels.

Observons encore qu'il y a 6 plans tritangents contenant chacun 3 droites concourantes (savoir, une droite à l'infini et deux droites concourantes). C'est une particularité qui se conserverait dans toute transformation homographique de la surface, et, comme en général une surface du 3ème ordre n'a pas 3 droites concourantes et situées dans un même plan, il est généralement impossible de ramener homographiquement une surface cubique à la forme symétrique. Du reste, si l'on se donne les plans principaux d'une surface cubique symétrique, l'équation de celle-ci ne renferme que deux coefficients. La transformation homographique en introduit 15, ce qui fait en tout 17, tandis qu'il en faudrait 19 pour parvenir à l'équation la plus générale.

17. Toute section de la cubique symétrique par un plan réel possède à l'infini 3 points réels. Si donc elle est indécomposable, c'est une *hyperbole redondante* de Newton. Il n'y a d'exception que si deux points à l'infini sont confondus, et l'on a alors une *hyperbole parabolique*. Ce dernier cas se présente lorsque le plan de la section est parallèle à l'un des axes binaires.

Par chaque point de la surface passent 27 coniques, situées dans les plans menés par les 27 droites. La section complète déterminée par l'un de ces plans a 3 points réels à l'infini, dont l'un sur la droite. La conique a donc à l'infini deux points réels, et appartient au genre hyperbole. Il n'y a d'exception que dans deux cas: 1°. Si les points à l'infini sont tous sur la droite, qui est par suite l'une des droites de l'infini; alors le plan sécant est parallèle à un plan principal, et la conique est d'un genre quelconque. 2°. Si les deux points à l'infini de la conique sont confondus; l'hyperbole dégénère alors en parabole. Il faut et il suffit pour cela que le plan sécant rencontre deux droites de l'infini au même point, autrement dit qu'il passe par un sommet du triangle de l'infini, et, par conséquent, qu'il soit parallèle à une direction binaire. Comme il contient déjà une droite de la surface, c'est à dire une parallèle à l'un des plans principaux, et comme les directions binaires sont parallèles ou perpendiculaires aux plans principaux, le plan sécant est lui-même parallèle à un plan principal, ce qui donne deux droites, ou perpendiculaire, ce qui donne une parabole proprement dite. Il y a ainsi 24 paraboles, correspondant aux 24 droites à distance finie.

En discutant la forme des sections parallèles aux plans principaux, on s'assure sans peine qu'il y a au plus trois cercles réels sur la surface, à savoir ceux qui sont situés dans les plans principaux. Ces cercles ne sont réels que si la sphère directrice est elle-même réelle. Il existe en outre des cercles toujours imaginaires, au sujet desquels nous nous bornerons à l'énoncé suivant:

Chacune des douze droites du premier système est associée à deux cercles imaginaires, qu'elle rencontre aux mêmes points.

18. Les sections de la surface faites par des sphères centrales sont des sphérosymétriques du $6^{\text{ème}}$ ordre, dont l'une, celle qui est déterminée par la sphère directrice, se décompose en trois cercles rectangulaires. Si la sphérosymétrique rencontre les quatre axes ternaires, elle se réduit évidemment aux 8 points situés sur ces 4 axes, car elle est, comme on l'a montré, une trajectoire orthogonale des coniques sphériques passant par ces 8 points; c'est une sphérosymétrique évanouissante. Le rayon ρ de la sphère correspondante s'obtient en faisant $x = y = z = \pm\frac{\rho}{\sqrt{3}}$ dans l'équation de la surface, ce qui donne pour x:

$$2x^3 - b(3x^2 - a^2) = 0.$$

L'équation dérivée est $x(x - b) = 0$, et ses racines, substituées dans le premier membre de la proposée, donnent respectivement ba^2 et $b(a^2 - b^2)$.

Le quotient est $1 - \frac{b^2}{a^2}$. La condition de réalité des trois racines de l'équation en x, et par suite des trois valeurs de ρ, est que ce quotient soit négatif, d'où $\frac{b^2}{a^2} > 1$. D'après cela:

La surface cubique symétrique possède une ou trois sphérosymétriques réelles évanouissantes, suivant que ses 24 droites à distance finie sont imaginaires ou réelles.

19. Si l'on mène par l'origine une droite ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, elle rencontre la surface en trois points, et les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3 de ces trois points à l'origine sont les racines de l'équation

$$2\alpha\beta\gamma\rho^3 - b(\rho^2 - a^2) = 0.$$

La somme algébrique des trois distances, égale à $\frac{b}{2\alpha\beta\gamma}$, est indépendante de a^2. Par conséquent:

La somme des longueurs interceptées à partir de l'origine, sur une droite donnée, par toutes les cubiques symétriques qui ont mêmes plans de symétrie est proportionnelle à l'arête du tétraèdre de référence et indépendante du rayon de la sphère directrice.

Si l'on prend, sur chaque droite menée par l'origine, le centre de gravité des trois points de rencontre avec une cubique symétrique donnée, le lieu de ce centre est la surface:

$$6xyz - b(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

C'est une cubique symétrique à sphère directrice évanouissante.

Faisons varier la direction α, β, γ de façon que l'une des racines de l'équation en ρ ne change pas. Pour cela, il faut et il suffit que le produit $\alpha\beta\gamma$ soit constant, et par suite les deux autres racines ne changent pas non plus. Il en résulte que:

Tout cone ayant son sommet à l'origine et passant par une sphérosymétrique de la surface coupe celle-ci suivant deux autres sphérosymétriques.

Observons encore que les deux racines, 0 et $\frac{b}{3\alpha\beta\gamma}$, de l'équation dérivée, substituées dans l'équation primitive, donnent respectivement au premier membre les valeurs ba^2 et $ba^2 - \frac{b^3}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2}$, dont le rapport est $1 - \frac{1}{27\alpha^2\beta^2\gamma^2} \times \frac{b^2}{a^2}$. La condition nécessaire et suffisante pour la réalité des trois valeurs de ρ est que ce rapport soit négatif, ou bien que $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ soit inférieur à $\frac{b^2}{a^2}$. Comme on a toujours $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, la valeur maxima de $27\alpha^2\beta^2\gamma^2$ est l'unité. Par conséquent, si b est supérieur à a (autrement dit si les droites de la surface sont réelles) tous les rayons vecteurs issus de l'origine rencontrent la surface en trois points réels. Dans le cas contraire, ils rencontrent la surface en un ou trois points, suivant qu'il sont d'un côté ou de l'autre du cone circonscrit ayant son sommet à l'origine. Si a est imaginaire ce cone est également imaginaire, et tous les rayons vecteurs rencontrent la surface en un seul point réel.

20. Si l'on cherche la section faite dans la surface par une sphère de rayon R ayant son centre sur l'un des axes binaires, Oz par exemple, à une distance m de l'origine, on trouve que pour $R = \sqrt{m^2 + a^2}$ la section se décompose en un cercle, situé dans le plan principal xOy, et une conique sphérique projetée sur le même plan suivant l'hyperbole équilatère $xy = mb$. Par chaque point de la surface passent ainsi trois coniques sphériques, situées sur trois sphères dont chacune contient l'un des trois cercles situés dans les plans principaux. Chacune de ces sphères touche la surface en quatre points situés sur le cercle correspondant. Pour $m^2 + a^2 = 0$, le rayon R s'annule, et le centre de la sphère est un foyer. Il y a ainsi six foyers, situés sur les axes binaires, aux points où ils sont rencontrés par une sphère orthogonale et concentrique à la sphère directrice. Si la sphère directrice est réelle, les foyers sont imaginaires, et inversement. Pour les valeurs de m égales à $-b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$, la conique sphérique se décompose en deux cercles imaginaires; on retrouve ainsi les 24 cercles imaginaires dont il a déjà été parlé. On voit en même temps qu'il existe, en dehors de la sphère directrice, douze sphères, réelles ou imaginaires, rencontrant chacune la surface suivant trois cercles, dont deux imaginaires.

21. Il est facile de trouver les trajectoires orthogonales des cubiques symétriques possédant le même tétraèdre de référence. Les équations différentielles d'une telle courbe sont:

$$\frac{dx}{yz - bx} = \frac{dy}{zx - by} = \frac{dz}{xy - bz},$$

b désignant une constante. On les vérifie en posant:

$$\begin{aligned} x &= \quad bkt \operatorname{sn}(t + C) \\ y &= - bikt \operatorname{cn}(t + C) \\ z &= - bit \operatorname{dn}(t + C). \end{aligned}$$

Dans ces formules, t est une variable auxiliaire, C est une constante arbitraire, et k est le module, également arbitraire, des fonctions elliptiques qui figurent dans les seconds membres. Les résultats sont réels pourvu que t et k soient réels, que k soit inférieur à l'unité, et que C soit égal à $h + k'i$, h étant réel et k' étant le module complémentaire $\sqrt{1 - k^2}$.

Il est également aisé de trouver les trajectoires orthogonales des cubiques symétriques qui possèdent même sphère directrice et mêmes plans principaux. Si l'on élimine le paramètre variable b entre les équations différentielles précédentes et celle de la surface cubique, il vient:

$$\frac{xdx}{y^2 + z^2 - x^2 - a^2} = \frac{ydy}{z^2 + x^2 - y^2 - a^2} = \frac{zdz}{x^2 + y^2 - z^2 - a^2}$$

et l'on vérifie ces nouvelles équations en posant:

$$x^2 = a^2 + t + \frac{\alpha}{t^2},$$

$$y^2 = a^2 + t + \frac{\beta}{t^2},$$

$$z^2 = a^2 + t + \frac{\gamma}{t^2}.$$

Les constantes α, β, γ sont assujetties à la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$, En éliminant t de deux façons différentes, on peut représenter une trajectoire orthogonale par les deux équations:

$$(\beta-\gamma)x^2+(\gamma-\alpha)y^2+(\alpha-\beta)z^2=0,$$

$$(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)(x^2+y^2+z^2-3a^2)^2=9(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Lorsque α, β, γ varient en restant infiniment petits du premier ordre, les trajectoires restent infiniment voisines de la sphère $x^2+y^2+z^2=3a^2$. Il résulte d'ailleurs des considérations exposées dans la première partie que cette sphère coupe orthogonalement les surfaces cubiques dont la sphère directrice a un rayon égal à a.

Le lieu des trajectoires qui vérifient la condition:

$$(n-p)\alpha+(p-m)\beta+(m-n)\gamma=\frac{1}{9},$$

m, n, p désignant des constantes arbitraires, est la surface:

$$[(n-p)x^2+(p-m)y^2+(m-n)z^2](x^2+y^2+z^2-3a^2)=1$$

qui rencontre par suite orthogonalement la famille de surfaces cubiques considérée.

22. La plus simple des surfaces cubiques symétriques est la surface élémentaire $xyz=p^3$, caractérisée par un tétraèdre de référence infiniment petit et une sphère directrice infiniment grande. Sa réciproque, relativement à une sphère centrale, est une surface de même nature; en prenant le rayon de la sphère égal à $3p$, la surface coïncide avec sa réciproque. Elle jouit donc à la fois des propriétés générales des surfaces élémentaires et de celles de leurs réciproques. En outre, les plans tangents communs à la surface cubique élémentaire et à une sphère centrale touchent la surface élémentaire suivant une ligne le long de laquelle la courbure totale est constante. Deux plans de symétrie perpendiculaires interceptent sur chaque normale, à partir de son pied, des longueurs égales et de signes contraires. La surface élémentaire peut être regardée comme l'enveloppe d'un ellipsoïde dont les trois plans principaux sont fixes et dont le volume est constant; la surface élémentaire et l'ellipsoïde ont, au point de contact, mêmes directions principales, et leurs rayons de courbure en ce point sont proportionnels, mais tournés en sens contraires. Le rapport de proportionnalité est constant et égal à $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. Les lignes asymptotiques ont pour équations, en appellant α et β les racines cubiques imaginaires de l'unité:

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2 = Const.,$$

$$x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2 = Const.$$

Les lignes de courbure, trouvées par M. SERRET, se déduisent sans peine de la connaissance des lignes asymptotiques, et sont déterminées par l'équation:

$$(x^2 + \beta y^2 + \alpha z^2)^{\frac{3}{2}} \pm (x^2 + \alpha y^2 + \beta z^2)^{\frac{3}{2}} = Const.$$

La démonstration de toutes ces propriétés ne présente aucune difficulté.

23. Une autre surface cubique symétrique qui mérite de fixer l'attention est celle qui a pour équation, en coordonnées tétraédriques:

$$t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = 0$$

et dont il a déjà été parlé au n° **15**. On va voir qu'il est possible de déterminer, sous forme finie, les équations de ses lignes asymptotiques. Nous allons même résoudre ce problème dans le cas général de la surface tétraédrale symétrique simple d'ordre quelconque:

$$t^m + u^m + v^m + w^m = 0 \tag{1}$$

où m est une constante arbitraire.[1] Par différentiation, on obtient:

$$t^{m-1}dt + u^{m-1}du + v^{m-1}dv + w^{m-1}dw = 0$$

et cette équation est satisfaite pour tout déplacement dt, du, dv, dw exécuté dans le plan tangent au point considéré. Si ce déplacement est effectué suivant une direction asymptotique, il se trouve également dans

---

[1] M. DARBOUX (Bulletin des sciences mathématiques, tome I) a ramené la recherche des lignes asymptotiques des surfaces $Ax^m + By^m + Cz^m + Dt^m = 0$ à l'intégration d'une équation de la forme: $\frac{d\rho^2}{(\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)} = K \frac{d\rho_1^2}{(\rho_1 - a)(\rho_1 - b)(\rho_1 - c)}$. Le procédé que nous indiquons ici ne nécessite pour ainsi dire aucune intégration.

le plan tangent au point $t + dt$, $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, et l'on a par suite:

$$(t + dt)^{m-1}dt + (u + du)^{m-1}du + (v + dv)^{m-1}dv + (w + dw)^{m-1}dw = 0,$$

d'où l'on tire la nouvelle équation:

$$(2) \qquad t^{m-2}dt^2 + u^{m-2}du^2 + v^{m-2}dv^2 + w^{m-2}dw^2 = 0.$$

On a d'ailleurs la relation fondamentale:

$$(3) \qquad t + u + v + w = h.$$

Si l'on peut trouver un système de valeurs de t, u, v, w satisfaisant à la fois aux équations (1), (2) et (3), les lignes asymptotiques sont par cela même déterminées. Il suffit même d'avoir deux relations homogènes entre t, u, v, w vérifiant les équations (1) et (2); ces relations donneront les rapports des quatre variables, et il sera ensuite aisé de trouver des valeurs absolues compatibles avec l'équation (3). Occupons nous donc des équations (1) et (2), et posons:

$$t^m = T^2, \qquad u^m = U^2, \qquad v^m = V^2, \qquad w^m = W^2.$$

Ces équations deviennent:

$$(4) \qquad T^2 + U^2 + V^2 + W^2 = 0$$

$$(5) \qquad dT^2 + dU^2 + dV^2 + dW^2 = 0.$$

En mettant la seconde sous la forme:

$$(dT + idU)(dT - idU) = -(dV + idW)(dV - idW).$$

on aperçoit la solution:

$$(6) \qquad T + iU = -\lambda(V + iW)$$

$$(7) \qquad T - iU = \frac{1}{\lambda}(V - iW)$$

où λ est une constante arbitraire. Ces deux équations entraînent d'ailleurs l'équation (4); ce sont donc les équations d'une ligne asymptotique de la surface. En faisant disparaître les imaginaires, on parvient à la suite de transformations faciles à la nouvelle équation:

$$(\lambda^2 + 1)^4(V^2T^2 + U^2W^2) + (\lambda^2 - 1)^4(W^2T^2 + U^2V^2) \\ + 16\lambda^4(V^2W^2 + U^2T^2) = 0.$$

Posant alors:

$$M = (\lambda^2 + 1)^2, \qquad N = -(\lambda^2 - 1)^2, \qquad P = 4\lambda^2,$$

et revenant aux variables t, u, v, w, on voit que la ligne asymptotique est située sur la surface auxiliaire:

$$(8) \qquad M^2(v^m t^m + u^m w^m) + N^2(w^m t^m + u^m v^m) + P^2(v^m w^m + u^m t^m) = 0$$

avec la condition, imposée aux constantes M, N, P:

$$(9) \qquad M + N + P = 0.$$

Par chaque point de la surface symétrique passent deux surfaces (8), correspondant aux deux valeurs de $\frac{M}{N}$ auxquelles conduit l'élimination de P entre les équations (10) et (11), et pivotant autour des points fixes communs aux trois surfaces:

$$v^m t^m + u^m w^m = 0,$$
$$w^m t^m + u^m v^m = 0,$$
$$v^m w^m + u^m t^m = 0.$$

On obtient ainsi les deux lignes asymptotiques qui se croisent en chaque point. Les deux valeurs de $\frac{M}{N}$ coïncident lorsque l'on a:

$$(10) \qquad (t^m + u^m + v^m + w^m)\sum t^m u^m v^m - 4t^m u^m v^m w^m = 0.$$

La surface représentée par cette équation rencontre la surface donnée (1) suivant 4 lignes planes, situées dans les faces du tétraèdre de référence, et formant la courbe parabolique de la surface (1). En outre, elle peut être regardée comme le lieu des points pour lesquels les deux valeurs du paramètre $\frac{M}{N}$ qui figure dans l'équation (8) sont égales, et par conséquent elle est l'enveloppe des surfaces (8).

Chaque fois que m est commensurable, la surface tétraédrique est algébrique et il en est de même de ses lignes asymptotiques.

24. Lorsque la surface cubique symétrique contient les arêtes d'un tétraèdre, chacune de ces arêtes coïncide avec deux droites du premier système, et l'équation devient alors:

$$(1) \qquad 2xyz - a(x^2 + y^2 + z^2) + a^3 = 0.$$

Les droites du second système coïncident avec celles du premier. Chaque sommet du tétraèdre inscrit est un noeud de la surface. Les sections faites pas des plans parallèles à xoy donnent, en projection sur ce plan, un système de coniques inscrites dans un même carré. L'équation de la surface en coordonnées tétraédriques, est:

$$(2) \qquad t^3 + u^3 + v^3 + w^3 = \frac{h^3}{4}$$

avec la condition habituelle:

$$t + u + v + w = h.$$

Le tétraèdre de référence est le symétrique, par rapport au centre, de celui qui contient les droites de la surface; on peut dire que ces deux tétraèdres sont *complémentaires* l'un de l'autre. Pour avoir l'équation de la surface rapportée au tétraèdre inscrit, il suffit de remplacer chaque coordonnée par son complément à $\frac{h}{2}$, et il vient:

$$(3) \qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0.$$

C'est la forme connue de l'équation de la surface réciproque de celle de Steiner. On en conclut, en vertu du paragraphe précédent, que les lignes asymptotiques se trouvent sur les quadriques:

$$(4) \qquad M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0$$

pourvu que $M + N + P$ soit égal à zéro.[1]

---

[1] Ce résultat a été obtenu par M. Laguerre, dans ses belles recherches analytiques sur la surface réciproque de la surface de Steiner (Nouvelles Annales de mathé-

L'équation (4) se déduit de l'équation (8) du paragraphe précédent en faisant $m = 1$. On conclut de là, sans nouveau calcul, que la famille de quadriques a pour enveloppe la surface:

$$(5)\qquad (vt + uw)(wt + uv) + (vt + uw)(vw + ut) + (vw + ut)(wt + uv) = 0.$$

Ce qui, en tenant compte de la relation $t + u + v + w = h$, peut se mettre sous la forme:

$$(6)\qquad \frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{4}{h} = 0.$$

Si l'on revient au tétraèdre de référence primitif en remplaçant t par $\frac{h}{2} - t$, u par $\frac{h}{2} - u$, etc., l'équation (6) ne change pas. Or, avec ce tétraèdre la surface cubique a pour équation (2), et les formules du § 14 montrent alors que l'équation (6) représente le hessien de la surface cubique. Donc:

L'enveloppe des quadriques coupant la surface cubique suivant ses lignes asymptotiques est le hessien de cette surface; ce hessien a même équation par rapport au tétraèdre inscrit et par rapport au tétraèdre complémentaire. Il jouit de la symétrie cuboctaédrique.

On peut remarquer aussi que *si deux cubiques symétriques sont circonscrites à deux tétraèdres complémentaires, elles ont même hessien, et leurs lignes asymptotiques se trouvent sur les mêmes quadriques, passant par les sommets des deux tétraèdres.*

Sans insister sur les autres propriétés de la surface cubique circonscrite à un tétraèdre, nous allons indiquer comment son équation peut se mettre sous la forme de déterminant, qui a servi de point de départ

---

matiques, 1872), comme application de la théorie des formes biquadratiques simultanées. Le même auteur l'a établi par une autre voie dans son article *Sur la représentation sur un plan de la surface du 3^e ordre qui est la réciproque de la surface de* STEINER, inséré au tome I du Bulletin de la société mathématique de France.

aux recherches de M. Laguerre. Considérons les cinq fonctions linéaires:

$$a = T + U + V + W,$$
$$b = AT + BU + CV + DW,$$
$$c = A^2T + B^2U + C^2V + D^2W,$$
$$d = A^3T + B^3U + C^3V + D^3W,$$
$$e = A^4T + B^4U + C^4V + D^4W,$$

où A, B, C, D sont quatre constantes, et posons:

$$T = (B - C)^2(C - D)^2(D - B)^2 \times t,$$
$$U = (A - D)^2(D - C)^2(C - A)^2 \times u,$$
$$V = (A - B)^2(B - D)^2(D - A)^2 \times v,$$
$$W = (A - B)^2(B - C)^2(C - A)^2 \times w,$$
$$\Pi^2 = (A - B)^2(A - C)^2(A - D)^2(B - C)^2(B - D)^2(C - D)^2,$$

il vient:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = \Pi^4 \Sigma tuv.$$

L'équation

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$$

est donc équivalente à:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

25. La surface de Steiner, réciproque de la précédente, a été tellement étudiée qu'il serait superflu de revenir sur ce sujet. Observons seulement qu'en mettant son équation sous la forme:

$$\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w} = 0,$$

les formules du n° 23 donnent immédiatement ses lignes asymptotiques. Ces lignes ont été déterminées par CLEBSCH (Journal de CRELLE, 1867) en faisant intervenir la représentation de la surface sur un plan.

26. Une autre surface remarquable du $4^{ème}$ ordre, pourvue de la symétrie tétraédrique, est celle qu'on déduit de la cubique symétrique à point isotrope:

$$2XYZ + b(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$$

en prenant cette dernière surface comme lieu des centres d'une sphère mobile qui coupe orthogonalement une sphère centrale fixe, et cherchant l'enveloppe de la sphère mobile. Si R est le rayon de la sphère fixe, les formules de transformation, données par M. DARBOUX dans son ouvrage déjà cité au § 10, sont:

$$X = \frac{2R^2x}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Y = \frac{2R^2y}{x^2+y^2+z^2+R^2}, \qquad Z = \frac{2R^2z}{x^2+y^2+z^2+R^2}.$$

Il vient ainsi:

$$4R^2xyz - b(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 + R^2) = 0.$$

Cette surface, anallagmatique par rapport à la sphère fixe, diffère essentiellement des surfaces anallagmatiques ordinaires du $4^{ème}$ ordre, autrement dit des cyclides. Au lieu d'être anallagmatique par rapport à 5 sphères, elle jouit de cette propriété par rapport à 6 plans et à une sphère. Au lieu d'admettre le cercle de l'infini comme ligne double, elle est tangente au plan de l'infini le long de ce cercle, qui fait par conséquent partie de la courbe parabolique et constitue une ligne de courbure singulière. Elle possède en outre à l'origine un point isotrope.

27. La plupart des surfaces tétraédriques dont nous avons parlé jusqu'ici rentrent dans le type général $xyz = f(x^2 + y^2 + z^2)$. Ce sont des surfaces binaires, jouissant comme telles des propriétés établies au n° 5. Parmi les surfaces qui n'appartiennent pas à ce type nous mentionnerons la surface:

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2axyz = 0$$

dont parle M. TISSERAND, dans son *Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal,* et qui est coupée suivant quatre cercles par la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Comme exemple de surface transcendante, citons la surface binaire $xyz = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ dont l'équation se ramène à la forme $XYZ = 1$ en posant $X = xe^{x^2}$, $Y = ye^{y^2}$, $Z = ze^{z^2}$.

Troisième partie. Surfaces du type cuboctaédrique.

28. Le type cuboctaédrique est caractérisé par 9 plans de symétrie, savoir les trois faces d'un trièdre trirectangle et les 6 plans bissecteurs de ce trièdre. Les faces du trièdre sont parallèles à celles du cube. Les six autres plans contiennent chacun deux arêtes parallèles du même polyèdre. L'existence de ces plans de symétrie entraîne celle d'un centre, de 3 axes quaternaires (les arêtes du trièdre trirectangle), de 4 axes ternaires (les diagonales du cube), de 6 axes binaires (joignant chacun les milieux de deux arêtes parallèles du cube). Les faces de l'octaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires.

Prenons comme axes de coordonnées les 3 axes quaternaires. Toute équation $\varphi(x^2, y^2, z^2) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique des carrés des variables représente évidemment une surface cuboctaédrique. Pour former méthodiquement les équations de ce genre d'après notre procédé général, nous devons remarquer que les trois plans de coordonnées, que nous appellerons plans principaux, sont des plans de symétrie, ce qui nous empêche de prendre comme élément symétrique le produit xyz; mais nous pouvons prendre le carré $x^2y^2z^2$. Le produit des distances aux plans perpendiculaires aux axes quaternaires (plans *directeurs*) fournit un autre élément. Nous prendrons donc:

$$M = x^2y^2z^2$$

$$N = x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2;$$

et l'équation générale des surfaces cuboctaédriques ne diffère par suite de celle des surfaces tétraédriques que par l'absence des puissances impaires de xyz. On aurait pu énoncer immédiatement ce résultat, en se rappelant qu'on passe d'un système à l'autre par l'addition d'un centre de symétrie. Les deux éléments M et N ont pour ordres $m = 6$, $n = 4$, d'où l'on tire $m + n - 1 = 9$. C'est le nombre des plans de symétrie du cube, et l'on se trouve ainsi dans le cas examiné au n° 2.

La surface cuboctaédrique différente d'une sphère est au minimum du 4ᵉ degré. En désignant par A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', une suite de constantes et posant $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, l'équation de la *quartique symétrique* peut se mettre indifféremment sous l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$(1) \quad x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0$$

$$(2) \quad x^4 + y^4 + z^4 + A'\rho^4 + 2B'\rho^2 + C' = 0$$

$$(3) \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + A''\rho^4 + 2B''\rho^2 + C'' = 0.$$

Remarquons que, pour une même surface, l'on a $\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'} = \frac{C''}{B''}$. Considérons la troisième forme, et supposons qu'on coupe la surface par un plan $z = h$, h étant déterminé au moyen de la condition:

$$h^4(1 + 4A''^2) + 4B''h^2 + 4B''^2 - 4A''C'' = 0.$$

La section se décompose en deux coniques ayant des équations de la forme:

$$xy \pm m(x^2 + y^2 + n) = 0.$$

Ce sont deux coniques égales, ayant en commun deux diamètres rectangulaires égaux situés dans les plans zox, zoy. Une seule de ces coniques suffit d'ailleurs à déterminer la surface, et, comme ses équations dépendent de paramètres (h, m, n) qui sont en même nombre que dans l'équation de la surface, la conique peut être choisie arbitrairement parmi celles qui occupent la situation indiquée. En conséquence:

La quartique symétrique peut être engendrée par une sphérosymétrique du 8ᵉ ordre, assujettie à s'appuyer constamment sur une conique parallèle à l'un des plans principaux et symétrique par rapport à deux plans diagonaux du cube.

29. Une sphérosymétrique du 8ème ordre a deux équations qu'on peut écrire:

$$x^2 + y^2 + z^2 = Const.$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = Const.$$

On vérifie sans peine qu'elle est orthogonale à tous les cones:

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{z^2}=0$$

pourvu que la somme $a+b+c$ soit nulle.

Ces cones passent par les diagonales du cube et admettent les axes quaternaires comme lignes doubles. Suivant une expression déjà employée, ce sont les cones *inverses* de ceux qui sont normaux aux sphérosymétriques du 6ème ordre. Toute surface cuboctaédrique binaire, c'est à dire ayant une équation indépendante de l'élément $x^2y^2z^2$, est une trajectoire orthogonale de cette famille de cones.

30. L'équation de la quartique symétrique peut s'écrire, comme on l'a vu:

$$N+A\rho^4+2B\rho^2+C=0.$$

Soient a^2, b^2 les racines (positives ou négatives) du trinome $A\rho^4+2B\rho^2+C$. On peut encore écrire:

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)=A(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2),$$

et la surface est par conséquent le lieu de l'intersection des deux quadriques:

$$(1)\qquad \begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z)&=A\lambda(\rho^2-a^2)\\ (x-y+z)(-x+y+z)&=\frac{1}{\lambda}(\rho^2-b^2),\end{aligned}$$

λ étant un paramètre arbitraire. On remarque que les sections cycliques centrales de ces deux faisceaux de quadriques sont invariables, et que les plans cycliques de l'un des faisceaux sont symétriques de ceux de l'autre par rapport au plan zox. Toutes ces quadriques ont mêmes plans principaux. La correspondance peut être définie géométriquement par la condition que la courbe d'intersection s'appuie sur la conique trouvée au n° 28.

L'intersection de deux surfaces du second ordre concentriques appartient à trois cylindres; c'est la courbe à laquelle Frezier et de la Gournerie ont donné le nom *d'ellipsimbre*. Si les deux surfaces ont mêmes plans principaux, l'ellipsimbre admet ces plans comme plans de symétrie, et peut être appelée *ellipsimbre symétrique.* On voit, par ce qui précède, que:

Toute quartique symétrique est le lieu d'une ellipsimbre symétrique assujettie: 1° *à s'appuyer sur quatre cercles fixes, concentriques, et égaux deux à deux, symétriquement placés par rapport aux plans principaux de l'ellipsimbre;* 2° *à rencontrer en même temps une conique parallèle à l'un de ces plans et symétrique par rapport aux deux autres.*

L'ellipsimbre (1) rapportée à ses plans principaux, a pour équations:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2x^2 - z^2 &= A\lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2), \\ 2y^2 - z^2 &= \frac{1}{\lambda}(x^2 + y^2 + z^2 - b^2). \end{aligned}$$

Elle est située sur le cone:

$$\begin{gathered}[2b^2 + A\lambda(a^2 - b^2)]x^2 + A\lambda[a^2 - b^2 - 2\lambda a^2]y^2 \\ + [A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2]z^2 = 0\end{gathered}$$

qui coupe la surface suivant une seconde ellipsimbre. Pour les valeurs de λ qui annulent l'un des coefficients, le cone se décompose en deux plans, et les deux ellipsimbres se décomposent chacune en deux coniques situées sur la surface. Abstraction faite des valeurs 0 et ∞ de λ, qui correspondent aux sections circulaires, la décomposition a lieu en posant l'une des conditions:

$$\lambda = \frac{2b^2}{A(b^2 - a^2)}, \qquad \lambda = \frac{a^2 - b^2}{2a^2}, \qquad A\lambda^2 a^2 - A\lambda(a^2 + b^2) - b^2 = 0.$$

On trouve ainsi 8 plans rencontrant chacun la surface suivant deux coniques. Les quatre premiers passent chacun par un axe binaire, les quatre derniers, par un axe quaternaire. Chacun de ces plans touche la surface aux quatre points de rencontre des deux coniques qu'il renferme. Par chaque axe binaire, on peut ainsi faire passer deux plans quadritangents; par chaque axe quaternaire, on peut en faire passer quatre. Il y a par suite 24 plans quadritangents déterminant 48 coniques de la surface.

Il ne peut exister d'autres plans passant par le centre et coupant la surface suivant deux coniques. En effet, si on rend l'équation de la surface homogène par l'introduction d'une variable auxiliaire t, le lieu des points pour lesquels le plan tangent passe par l'origine s'obtient en égalant à zéro la dérivée par rapport à t. L'équation (1) du n° 28 donne ainsi $B\rho^2 + C = 0$. Le cone central circonscrit à la surface la touche donc suivant une courbe sphérique (sphérosymétrique). Ce cone est du quatrième ordre, et sa trace sur un plan quelconque est une quartique plane. Tout plan quadritangent passant par le centre a pour trace, sur le même plan, une bitangente de cette quartique. Comme une quartique a 28 bitangentes, il y a 28 plans quadritangents. Or nous connaissons précisément 28 plans de cette nature, à savoir les 24 plans dont il a été question ci dessus, et les quatre plans perpendiculaires aux axes ternaires (ceux-ci, coupant chacun la surface suivant 2 cercles concentriques, sont bitangents en deux points du cercle de l'infini).

31. Tout plan central coupe le cone central circonscrit suivant 4 droites, bitangentes à la section de la surface par le même plan. Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sont les équations des 4 droites rapportées à deux axes rectangulaires menés par l'origine dans le plan sécant, et si R est le rayon de la sphérosymétrique de contact, l'équation de la section est de la forme:

$$\alpha\beta\gamma\delta = (\rho^2 - R^2)^2$$

qui rentre dans la forme canonique donnée par Plücker pour l'équation des quartiques en général, savoir:

$$\alpha\beta\gamma\delta = V^2,$$

V étant une conique, et α, β, γ, δ, quatre droites généralement non concourantes. On remarque que les sections centrales jouissent d'une propriété projective, consistant en ce qu'elles ont quatre bitangentes concourantes. En partant de la forme canonique, il est facile de trouver les autres bitangentes d'une quartique. Il suffit d'écrire l'identité:

$$\alpha\beta(\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta) = (V + p\alpha\beta)^2,$$

et de déterminer μ de manière que la conique:

$$\gamma\delta + 2pV + p^2\alpha\beta = 0$$

se décompose en deux droites p, q. L'équation prend alors la forme:

$$\alpha\beta pq = (V + \mu\alpha\beta)^2$$

et par conséquent p et q sont deux bitangentes.

D'une manière générale, lorsque C_1, C_2, C_3 sont trois coniques quelconques, l'équation en μ exprimant que $C_1 + 2\mu C_2 + \mu^2 C_3$ se décompose en deux facteurs linéaires est du 6ème degré. Mais ici, il y a une racine nulle et une infinie, correspondant aux deux couples $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. On n'a donc en réalité à résoudre qu'une équation du 4ème degré, déterminant 8 couples de bitangentes. Chaque couple se compose évidemment de deux droites symétriques par rapport au centre. Les 4 droites α, β, γ, δ pouvant se grouper en deux couples de 3 manières différentes, on peut, de 3 manières, trouver 8 couples de bitangentes, soit en tout 24, qui, avec les 4 droites α, β, γ, δ complètent le nombre total. Toute bitangente de la quartique symétrique étant bitangente à une section centrale, la méthode précédente conduit à la détermination complète des bitangentes de la surface.

32. L'équation de la quartique symétrique ne renfermant que des puissances paires des coordonnées, on est naturellement amené à poser:

$$x^2 = X, \qquad y^2 = Y, \qquad z^2 = Z,$$

ce qui établit une correspondance entre les points de cette surface et ceux d'une surface de révolution du second degré. A chaque point de celle-ci correspondent, sur la quartique, les 8 sommets d'un cube. La surface du second ordre est de révolution autour de l'axe ternaire $X = Y = Z$. A ses parallèles correspondent les sphérosymétriques; à ses plans tangents correspondent des surfaces du second degré coupant la quartique suivant deux ellipsïmbres; à ses deux systèmes de génératrices rectilignes correspondent deux systèmes d'ellipsimbres, et ainsi de suite. Les ellipsimbres que nous rencontrons ici ont leurs plans principaux parallèles aux faces du cube; elles diffèrent donc de celles que nous avons déterminées précédemment, et qui avaient deux plans de symétrie passant par les arêtes du cube.

33. Toute surface douée de la symétrie tétraédrique est représentée, en coordonnées tétraédrales, par une équation $\varphi(t, u, v, w) = 0$

symétrique par rapport aux coordonnées. Pour que la même surface jouisse de la symétrie cuboctaédrique, il faut et il suffit qu'elle possède un centre, et par suite que l'équation reste vérifiée quand on remplace t, u, v, w par $\frac{h}{2} - t$, etc., h étant la hauteur du tétraèdre de référence. Posons $\frac{h}{4} - t = T$, $\frac{h}{4} - u = U$, etc., d'où $\sum T = 0$. Les quantités T, U, V, W changent de signe sans changer de valeur absolue par la substitution dont il s'agit. La condition pour que la surface soit cuboctaédrique est donc que le premier membre de son équation soit une fonction paire ou impaire de T, U, V, W, symétrique par rapport à ces variables. Le produit $TUVW$ n'est autre chose que l'élément symétrique du 4[er] ordre. On a d'ailleurs $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{4}\sum T^2$. L'équation générale de la quartique symétrique est donc

$$TUVW + A(\sum T^2)^2 + 2B(\sum T^2) + C = 0$$

avec la condition $\sum T = 0$.

On peut aussi introduire les trois fonctions:

$$tu + vw = \lambda, \qquad tv + uw = \mu, \qquad tw + uv = \nu,$$

rencontrées déjà au n° 24. En vertu de l'identité:

$$\lambda = tu + vw = TU + VW + \frac{h^2}{8}$$

λ est une fonction paire de T, U, V, W. Il en est de même de μ et ν. D'après cela, toute équation $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ dont le premier membre est une fonction symétrique, entière et de degré n, par rapport à λ, μ, ν, représente une surface cuboctaédrique de degré $2n$. L'expression de λ en coordonnées cartésiennes est:

$$\lambda = \frac{2}{3}(x^2 - y^2 - z^2) + \frac{1}{8}h^2.$$

La surface $\lambda = 0$ est un hyperboloïde à une nappe, de révolution autour de l'axe des x, et dont les génératrices se coupent à angle droit sur le cercle de gorge. Cette surface contient les diagonales de quatre faces d'un cube. Sa méridienne est une hyperbole équilatère, et on peut l'appeler *hyperboloïde équilatère.*

Posons:

$$\varphi = \frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2) - p^2.$$

Nous avons l'identité:

$$\lambda + \mu + \nu + \varphi = \frac{3}{8}h^2 - p^2. \tag{1}$$

Nous pouvons considérer λ, μ, ν, φ comme des coordonnées *quadratiques* égales aux puissances d'un point par rapport à une sphère centrale et à trois hyperboloïdes équilatères. Dans ce système, l'équation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = Q\varphi^2, \tag{2}$$

où Q est une constante arbitraire, est l'équation générale des quartiques symétriques; car elle dépend de trois constantes arbitraires, savoir la hauteur h du tétraèdre de référence, le rayon de la sphère centrale (ou, ce qui revient au même, la constante p), enfin le coefficient Q. L'intérêt principal de cette forme d'équation consiste dans le rapprochement qu'elle établit entre les quartiques symétriques et les anallagmatiques du 4ème ordre. Celles-ci en effet, comme l'a montré M. Darboux, peuvent se représenter par une équation de la forme:

$$AS^2 + A'S'^2 + A''S''^2 + A'''S'''^2 = 0,$$

où S, S', S'', S''' sont les puissances par rapport à 4 sphères. Ici, 3 des sphères sont remplacées par des hyperboloïdes équilatères, genre de surfaces qui ne diffère de la sphère que par le signe du carré de l'un des axes. Seulement il convient de remarquer qu'en remplaçant les trois hyperboloïdes par les sphères conjuguées, on aurait ici quatre sphères concentriques, et l'équation obtenue représenterait deux sphères également concentriques.

L'équation d'une surface étant mise sous la forme précédente, on peut remplacer λ, μ, λ par $\lambda + \alpha$, $\mu + \alpha$, $\nu + \alpha$ et φ par $\varphi + \beta$, puis chercher quelles valeurs il faut attribuer aux constantes α et β pour que la forme d'équation soit conservée. En posant pour abréger $P = \frac{3}{8}h^2 - p^2$, on trouve:

$$\beta = \frac{2P}{1 - 3Q}, \qquad \alpha = -\frac{2PQ}{1 - 3Q}.$$

Si donc Q est différent de $\frac{1}{3}$, la forme réduite peut être obtenue de deux manières différentes.

Par la combinaison des équations (1) et (2), il vient:

$$2(\lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu) = P^2 - 2P\varphi + (1 - Q)\varphi^2.$$

Le premier membre, égalé à zéro, représente (voir n° 24) le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre de référence. La surface se réduit à ce hessien si l'on a à la fois $P = 0$ et $Q = 1$. $P = 0$ revient à dire que la sphère centrale a pour rayon $\frac{3}{4}h$, c'est à dire qu'elle est circonscrite au tétraèdre de référence. Cette condition étant supposée remplie, le hessien a pour équation quadratique:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varphi^2.$$

34. On arrive à une forme d'équation encore plus simple en substituant aux 3 hyperboloïdes équilatères les trois surfaces de révolution obtenues en égalant à zéro les trois fonctions:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha x^2 + \beta(y^2 + z^2) + \gamma &= \lambda, \\ \alpha y^2 + \beta(z^2 + x^2) + \gamma &= \mu, \\ \alpha z^2 + \beta(x^2 + y^2) + \gamma &= \nu. \end{aligned}$$

L'équation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = k$$

dépend des trois constantes $\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}, \frac{\gamma}{k}$ et représente par suite la quartique symétrique la plus générale. En cherchant à l'identifier avec l'équation ordinaire:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

on trouve que la réduction peut se faire de deux manières différentes.

Les deux transformations sont ensemble réelles ou imaginaires, suivant que le cone asymptotique est imaginaire ou réel. Les deux transformations se réduisent à une seule pour $A = \frac{1}{3}$; mais alors le coefficient γ est infini ou indéterminé. Lorsque les deux transformations sont réelles, A est supérieur à $\frac{1}{3}$. S'il est compris entre 1 et 3, l'un des systèmes de quadriques (1) se compose d'ellipsoïdes, et l'autre d'hyperboloïdes. Dans le cas contraire, les deux systèmes se composent d'ellipsoïdes. Les ellipsoïdes ne sont réels que si B est négatif.

35. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la quartique symétrique. D'après ce qui a été dit au n° 7, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie. On peut le voir aussi au moyen des résultats établis au n° 30. En effet, la droite D', symétrique d'une droite D par rapport au centre, appartient en même temps qu'elle à la surface, et les deux droites déterminent un plan central P qui coupe la surface suivant deux coniques (dont l'une formée par les deux droites). Ce plan contient donc soit un axe binaire, soit un axe quaternaire, ce qui exige qu'il soit normal à un plan de symétrie Π. Il coupe par suite les plans directeurs suivant des droites symétriquement placées par rapport à la trace du plan de symétrie; la droite D, étant assujettie à couper ces mêmes droites en des points situés sur les circonférences déterminées par le plan P dans les sphères directrices, est évidemment perpendiculaire au plan de symétrie Π.

Considérons d'abord une droite perpendiculaire à l'un des plans principaux, et parallèle par conséquent à l'un des axes quaternaires, Oz par exemple. Soient $x = \alpha$, $y = \beta$ ses équations. Portant ces valeurs de x et de y dans l'équation de la surface mise sous la forme (1) du n° 28, et annulant les coefficients des différentes puissances de z, nous avons les conditions:

$$A = -1,$$

$$B = 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

$$B^2 + C = 4\alpha^2\beta^2.$$

La condition $A = -1$ réduit l'équation du cone asymptotique à

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 0;$$

ce cone n'admet donc pas d'autres génératrices réelles que les axes quaternaires. Les deux autres conditions montrent que, pour la réalité de α et β, on doit avoir:

$$B > 0,$$

$$3B^2 + 4C < 0.$$

Soient P_1 et P_2 les carrés des rayons des sphères directrices. On a:

$$P_1 + P_2 = -\frac{2B}{A} \quad \text{et} \quad P_1 P_2 = \frac{C}{A}.$$

Faisant $A = -1$, et tenant compte de ces relations, les inégalités précédentes deviennent:

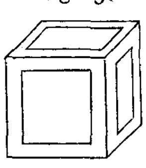
$$P_1 + P_2 > 0,$$

$$\left(3 - \frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{P_2}{P_1}\right) < 0.$$

D'après cela, le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ doit être positif et compris entre 3 et $\frac{1}{3}$; P_1 et P_2 doivent être tous les deux positifs. De cette discussion on conclut, eu égard à la symétrie de la surface, que:

La quartique symétrique contient 24 *droites parallèles aux axes quaternaires lorsque son cone asymptotique se réduit à ces axes. Les* 24 *droites sont réelles si les sphères directrices sont réelles, et si le carré du plus grand rayon est inférieur à trois fois le carré du plus petit; autrement dit, si les faces du cube inscrit dans la plus grande sphère rencontrent réellement la plus petite.*

Fig. 3.



Il est évident que les 24 droites sont disposées suivant 6 carrés, placés sur les faces d'un cube, comme l'indique la fig. 3. Par chaque droite, on peut faire passer, outre deux plans parallèles aux faces du cube, cinq plans qui contiennent chacun une seconde droite et déterminent autant de coniques de la surface; ce sont des plans quatritangents. Il existe 60 plans de cette nature, qui font connaître 60 coniques. Parmi les 5 plans qui passent par l'une des droites, il y a un plan central. On a ainsi 12 plans centraux quatritangents; ce sont les 12 plans, contenant chacun un axe quaternaire, trouvés déjà au n° 30.

Il y a deux cubes passant par les 24 droites; les demies longueurs de leurs arêtes sont les quantités α et β. Ces deux cubes se confondent quand on prend $3P_2 = P_1$, ce qui exprime que le cube circonscrit à l'une des sphères directrices est inscrit à l'autre. Les 24 droites se réduisent alors aux 12 arêtes d'un cube, et celles-ci sont tangentes à la plus petite sphère directrice. La surface possède dans ce cas 8 points coniques (les sommets du cube). Son équation peut s'écrire:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2\alpha^2(x^2 + y^2 + z^2) + 3\alpha^4 = 0.$$

36. Considérons actuellement une droite perpendiculaire à l'un des plans diagonaux du cube, et parallèle par conséquent à un axe binaire. Ses équations sont, par exemple:

$$y = x + \alpha, \qquad z = \beta.$$

Portant dans l'équation de la surface, et écrivant que l'équation en x est identiquement satisfaite, il vient:

$$A = 0,$$

$$\alpha^2 = -\frac{C}{4B} - \frac{3}{4}B,$$

$$\beta^2 = -\frac{C}{4B} + \frac{1}{4}B.$$

Remarquons qu'en vertu de la condition $A = 0$, l'une des sphères directrices disparaît à l'infini et le rayon R de l'autre sphère satisfait à la relation:

$$2BR^2 + C = 0$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{3B}{4},$$

$$\beta^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{B}{4},$$

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = 2R^2.$$

Il faut donc, pour la réalité de la droite considérée, que la sphère directrice unique soit réelle. Il faut en outre que B soit compris entre $-2R^2$ et $\frac{2R^2}{3}$. Si ces conditions sont remplies, la surface possède 24 droites réelles, disposées en facettes triangulaires sur les sommets d'un cube (fig. 4). La demie arête de ce cube est égale à β, et l'on a $\beta^2 < \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6}$, ou $\beta < \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ce qui veut dire que les côtés des carrés inscrits dans les faces du cube rencontrent réellement la sphère directrice. On peut également placer les 24 droites sur les faces d'un octaèdre régulier (fig. 5).

Fig. 4.

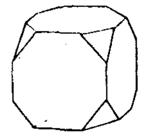
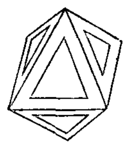


Fig. 5.



Les 24 droites se réduisent aux 12 arêtes de l'octaèdre régulier lorsqu'elles rencontrent les axes quaternaires, ce qui a lieu pour $\beta = 0$, d'où $B = -2R^2$. L'équation de la surface circonscrite à un octaèdre régulier est donc:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 4R^2(x^2 + y^2 + z^2) + 4R^4 = 0.$$

Cette surface possède 6 points coniques. Sa sphère directrice, de rayon R, touche les 12 droites, arêtes de l'octaèdre; résultat facile à prévoir, car les milieux de ces arêtes se trouvent sur les plans directeurs.

Lorsque B atteint sa limite supérieure $\frac{2R^2}{3}$, l'on a $\alpha = 0$ et la surface contient les diagonales des faces d'un cube, c'est à dire les arêtes de deux tétraèdres complémentaires. Nous l'appellerons surface *bitétraédrique*. Cette surface a 8 points coniques. Son équation est:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 + \frac{4}{3}R^2(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{4}{3}R^4 = 0.$$

La demie arête de chaque tétraèdre est égale à $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Si l'on considère une sphère interceptant sur chaque arête du tétraèdre une longueur égale à la moitié de cette arête, son rayon est

$$\sqrt{\frac{2R^2}{3} + \frac{R^2}{3}} = R;$$

c'est donc la sphère directrice, résultat qu'on obtiendrait immédiatement en se rappelant que la sphère directrice passe par les intersections des droites de la surface avec les plans directeurs.

La hauteur h de chaque tétraèdre est égale à son arête multipliée par $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ou bien à $\frac{4R\sqrt{2}}{3}$. L'équation de la surface peut donc s'écrire:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$$
$$+ 6\left(\frac{h}{4}\right)^2(x^2 + y^2 + z^2) - 27\left(\frac{h}{4}\right)^4 = 0.$$

En prenant l'un des tétraèdres comme tétraèdre de référence, il vient:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{4}{h}.$$

On reconnaît le hessien de la surface cubique symétrique circonscrite au tétraèdre (voir n° 24).

Donc: *la bitétraédrique est la surface hessienne de la cubique symétrique circonscrite à l'un ou l'autre de ses tétraèdres inscrits.*

Il est facile de voir que chaque face du cube touche la surface tout le long des deux diagonales. D'après cela, toute section plane de la surface admet pour bitangentes les traces des 6 faces du cube; ces bitangentes sont parallèles deux à deux. D'après ce qui a été dit au n° 24, la même surface peut être régardée comme l'enveloppe du faisceau de quadriques:

$$M^2(uw + vt) + N^2(uv + wt) + P^2(ut + vw) = 0, \qquad (M + N + P = 0)$$

ou bien:

$$(M^2 - N^2 - P^2)x^2 + (- M^2 + N^2 - P^2)y^2$$
$$+ (- M^2 - N^2 + P^2)z^2 + \frac{1}{8}h^2(M^2 + N^2 + P^2) = 0.$$

Ce sont des hyperboloïdes *rectangles.*

L'équation de la surface bitétraédrique peut encore s'écrire:

$$\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{y^2 - a^2} + \sqrt{z^2 - a^2} = 0,$$

a représentant la demie arête $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ du cube circonscrit aux deux tétraèdres.

37. Une surface du $4^{\text{ème}}$ degré, sans points singuliers, possède 3200 plans tritangents, dont nous allons chercher la disposition sur la quartique symétrique. Les plans tangents perpendiculaires à un plan de symétrie peuvent se déterminer en prenant ce plan comme plan des xy et joignant à l'équation $f(x, y, z^2) = 0$ de la surface l'équation

$$f'(z) = 2zf'_{z^2}(x, y, z^2) = 0.$$

Si on laisse de côté la solution $z = 0$, qui donne des points de contact situés dans le plan de symétrie, le cylindre enveloppé par les plans tangents considérés a pour trace la courbe obtenue en éliminant z^2 entre les deux équations $f = 0$, $f'_{z^2} = 0$; c'est une courbe du $4^{\text{ème}}$ degré. Chaque tangente à cette courbe est la trace d'un plan tangent qui touche la surface en deux points symétriques par rapport au plan des xy, c'est à dire d'un plan bitangent. Chaque bitangente est la trace d'un plan quatritangent; aux 28 bitangentes de la courbe correspondent ainsi 28 plans quatritangents de la surface. Les 9 plans de symétrie déterminent d'après cela $9 \times 28 = 252$ plans quatritangents, mais ces plans ne sont pas tous distincts. D'abord, il y a 4 plans quatritangents perpendiculaires à chaque axe quaternaire, car on obtient par exemple les plans de ce genre perpendiculaires à Oz en éliminant x^2 et y^2 entre l'équation de la surface et ses deux dérivées partielles relatives à x et y, débarrassées des solutions $x = y = 0$, et il vient ainsi une équation bicarrée en z. Chaque plan perpendiculaire à Oz, étant perpendiculaire à 4 plans de symétrie, compte pour 4 dans l'énumération précédente, et il y a de ce chef 48 plans quatritangents qui se réduisent à 12. Chaque axe binaire est également perpendiculaire à 4 plans quatritangents; ceux là, étant perpendiculaires chacun à 2 plans de symétrie, comptent pour 2, et il en résulte qu'il y a 4 plans quatritangents se réduisant à 12 distincts. Enfin, chaque plan directeur, coupant la surface suivant deux cercles concentriques, est un plan quatritangent à l'infini, perpendiculaire à trois plans de symétrie, et compte par conséquent pour trois. On a ainsi:

12	plans	comptant	pour	48
12	»	»	»	24
4	»	»	»	12
28	»	»	»	84.

Il reste $252 - 84 = 168$ plans quatritangents perpendiculaires à un seul plan de symétrie, et l'on a au total $168 + 28 = 196$ plans quatritangents distincts, équivalant à $196 \times 4 = 784$ plans quatritangents. En dehors de ceux-ci, on doit avoir encore $3200 - 784 = 2416$ plans tritangents, déterminant autant de quartiques unicursales. Il est aisé de voir que chaque axe ternaire est perpendiculaire à 4 plans tritangents, ce qui en donne 16. Les autres sont au nombre de 2400. Le polyèdre général qui jouit de la symétrie cubique ayant 48 faces (hexoctaèdre), on voit en définitive qu'il doit y avoir 50 hexoctaèdres symétriques dont toutes les faces sont des plans tritangents.

38. Les points nodaux de la quartique symétrique s'obtiennent en partant de l'équation rendue homogène:

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 - 2x^2y^2 + A\rho^4 + 2B\rho^2t^2 + Ct^4 = 0$$

et égalant à zéro les quatre dérivées partielles, ce qui donne:

$$\begin{aligned} x(x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ y(-x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ z(-x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2 + Bt^2) &= 0, \\ t(B\rho^2 + Ct^2) &= 0. \end{aligned}$$

La dernière équation montre que les points cherchés se trouvent soit sur le plan de l'infini, soit sur la sphère $B\rho^2 + C = 0$, orthogonale à la surface. Considérons d'abord les points à distance finie. On peut faire les hypothèses suivantes:

1°. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$ et par suite $C = 0$. On a un point isotrope à l'origine. C'est le cas où l'une des sphères directrices est évanouissante.

2°. $x = y = 0$, $z = \rho$. Il vient alors:

$$(1 + A)\rho^2 + B = 0,$$

$$B\rho^2 + C = 0$$

d'où $B^2 - AC = C$. La surface possède 6 noeuds (sommets d'un octaèdre régulier). En chacun d'eux, le cone des tangentes, étant assujetti à la symétrie quaternaire, est un cone de révolution. Si l'on a en même temps $A = 0$, d'où $C = B^2$, la surface contient les arêtes d'un octaèdre.

3°. $x = 0$, y et z différents de zéro. On a alors $y^2 = z^2 = \frac{1}{2}\rho^2$, d'où:

$$A\rho^2 + B = 0, \qquad B\rho^2 + C = 0$$

et par suite $B^2 - AC = 0$. La surface possède 12 noeuds, placés au milieu des arêtes d'un cube. Les deux sphères directrices sont confondues en une seule, passant par les 12 noeuds; chacun des plans directeurs touche la surface suivant un cercle. Cette surface ne peut contenir les droites (parallèles aux arêtes de l'octaèdre) joignant deux à deux les points singuliers, que si l'on a $A = 0$. Mais alors, ρ étant supposé fini, il vient $B = 0$ et $C = 0$; la surface se réduit aux plans directeurs. Il ne pouvait en être autrement car chaque plan directeur contient six des droites dont il s'agit.

4°. x, y et z différents de zéro. Il vient:

$$x^2 = y^2 = z^2 = A\rho^2 + B, \quad \text{d'où} \quad \rho^2 = 3(A\rho^2 + B).$$

On a aussi $B\rho^2 + C = 0$. Par suite:

$$B^2 - AC = \frac{1}{3}C.$$

La surface possède comme noeuds les 8 sommets d'un cube; en chacun de ces noeuds, le cone des tangentes, en vertu de la symétrie ternaire, est de révolution. Pour $A = -1$, d'où $B^2 = -\frac{4}{3}C$, la surface contient les arêtes d'un cube; pour $A = 0$, d'où $B^2 = -\frac{1}{3}C$, elle contient celles de deux tétraèdres; c'est la surface tétraédrique.

Les conditions de réalisation de ces quatre cas montrent que deux d'entre eux ne peuvent se présenter en même temps, à moins qu'on n'ait $B = C = 0$. Mais alors la surface se réduit à un cone, rentrant dans l'une des catégories suivantes:

Pour $A = -1$, cone s'évanouissant autour des 3 axes quaternaires.

Pour $A = \frac{1}{3}$, cone s'évanouissant autour des 4 axes ternaires.

Pour $A = 0$, cone décomposé en six plans (plans directeurs) et possédant 6 arêtes doubles (axes binaires)

Etudions maintenant les points singuliers à l'infini. En faisant $t = 0$, l'on a les 3 équations:

$$x(\quad x^2 - y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$y(- x^2 + y^2 - z^2 + A\rho^2) = 0,$$
$$z(- x^2 - y^2 + z^2 + A\rho^2) = 0,$$

ou bien, en introduisant les cosinus directeurs α, β, γ de la direction aboutissant à un noeud:

$$\alpha(\quad \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\beta(- \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 + A) = 0,$$
$$\gamma(- \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 + A) = 0.$$

Ici encore, on peut faire diverses hypothèses:

1°. $\qquad \alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$ d'où $A + 1 = 0.$

A cette hypothèse correspondent 3 points singuliers sur les 3 axes quaternaires.

2°. $\qquad \alpha = 0, \qquad \beta^2 - \gamma^2 + A = 0, \qquad - \beta^2 + \gamma^2 + A = 0,$

d'où $A = 0$, $\beta^2 = \gamma^2$, ce qui donne 6 points singuliers sur les axes binaires.

3°. α, β, γ différents de zéro, d'où $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \frac{1}{3}$ et $A = \frac{1}{3}$, ce qui donne 4 points singuliers sur les axes ternaires.

Voyons comment les divers cas de points singuliers à l'infini peuvent se combiner avec les hypothèses qui donnent des points singuliers à distance finie. Si l'on prend $A = -1$, on peut avoir en outre:

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). La surface a 4 noeuds, dont 3 à l'infini.

2°. $B = C = 0$. Cone imaginaire à 3 arêtes doubles.

3°. $B^2 + C = 0$. Les sphères directrices sont confondues. La surface a 12 noeuds à distance finie, sur les axes binaires, et 3 à l'infini. C'est une surface à 15 noeuds. Son équation est:

$$4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2B(x^2 + y^2 + z^2) + B^2 = 0$$

ou bien:

$$N - (\rho^2 - B)^2 = 0.$$

4°. $B^2 = -\frac{4}{3}C$. La surface a 8 noeuds aux sommets d'un cube, et 3 à l'infini soit au total 11 noeuds. C'est la surface circonscrite à un cube.

Passons à l'hypothèse $A = 0$.

1°. $C = 0$ (point isotrope à l'origine). Il y a 7 noeuds dont 6 à l'infini.

2°. $B^2 = C$. Il y a 12 noeuds, dont 6 à l'infini, et la surface est circonscrite à l'octaèdre des 6 noeuds à distance finie.

3°. $B = C = 0$. La surface se décompose en 4 plans.

4°. $B^2 = -\frac{1}{3}C$. La surface a 14 noeuds dont 6 à l'infini; c'est la surface bitétraédrique.

Soit enfin $A = \frac{1}{3}$.

1°. $C = 0$. 5 noeuds, dont 4 à l'infini.

2°. $B^2 = \frac{4}{3}C$. 10 noeuds, dont 4 à l'infini.

3°. $B^2 = \frac{1}{3}C$. 16 noeuds, dont 4 à l'infini. En posant

$$3B = -2b^2,$$

l'équation de cette surface, qui présente le nombre maximum de noeuds, peut s'écrire:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2b^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2b^4 = 0.$$

Les noeuds a distance finie sont sur la sphère qui a pour rayon $b\sqrt{2}$.

4°. $B = C = 0$. Cone évanouissant.

En résumé, laissant de côté les cones à arêtes doubles, on voit qu'on peut avoir:

1- 3- 4- 6- 8- 10- 11- 12- 14- 15- 16 noeuds,

dont

1- 6- 8- 12 à distance finie

et

$$3\text{-}4\text{-}6 \text{ à distance infinie.}$$

On sait que si une surface du $4^{ème}$ degré a 16 noeuds, le cone circonscrit à la surface, à partir de l'un des noeuds, se décompose en 6 plans, que, si elle a 15 noeuds, le même cone se décompose en 4 plans et un cone du second ordre; que, si elle a 14 noeuds, il se décompose en 3 plans et un cone cubique, ou 2 plans et 2 cones quadriques. Dans ce dernier cas, il y a 8 noeuds, donnant lieu au premier mode de décomposition, et 6, au second. Il en résulte évidemment que, pour la quartique symétrique à 14 noeuds (bitétraèdrique) le deuxième mode de décomposition correspond aux 6 noeuds à l'infini (c'est à dire aux directions des axes binaires). Les deux plans qui font alors partie du cylindre circonscrit sont deux faces du cube inscrit, parallèles à l'axe binaire considéré, et tangentes en tous les points de deux droites perpendiculaires à cet axe binaire. Les deux cones du second ordre sont remplacés par deux cylindres infiniment déliés (droites de la surface), parallèles à l'axe binaire.

39. La recherche des noeuds peut également s'effectuer en considérant la quadrique de révolution dont il a été question au n° **32**. Si $\varphi(x^2, y^2, z^2, t^2) = 0$ est la quartique, et si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, etc., l'équation prend la forme $\Phi(X, Y, Z, T) = 0$ et représente la quadrique. On a identiquement:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \frac{\partial \Phi}{\partial X}, \text{ etc.}$$

Les point nodaux de la quartique correspondent donc aux points de la quadrique qui vérifient à la fois les 4 équations:

$$\sqrt{X}\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \sqrt{Y}\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \sqrt{Z}\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = \sqrt{T}\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0.$$

Les quatre dérivées qui figurent ici ne peuvent s'annuler simultanément que si la quadrique possède un point singulier, et se réduit par conséquent à un cone. Le sommet de ce cone étant nécessairement sur la droite $X = Y = Z$, les points singuliers correspondants de la quartique sont sur les axes ternaires, et au nombre de 8. Dans tous les cas, les points nodaux à distance finie sont sur la sphère correspondant au plan $\frac{\partial \Phi}{\partial T} = 0$, c'est à dire sur la sphère $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. On peut faire les hypothèses suivantes:

$$1^\circ. \qquad X = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche le plan YoZ, et par conséquent les 3 plans de coordonnées. Il est évident, par raison de symétrie, que le contact a lieu sur les bissectrices des axes, correspondant aux axes binaires de la quartique, ce qui donne 12 noeuds de cette dernière.

$$2^\circ. \qquad X = Y = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = 0.$$

La quadrique touche l'axe oZ, et par conséquent les 3 axes de coordonnées, correspondant aux axes quaternaires de la surface, ce qui donne 6 noeuds de cette dernière.

3°. $X = Y = Z = 0$. La quadrique passe par l'origine, ce qui donne un point isotrope de la quartique.

Les noeuds à l'infini se produisent quand la quadrique touche à l'infini soit les plans, soit les axes de coordonnées. Ils se produisent aussi quand la quadrique a un point à l'infini dans la direction de son axe; ce qui réduit son cone asymptotique à cet axe. La quadrique est alors un paraboloïde. C'est ainsi que la surface à 16 noeuds dérive d'un paraboloïde, de révolution autour de la droite $X = Y = Z$, tangent aux trois plans de coordonnées. La surface à 15 noeuds correspond à une quadrique touchant à l'infini les 3 axes de coordonnées et à distance finie les trois plans de coordonnées. Chacun de ces plans rencontre la quadrique suivant deux droites parallèles aux deux axes contenus dans son plan; c'est un hyperboloïde rectangle, engendré par la révolution d'une arête d'un cube autour d'une diagonale.

Les surfaces qui possèdent 8 noeuds à distance finie sur les axes ternaires, c'est à dire les surfaces à 8, 11 et 14 noeuds, jouissent d'une propriété remarquable. Chacune d'elles dérive d'un cone droit; par conséquent les deux systèmes d'ellipsimbres correspondant aux génératrices rectilignes sont confondus et, le long de chaque ellipsimbre, la quartique est touchée par la quadrique correspondant au plan tangent du cone. Cette quadrique passe évidemment par les 8 noeuds dérivant du sommet du cone; en chacun de ces noeuds, elle fait, comme on peut le constater facilement, un angle constant avec l'axe ternaire. De plus, l'ellipsimbre de contact se trouve sur un cone du second ordre, correspondant au plan méridien du cone de révolution, et passant conséquemment par les axes ternaires. Ainsi:

Toute quartique symétrique possédant 8 *noeuds à distance finie sur les axes ternaires est rencontrée suivant deux ellipsimbres par les cones du second ordre passant par ces axes, et touchée, le long de chacune de ces courbes par une quadrique contenant les* 8 *noeuds et coupant les axes ternaires sous un angle constant.*

On voit en même temps que la quartique symétrique dont il s'agit est l'enveloppe de la quadrique:

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2 = Const.$$

lorsque λ, μ, ν, varient de telle façon que $\lambda + \mu + \nu$ et $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ aient des valeurs constantes.

40. La classe d'une quartique est en général égale à 36, mais chaque noeud l'abaisse de 2 unités. La quartique à 16 noeuds est donc de quatrième classe. Par conséquent, sa réciproque relative à une sphère centrale est du $4^{\text{ème}}$ ordre, et comme cette réciproque jouit de la même symétrie, son équation doit rentrer dans le type général:

$$N + A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0.$$

Pour déterminer les constantes, remarquons qu'à chaque noeud à distance finie de la première surface (placé, comme nous l'avons vu, sur un axe binaire) correspond un plan perpendiculaire à l'axe binaire, et touchant la réciproque suivant une conique. Cherchons donc à quelle condition un plan tel que $z = y + p$ peut toucher une quartique symétrique suivant une conique. Cette conique étant nécessairement symétrique par rapport à l'axe des x, ses équations peuvent s'écrire:

$$z = y + p,$$

$$x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$$

et, si l'on coupe la surface par le plan $z = y + p$, l'équation de la projection doit se réduire à $(x^2 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma)^2 = 0$. En partant de cette remarque, on trouve sans peine:

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = -\frac{2}{3}p^2, \qquad C = \frac{4}{3}p^4,$$

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -p, \qquad \gamma = -p^2.$$

p reste seul arbitraire. L'équation de la surface cherchée se réduit ainsi à:

$$(x^2 - y^2)^2 + (y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 - 2p^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2p^4 = 0.$$

Il résulte de là que:

La réciproque d'une quartique symétrique à 16 noeuds est une surface de même nature.

Ceci nous permet de compléter les propriétés de la surface à 16 noeuds. Elle est touchée suivant une conique par chacun des 12 plans tels que $z = y + p$, et les équations de la conique de contact sont:

$$z = y + p,$$
$$x^2 - y^2 - py - p^2 = 0.$$

C'est une hyperbole rencontrant le plan zoy en deux points imaginaires, et chacun des plans zox, xoy en des points réels qui sont bien, comme cela est nécessaire, des noeuds de la surface (par exemple, le point $z = 0$, $x = y = p$). Chacun des plans touchant la surface suivant une conique passe par 4 noeuds, et est perpendiculaire à un axe binaire. La surface, n'ayant que 16 noeuds, ne possède que 16 plans bitangents distincts: à savoir les 4 plans directeurs et les 12 plans qui la touchent suivant des coniques. Si l'on considère les sections perpendiculaires à l'axe quaternaire oz, on remarque que, pour $z = 0$, il n'y a pas d'autre points réels que les 4 noeuds situés dans le plan sécant, et que, pour $z = \pm p$, la section se décompose en deux coniques. On en conclut: 1° que le cylindre circonscrit parallèlement à un axe quaternaire se réduit à 4 plans; 2° qu'il y a sur chaque axe quaternaire deux points dont chacun est le sommet de deux cones de second ordre circonscrits à la surface.

Aux quatre cercles directeurs correspondent 4 cylindres de révolution circonscrits parallèlement aux axes ternaires. Observons enfin que la réciprocité dont jouit cette surface permet de déduire des divers modes de génération indiqués précédemment une série de modes nouveaux. Ainsi, aux diverses séries d'ellipsimbres qu'on peut tracer sur la surface correspondent diverses séries de développables, circonscrites à la fois à la surface et à un couple de quadriques; etc.

La surface réciproque de la quartique symétrique à 14 noeuds (ou bitétraédrique) est une surface symétrique du 8ème ordre, qui possède un mode de génération remarquable. La bitétraédrique étant l'enveloppe d'une série de quadriques qui passent par 8 points fixes, et dont chacune la touche suivant une ellipsimbre (intersection de deux quadriques infiniment voisines), on en conclut que la surface réciproque est l'enveloppe d'une série de quadriques qui touchent 8 plans fixes, parallèles aux faces de l'octaèdre. Le lieu des points de contact des quadriques avec chacun des plans fixes est une circonférence ayant son centre sur l'axe ternaire perpendiculaire. La surface réciproque possède 12 droites, correspondant à celles de la surface bitétraédrique et formant comme celles-ci les diagonales des faces d'un cube.

41. Parmi les cas particuliers de quartiques symétriques, il convient de citer celui où le coefficient B est égal à zéro. Alors la somme des carrés des rayons des sphères directrices est nulle, et celles-ci se coupent orthogonalement. Le cone asymptotique n'a pas de points de rencontre à distance finie avec la surface. La quadrique correspondant à ce genre de surfaces a évidemment son centre à l'origine. Considérons spécialement la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1$$

qui dérive de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, et qu'on peut appeler pour cette raison surface pseudosphérique. En mettant son équation sous la forme ordinaire, on trouve:

$$N + (\rho^2 - \sqrt{2})(\rho^2 + \sqrt{2}) = 0.$$

La surface pseudosphérique est l'enveloppe de la quadrique

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

lorsque $A^2 + B^2 + C^2$ est constant. En posant $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, et suivant le procédé indiqué au n° **23**, pour le cas des surfaces tétraédrales symétriques simples (qui comprend celui de la surface pseudosphérique), on reconnait que la détermination des lignes asymptotiques revient à l'intégration de l'équation $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$. Le problème se réduit donc à trouver les génératrices rectilignes de la sphère.

La surface pseudosphérique contient les 16 droites suivant lesquelles les 4 plans $z^4 - 1 = 0$ coupent les 4 plans $x^4 + y^4 = 0$. Par permutation des variables, on obtient 48 droites de la surface, toutes imaginaires, au sujet desquelles il y a lieu de se reporter à la remarque précédemment faite (n° 7).

La réciproque de la surface pseudosphérique par rapport à une sphère centrale est:

$$x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} + z^{\frac{4}{3}} = Const.,$$

surface du 36ème ordre, possédant 48 droites triples

Sa transformée par rayons vecteurs réciproques issus du centre a une équation de la forme:

$$x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2)^4 = 0.$$

L'équation, plus générale:

$$x^4 + y^4 + z^4 - k(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^4 = 0 \tag{1}$$

est homogène par rapport aux 4 quantités x, y, z, $x^2 + y^2 + z^2 + R^2$, qui peuvent être regardées comme les puissances du point (x, y, z) relatives à 4 sphères, dont 3 infinies et une imaginaire. La sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

est orthogonale à ces quatre sphères, et par conséquent la surface (1), en vertu d'une remarque de M. Darboux, est anallagmatique par rapport à la sphère (2). C'est une surface anallagmatique douée de toutes les propriétés établies précédemment pour les surfaces binaires à symétrie cuboctaédrique.

42. Parmi les surfaces cuboctaédriques du 6ème ordre, mentionnons seulement la suivante, à cause de la simplicité de son mode de génération.

Un plan mobile, tangent à une sphère fixe de rayon $\frac{a}{3}$, coupe trois diamètres rectangulaires de cette sphère en trois points A, B, C. Le lieu du centre de gravité du triangle ABC est la surface:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{a^2}$$

ou

$$a^2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=x^2y^2z^2.$$

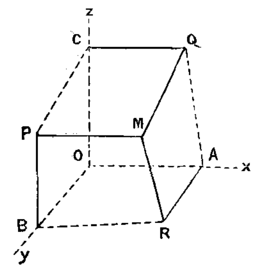
C'est une surface tétraédrale symétrique simple, dont on sait par suite trouver les lignes asymptotiques. La droite qui joint l'origine à un point de la surface est *inverse* de la perpendiculaire abaissée sur le plan tangent. La même surface peut être engendrée par le foyer d'un paraboloïde de révolution, qui se déplace en restant tangent aux trois plans de coordonnées.

Quatrième partie. Surfaces du type icosidodécaédrique.

43. Le type icosidodécaédrique est caractérisé par 15 plans de symétrie, contenant chacun deux arêtes parallèles du dodécaèdre. Ces quinze plans forment cinq systèmes de trièdres trirectangles. Leur existence entraîne celle d'un centre de symétrie, de 6 axes quinaires (perpendiculaires aux faces et passant chacun par les centres de deux faces parallèles) — de 10 axes ternaires (les diagonales du dodécaèdre) — de 15 axes binaires (les perpendiculaires aux plans de symétrie, joignant chacune les milieux de deux faces parallèles. Les faces de l'icosaèdre conjugué sont perpendiculaires aux axes ternaires, c'est à dire aux diagonales du dodécaèdre.

Prenons comme plans de coordonnées trois plans de symétrie rectangulaires, et commençons par chercher les équations qui déterminent les principales données du système. Pour fixer les idées, nous supposons qu'il s'agisse d'étudier le dodécaèdre régulier. Chaque axe binaire rencontre à angle droit deux arêtes contenues dans un même plan de sy-

Fig. 6.



métrie. ox, par exemple (fig. 6) rencontre une arête AR que nous pouvons supposer située dans le plan xoy. En prenant sur oy une longueur $oB = oA = a$, nous avons en B une arête BP, normale à oy, et la symétrie ternaire autour de la droite $x = y = z$ exige que cette arête soit dans le plan zoy. De même à la distance $oC = a$, l'axe oz est rencontré par une arête CQ située dans le plan xoz.

Par l'arête AR passent deux faces du dodécaèdre. Soit $ARMQ$ la face contenue dans le trièdre positif, et soit $x + \lambda z = 0$ l'équation du plan central parallèle à cette face. On a de même les deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, correspondant aux deux autres faces $BPMR$, $CQMP$, déduites de la première par la symétrie ternaire. La droite MP est une arête, et le dièdre des deux faces qui se coupent suivant MP est double de celui que forme la face $MQAR$ avec le plan xoy. Cette condition détermine λ. En effet, la normale à la face $BPMR$, dirigée extérieurement au dodécaèdre, a pour cosinus directeurs:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad 0.$$

De même la normale extérieure à $CQMP$ a pour cosinus:

$$0, \qquad \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Le cosinus de l'angle dièdre MP, supplémentaire de l'angle des normales extérieures, est donc $-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Cet angle est double de l'angle i d'inclinaison d'une face sur le plan de symétrie adjacent. D'ailleurs $\operatorname{tg} i = \frac{1}{\lambda}$. On a donc:

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \cos 2i = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}$$

d'où:

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Il faut évidemment prendre pour λ la racine positive de cette équation:

$$\lambda = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Si μ est l'autre racine, on a:

$$\lambda\mu = -1, \qquad \lambda + \mu = -1, \quad \text{d'où} \quad \lambda^2 + \mu^2 = 3.$$

Chaque plan de symétrie est perpendiculaire à une arête. L'arête MP étant parallèle à l'intersection des deux plans $y + \lambda x = 0$, $z + \lambda y = 0$, le plan de symétrie qui lui est perpendiculaire a pour équation:

$$\frac{1}{\lambda} x - y + \lambda z = 0$$

ou bien:

$$\mu x + y - \lambda z = 0.$$

Par permutation, on trouve alors que les 15 plans de symétrie sont:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

$$x \pm \lambda y \pm \mu z = 0,$$

$$\pm \mu x + y \pm \lambda z = 0,$$

$$\pm \lambda x \pm \mu y + z = 0.$$

Les plans centraux parallèles aux faces sont au nombre de 6, ayant pour équations:

$$y \pm \lambda x = 0,$$

$$z \pm \lambda y = 0,$$

$$x \pm \lambda z = 0.$$

Ces six plans, perpendiculaires aux axes quinaires, peuvent, d'une manière abrégée, être appelés *plans quinaires.* Les plans centraux perpendiculaires aux rayons passant par les sommets, c'est à dire aux axes ternaires, sont au nombre de dix et peuvent être appelés *plans ternaires.* Pour les déterminer, remarquons que le sommet P (fig. 6) est à l'intersection des trois plans $x = 0$, $y = a$, $z - a + \lambda y = 0$. Le plan ternaire correspondant est donc $y = -(1 - \lambda)z$, ou bien $y = -\lambda^2 z$. On a ainsi un premier groupe de six plans:

$$y \pm \lambda^2 z = 0,$$

$$z \pm \lambda^2 x = 0,$$

$$x \pm \lambda^2 y = 0.$$

Le sommet M est sur la droite $x = y = z$, perpendiculaire au plan $x + y + z = 0$, et l'on en déduit un second groupe de quatre plans:

$$x \pm y \pm z = 0.$$

44. Nous pouvons prendre comme éléments non sphériques les deux produits:

$$M = (z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2),$$

$$N = (y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2)$$

qui représentent, à des facteurs numériques près, les produits des distances d'un point aux six plans quinaires et aux dix plans ternaires. L'équation générale des surfaces icosidodécaédriques est donc:

$$\varphi\big((y^2 - \lambda^4 z^2)(z^2 - \lambda^4 x^2)(x^2 - \lambda^4 y^2)(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2),$$
$$(y^2 - \lambda^2 x^2)(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2),\ (x^2 + y^2 + z^2)\big) = 0$$

λ étant égal à $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et φ désignant une fonction arbitraire.

Le produit des degrés des éléments L, M, N est égal à 120, ce qui est précisément le nombre minimum de points formant un groupe doué de la symétrie icosidodécaédrique. Les éléments M et N sont donc bien les éléments simples dont nous avons besoin. On remarque en même temps que, conformément à la théorie générale exposée au n° 2, la somme de leurs degrés, diminuée d'une unité est égale à 15, c'est à dire au nombre des plans de symétrie.

Pour exprimer effectivement x, y, z en fonction des éléments L, M, N, on peut poser:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = v,$$
$$x^2y^2z^2 = w,$$
$$x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p,$$
$$x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4 = q,$$

d'où $p + q = Lv - 3w$. En développant les valeurs de M et N, il vient:

$$M = w(1 - \lambda^6) - \lambda^2 q + \lambda^4 q,$$
$$N = (L^2 - 4v)[w(1 - \lambda^{12}) - \lambda^4 p + \lambda^8 q],$$

d'où:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)q = M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2),$$
$$\lambda^4(\lambda^6 - 1)p = \lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1).$$

Tirons de là $p + q$ et pq. D'autre part, nous avons:

$$pq = \sum x^6y^6 + w\sum x^6 + 3w^2 = v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3.$$

Egalant les deux valeurs de pq, on obtient:

$$\lambda^6(\lambda^6 - 1)^2(v^3 - 6Lvw + qw^2 + wL^3)$$
$$= \left[M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(\lambda^{12} + \lambda^6 - 2)\right]\left[\lambda^6 M + \frac{N}{L^2 - 4v} + w(2\lambda^{12} - \lambda^6 - 1)\right].$$

De même, en égalant les deux valeurs de $p + q$, on trouve:

$$\lambda^2(\lambda^6 - 1)^2(Lv - 3w)$$
$$= M(1 + \lambda^4) + \frac{N}{L^2 - 4v}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) - \frac{w}{\lambda^2}(1 + 2\lambda^2 + \lambda^6 - \lambda^8 - 2\lambda^{12} - \lambda^{14}).$$

Cette dernière équation, linéaire en w, donne une valeur de w qui, portée dans l'équation précédente, conduit à une équation du 5ème degré en v. On aura donc 5 valeurs de v, c'est à dire de $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$, correspondant aux 5 trièdres trirectangles formés par les plans de symétrie.

v et w étant connus, et L étant supposé donné, les inconnues x^2, y^2, z se présentent comme racines d'une équation du 3ème degré. Mais ces racines ne peuvent être rangées arbitrairement. Quand on a, par exemple, choisi l'une d'elles pour valeur de x^2, l'équation $x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 = p$, dans laquelle p est connu, et qui est dissymétrique par rapport à y^2 et z^2, empêche la permutation de ces deux coordonnées. L'équation du 3e degré ne donne donc que trois groupes de valeurs de x^2, y^2, z^2, correspondant à 24 groupes de valeurs de x, y, z. Les 5 racines de l'équation en v conduisent donc à un ensemble de $5 \times 24 = 120$ points, comme on devait le prévoir. En résumé, le problème dépend d'une équation du 5ème degré.

45. Le degré minimum de la surface icosidodécaédrique non décomposable en sphères est évidemment le sixième, et dans ce cas, l'équation peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

A, B, C, D étant quatre constantes arbitraires, et ρ, la distance à l'origine. Pour abréger, nous appellerons cette surface *sextique symétrique*. Son intersection par une sphère centrale est une sphérosymétrique du 12ème ordre. Son intersection par un plan perpendiculaire à un axe quinaire est une sextique plane ayant 5 axes de symétrie. Par conséquent, la surface peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du 12ème ordre s'appuyant sur une sextique plane qui a 5 axes de symétrie.

La sextique symétrique, étant une surface binaire, possède trois sphères directrices, dont les rayons R_1, R_2, R_3 vérifient l'équation en ρ:

$$A\rho^6 + 3B\rho^4 + 3C\rho^2 + D = 0.$$

Si l'on désigne par plans directeurs les 6 plans quinaires, on peut dire que:

La sextique symétrique est le lieu des points dont le produit des distances à 6 plans directeurs, parallèles aux faces d'un dodécaèdre régulier, est proportionnel au produit des puissances par rapport à 3 sphères directrices, concentriques au dodécaèdre.

Chacun des plans directeurs coupe la surface suivant 3 cercles concentriques, ce qui fait connaître 18 cercles de la surface. D'après la théorie générale la surface coupe orthogonalement deux sphères qui font connaître deux lignes de courbure sphérosymétrique, et dont le rayon dépend uniquement de celui des sphères directrices.

Si l'on met l'équation sous la forme:

$$(1) \quad (z^2-\lambda^2y^2)(x^2-\lambda^2z^2)(y^2-\lambda^2x^2)+A(\rho^2-R_1^2)(\rho^2-R_2^2)(\rho^2-R_3^2)^2=0,$$

on voit qu'on obtient 8 points de la surface en prenant les points d'intersection des trois quadriques, à sections cycliques centrales invariables:

$$(2) \quad \begin{aligned} z^2-\lambda^2y^2 &= t(\rho^2-R_1^2), \\ x^2-\lambda^2z^2 &= u(\rho^2-R_2^2), \\ y^2-\lambda^2x^2 &= v(\rho^2-R_3^2), \end{aligned}$$

t, u, v étant trois paramètres liés par la seule condition:

$$tuv+A=0.$$

Les 8 points sont sur la sphère:

$$\rho^2(1-\lambda^2)=(t+u+v)\rho^2-(tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2).$$

Lorsqu'on a à la fois:

$$\begin{gathered} tuv=-A, \\ t+u+v=1-\lambda^2=\lambda, \\ tR_1^2+uR_2^2+vR_3^2=0, \end{gathered}$$

les 3 quadriques ont en commun une ellipsimbre, qui appartient par suite à la surface. On peut satisfaire de trois manières à ces conditions, et on trouve ainsi, en chaque point, 3 ellipsimbres symétriques par rapport aux plans de coordonnées. Comme on peut d'ailleurs, de 6 manières différentes, combiner les facteurs de l'équation (1) sous une forme telle que (2), on en conclut l'existence de 18 ellipsimbres situées sur la surface, et ayant pour plans de symétrie les trois plans de coordonnées. Chaque système de plans de symétrie trirectangulaires correspond donc à 18 ellipsimbres; comme il y en a 5, on parvient à un total de 90 ellipsimbres passant par chaque point de la surface. On voit en même temps que la sextique symétrique peut être engendrée au moyen d'une sphérosymétrique du 12ème ordre qui s'appuie sur une ellipsimbre.

46. Si l'on pose $x^2 = X$, $y^2 = Y$, $z^2 = Z$, on est amené à considérer la sextique symétrique comme dérivant d'une surface cubique, à chaque point de laquelle correspondent 8 points de la sextique. A chaque droite de la cubique correspond une ellipsimbre de la sextique, et l'on a ainsi 27 ellipsimbres. Celles-ci se composent: 1° des 9 couples de cercles interceptés par les couples de plans directeurs symétriques relativement aux plans de coordonnées; 2° des 18 ellipsimbres, symétriques relativement aux mêmes plans, déjà rencontrées à l'article précédent. A chaque plan tritangent de la cubique correspond une quadrique coupant la surface suivant 3 ellipsimbres et touchant cette surface en 24 points. Il y a donc 45 quadriques jouissant de cette propriété et possédant comme plans de symétrie trois plans de symétrie rectangulaires de la sextique. Parmi ces quadriques, se trouvent comptées les 3 sphères directrices, ainsi que 3 couples de plans directeurs; il reste donc 39 quadriques proprement dites. Les 5 groupes de plans de symétrie trirectangulaires entraînent par suite l'existence de $5 \times 39 = 195$ quadriques, coupant chacune la sextique suivant 3 ellipsimbres, et la touchant en 24 points. Deux ellipsimbres d'un même groupe, c'est-à-dire ayant les mêmes plans de symétrie, se rencontrent ou ne se rencontrent pas suivant que les droites correspondantes de la cubique sont ou non dans le même plan. On peut ainsi étendre à la sextique les théorèmes concernant la disposition des droites d'une cubique. Par exemple:

Par chaque ellipsimbre passent 5 *quadriques coupant chacune la surface suivant deux autres ellipsimbres du même groupe;*

Chaque ellipsimbre est rencontrée par dix autres du même groupe; savoir 3 *couples de cercles et* 6 *ellipsimbres proprement dites.*

On pourrait aussi considérer les ellipsimbres comme disposées en doubles-six d'après l'arrangement imaginé par Schläfli; mais il paraît inutile d'insister davantage sur ce sujet.

47. Si l'on pose:

$$Z - \lambda^2 Y = U + V,$$

$$X - \lambda^2 Z = V + T,$$

$$Y - \lambda^2 X = T + U,$$

et

$$X + Y + Z = \omega,$$

d'où:

$$\omega(1 - \lambda^2) = \lambda\omega = 2(T + U + V),$$

l'équation de la surface cubique considérée à l'article précédent peut s'écrire:

$$(U + V)(V + T)(T + U) + A\omega^3 + 3B\omega^2 + 3C\omega + D = 0,$$

ou bien, en modifiant les constantes:

$$T^3 + U^3 + V^3 = A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D'.$$

On peut en outre déterminer 4 constantes a, b, a', b', telles qu'on ait identiquement:

$$A'\omega^3 + 3B'\omega^2 + 3C'\omega + D' = (a\omega + b)^3 + (a'\omega + b')^3.$$

Posant enfin

$$a\,\omega + b = -\Phi,$$
$$a'\omega + b' = -\Psi,$$

l'équation de la surface cubique se trouve mise sous la forme canonique:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Les conditions imposées à a, b, a', b' sont:

$$\begin{aligned} a^3 + a'^3 &= A', \\ a^2 b + a'^2 b' &= B', \\ ab^2 + a'b'^2 &= C', \\ b^3 + b'^3 &= D'. \end{aligned}$$

Pour résoudre ce système, on peut supposer qu'on ait d'abord fait disparaître D' par le changement de ω en $\omega + s$, s étant une racine de:

$$A's^3 + 3B's^2 + 3C's + D' = 0.$$

D' étant ainsi annulé, l'on a: $b' = -b$, d'où:

$$(a^2 - a'^2)b = B',$$
$$(a + a')b^2 = C',$$

et par suite:

$$\frac{(a^2 - a'^2)^2}{a + a'} = \frac{B'^2}{C'}.$$

Soit $a + a' = u$, $a - a' = v$, il vient:

$$uv^2 = \frac{B'^2}{C'}.$$

D'ailleurs:

$$4(a^3 + a'^3) = u^3 + 3uv^2 = 4A',$$

d'où:

$$u = \sqrt[3]{4A' - \frac{3B'^2}{C'}}, \qquad v = \sqrt{\frac{B'^2}{C'u}}.$$

La réduction n'est réellement possible par cette méthode que si $C'u$ est positif, ou bien:

$$4A'C' - 3B'^2 > 0.$$

Revenant à la sextique, on voit que son équation peut s'écrire, dans les mêmes conditions:

$$T^3 + U^3 + V^3 + \Phi^3 + \Psi^3 = 0,$$

$\Phi = 0$ et $\Psi = 0$ étant deux sphères centrales, et $T = 0$, $U = 0$, $V = 0$ étant les trois cones:

$$\lambda x^2 + (1 + \lambda^2)(y^2 - z^2) = 0,$$
$$\lambda y^2 + (1 + \lambda^2)(z^2 - x^2) = 0,$$
$$\lambda z^2 + (1 + \lambda^2)(x^2 - y^2) = 0.$$

48. Cherchons maintenant les droites réelles qui peuvent appartenir à la sextique symétrique. D'après ce qui a été dit précédemment, ces droites sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et parallèles par suite aux axes binaires. Réciproquement, si une droite est perpendiculaire à un plan de symétrie, on peut déterminer les quatre coefficients de la sextique symétrique de façon qu'elle rencontre la droite en quatre points dissymétriques, et par conséquent en 8 points. La droite appartient alors à la surface, ainsi que le groupe de 60 droites dont elle fait partie.

Si la sextique symétrique contient des perpendiculaires aux plans de symétrie, son cone asymptotique passe par les axes binaires, et en particulier par les axes de coordonnées. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que le coefficient A soit nul, c'est à dire qu'une des sphères directrices soit infinie. Prenons donc la surface:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + 3B(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0,$$

et écrivons qu'elle contient la droite $x = \alpha$, $y = \beta$. Nous trouvons:

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = \frac{3B}{\lambda^2},$$

$$\lambda^2\beta^2(2 + \lambda^2) + \alpha^2(1 + 2\lambda^2) = -\frac{C\lambda^2}{B},$$

$$3B\alpha^2\beta^2 + 3B(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 3C(\alpha^2 + \beta^2) + D = 0.$$

L'élimination de α^2 et β^2 conduit à une équation de condition compliquée, mais linéaire en D. Il en résulte que parmi les sextiques formant une famille asymptotique, c'est à dire n'ayant de points communs qu'à l'infini, il y en a une, et une seule, qui contient 60 droites à distance finie. Si les deux sphères directrices sont données, on connaît les rapports $\frac{C}{B}$ et $\frac{D}{B}$. En posant $C = uB$, $D = vB$, on a, pour déterminer B, une équation du 3ème degré, sans terme indépendant. Laissant de côté la racine nulle, qui réduit la surface aux plans directeurs, on voit que *parmi les sextiques qui possèdent deux sphères directrices données (la troisième étant rejetée à l'infini), il y en a deux qui contiennent* 60 *droites*. Enfin, si l'on veut déterminer une sextique passant par une droite donnée, perpendiculaire à un plan de symétrie, on obtient, au moyen des équations précédemment écrites, des valeurs, toujours finies et déterminées, des coefficients B, C, D. D'après cela, *il y a toujours une sextique symétrique, et une seule, passant par une droite perpendiculaire à un plan de symétrie.* La disposition des

60 droites est bien facile à imaginer, on peut les regarder comme placées sur les faces d'un dodécaèdre régulier, parallèlement aux arêtes (fig. 7). On peut également les disposer sur les faces d'un icosaèdre (fig. 8).

Fig. 7.

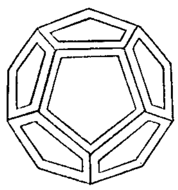
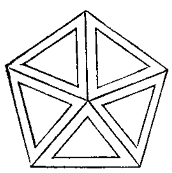


Fig. 8.



49. Proposons nous de déterminer une surface contenant les arêtes d'un dodécaèdre régulier. Soient $x = 0$, $y = \beta$ les équations d'une de ces arêtes. En faisant $\alpha = 0$ dans les équations générales, on trouve, pour la surface cherchée:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + \lambda^2 \beta^2 (\rho^2 - \beta^2)[\rho^2 - (\lambda^2 + 1)\beta^2] = 0.$$

Cette surface possède 30 droites à distance finie, et 6 à l'infini. Le long de chaque droite à distance finie, le plan tangent est fixe (perpendiculaire à un plan de symétrie). Il y a 20 noeuds à distance finie (sommets du dodécaèdre) et 15 à l'infini correspondant aux directions des arêtes du dodécaèdre. En chaque sommet du dodécaèdre, le cone des tangentes, possédant la symétrie ternaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \beta^2$) est tangente aux arêtes du dodécaèdre. L'autre sphère directrice passe par le point de rencontre de l'arête $x = 0$, $y = \beta$ avec le plan directeur $z + \lambda y = 0$.

On peut former de même l'équation d'une surface contenant les arêtes d'un icosaèdre. Une arête de ce genre a pour équations $x = \alpha$, $y = 0$. Il suffit donc de faire $\beta = 0$ dans les équations générales, et l'on obtient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) - \lambda^2 \alpha^2 (\rho^2 - \alpha^2)[\lambda^2 \rho^2 - \alpha^2(1 + \lambda^2)] = 0.$$

Cette surface possède, comme la précédente, 30 droites à distance finie, dans les plans de symétrie, et 6 à l'infini. Elle a 12 noeuds à distance finie (sommets de l'icosaèdre), et 15 à l'infini, dans la direction des arêtes. En chaque noeud à distance finie, le cone des tangentes, possédant la symétrie quinaire, est de révolution. L'une des sphères directrices ($\rho^2 = \alpha^2$) est tangente aux arêtes. L'autre sphère passe par le point de rencontre de l'arête $x = \alpha$, $y = 0$ avec le plan directeur $\lambda z + x = 0$.

Une sextique symétrique proprement dite ne peut contenir les côtés des pentagones réguliers convexes placés sur les faces du dodécaèdre régulier de telle façon que leurs sommets coïncident avec les milieux des arêtes du dodécaèdre; car, en pareil cas, chaque plan directeur rencontrerait la surface suivant dix droites. Mais il existe une sextique contenant les côtés des pentagones étoilés correspondant aux pentagones convexes formés par les faces du même polyèdre. Il suffit, pour obtenir son équation, de faire $\alpha = \beta$ dans les formules générales, et il vient:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + \lambda^3 \alpha^2 (\rho^4 - 7\alpha^2\rho^2 + 13\alpha^4) = 0.$$

50. Pour étudier les points nodaux de la sextique symétrique, posons:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = u\,,$$

$$x^2 - \lambda^2 z^2 = v\,,$$

$$y^2 - \lambda^2 x^2 = w,$$

d'où:

$$\rho^2(1 - \lambda^2) = \lambda\rho^2 = u + v + w.$$

L'équation, rendue homogène:

$$f(u, v, w, t) = uvw + A\rho^6 + 3B\rho^4 t^2 + 3C\rho^2 t^4 + Dt^6 = 0$$

donne:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ux(w - \lambda^2 v) + 6x(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2vy(u - \lambda^2 w) + 6y(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2wz(v - \lambda^2 u) + 6z(A\rho^4 + 2B\rho^2 t^2 + Ct^4),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 6t(B\rho^4 + 2C\rho^2 t^2 + Dt^4).$$

Pour un point nodal, ces quatre dérivées s'annulent en même temps. Cherchons d'abord les noeuds à distance finie. t étant différent de zéro, on a en faisant $t = 1$:

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

ce qui exprime que tous les points nodaux à distance finie sont, conformément à la théorie générale, sur les deux sphères centrales orthogonales à la surface, autrement dit sur les deux lignes de courbure sphériques. Ceci posé, on peut faire les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $x = y = z = 0$, d'où $\rho = 0$, ce qui exige que D soit nul. On a alors un point isotrope à l'origine.

2ème hypothèse. $x = y = 0$, $z \gtrless 0$; alors $w = 0$. On a donc à la fois:

$$A\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

d'où:

$$4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = (BC - AD)^2.$$

C'est la condition pour que deux sphères directrices coïncident. D'après cela:

Chaque fois que deux des sphères directrices sont confondues, la surface possède 30 *noeuds, placés à la rencontre de cette sphère avec les axes binaires.*

Ces 30 noeuds sont les milieux des arêtes d'un dodécaèdre régulier; la surface ne peut, sans se réduire aux plans directeurs, contenir les droites qui joignent ces points deux à deux.

Quand les trois sphères directrices sont confondues, ce qui a lieu pour $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D}$, chaque axe binaire rencontre la surface en 6 points, confondus trois par trois en deux noeuds. Cet axe est donc, en chaque noeud, une génératrice du cone des tangentes, et la symétrie binaire exige par suite que le cone des tangentes se décompose en deux plans passant par l'axe binaire. Chaque noeud est alors biplanaire, et il est facile de trouver ses deux plans tangents. Car l'équation de la surface peut s'écrire:

$$(z^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 z^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2 + z^2 - h^2)^3 = 0.$$

Faisant $z = h$, pour avoir la section par un plan tangent à la sphère directrice en l'un des noeuds, il vient:

$$(h^2 - \lambda^2 y^2)(x^2 - \lambda^2 h^2)(y^2 - \lambda^2 x^2) + A(x^2 + y^2)^3 = 0$$

et les tangentes à la section en son point double sont données par

$y^2 - \lambda^2 x^2 = 0$; ce sont les traces des plans directeurs passant par ce point. En résumé:

Quand les trois sphères directrices sont confondues, chaque axe binaire rencontre la surface en deux noeuds biplanaires, et les deux plans tangents en chaque noeud sont les plans directeurs qui se coupent suivant l'axe binaire.

3$^{\text{ème}}$ **hypothèse.** $x = 0$, y et z différents de zéro. Dans ce cas, en écrivant que $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont nuls, il vient:

$$v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u).$$

Mais:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2, \qquad v = -\lambda^2 z^2, \qquad w = y^2.$$

Portant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient:

$$\lambda^2 y^4 - 2(1 + \lambda^2) y^2 z^2 + z^4 = 0,$$

d'où:

$$\frac{z^2}{y^2} = 1 + \lambda^2 \pm \sqrt{1 + \lambda^2 + \lambda^4} = 1 + \lambda^2 \pm 2\lambda.$$

On a donc les deux solutions:

$$z = \pm y(1 - \lambda) = \pm \lambda^2 y$$

$$z = \pm y(1 + \lambda) = \pm y \frac{\lambda + \lambda^2}{\lambda} = \pm \frac{y}{\lambda}.$$

Le premier genre de solution correspond aux axes ternaires, et le second, aux axes quinaires situés dans le plan zoy. Prenons d'abord l'axe ternaire $z = \lambda^2 y$. Nous avons:

$$u = z^2 - \lambda^2 y^2 = -\lambda^3 y^2,$$

$$v = -\lambda^2 z^2 = -\lambda^6 y^2,$$

$$w = y^2.$$

Donc:

$$u + v + w = (1 - \lambda^3 - \lambda^6) y^2 = 3\lambda^3 y^2$$

et comme $u + v + w = \lambda \rho^2$, on obtient:

$$y^2 = \frac{\rho^2}{3\lambda^2}.$$

On en déduit aisément:

$$v(u - \lambda^2 w) = \frac{\lambda^3}{9}\rho^4 = 3p\rho^4,$$

en posant

$$p = \frac{\lambda^3}{27}.$$

Pour qu'il existe un noeud de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations en ρ^2:

$$(A + p)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$
$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0,$$

aient une racine commune, d'où:

$$p^2D^2 + 2p(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2.$$

Si cette condition est remplie, la surface a 20 noeuds sur les axes ternaires. On peut la vérifier en posant:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$
$$pD^2 + 2(2C^3 - 3BCD + AD^2) = 0.$$

Si ces deux conditions sont remplies, la surface possède à la fois 30 noeuds sur les axes binaires et 20 noeuds sur les axes ternaires. Les premiers sont sur la sphère orthogonale qui coïncide avec une sphère directrice, les seconds sont sur l'autre sphère orthogonale.

Considérons maintenant l'axe quinaire $y = \lambda z$. On a dans ce cas:

$$u = z^2(1 - \lambda^4),$$
$$v = -\lambda^2 z^2,$$
$$w = \lambda^2 z^2,$$

d'où:

$$u + v + w = z^2(1 - \lambda^4) = \lambda\rho^2,$$
$$z^2 = \frac{\lambda\rho^2}{1 - \lambda^4},$$
$$u = \lambda\rho^2, \qquad v = -\frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4}, \qquad w = \frac{\lambda^3\rho^2}{1 - \lambda^4},$$
$$v(u - \lambda^2 w) = 3q\rho^4,$$

en posant

$$q = -\frac{\lambda^3}{5}.$$

Pour qu'il y ait des noeuds de cette nature, il faut et il suffit que les deux équations:

$$(A + q)\rho^4 + 2B\rho^2 + C = 0,$$

$$B\rho^4 + 2C\rho^2 + D = 0$$

aient une racine commune, d'où:

$$q^2D^2 + 2q(2C^3 - 3BCD + AD^2) - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) + (BC - AD)^2 = 0.$$

Cette condition entraîne l'existence de 12 noeuds, qui peuvent coexister avec les 30 noeuds des axes binaires ou avec les 20 noeuds des axes ternaires. Mais les trois systèmes de noeuds ne peuvent se présenter en même temps (q étant différent de p) si l'on n'a pas:

$$(BC - AD)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD) = 0,$$

$$2C^3 - 3BCD + AD^2 = 0,$$

$$D^2 = 0,$$

d'où $C = 0$, $D = 0$. Dans ce cas, les deux sphères qui contiennent les noeuds sont évanouissantes, et ceux-ci se confondent en un seul, à moins qu'on n'ait $B = 0$, et alors la surface se réduit aux plans directeurs.

4ème hypothèse. x, y et z différents de zéro. Les équations de condition donnent:

$$u(w - \lambda^2 v) = v(u - \lambda^2 w) = w(v - \lambda^2 u),$$

ce qu'on peut écrire:

$$w(u + \lambda^2 v) \qquad = uv(1 + \lambda^2),$$

$$w(u - v + \lambda^2 u) = uv\lambda^2,$$

d'où:

$$w[\lambda^2(u + \lambda^2 v) - (1 + \lambda^2)(u - v + \lambda^2 u)] = 0,$$

ou encore, en supprimant le facteur $\lambda^4 + \lambda^2 + 1$, qui n'est pas nul:

$$w(v - u) = 0.$$

On a de même:

$$u(w - v) = 0,$$

$$v(u - w) = 0,$$

Supposons d'abord $u = 0$. Il reste simplement $vw = 0$. Il faut donc que l'un des deux facteurs, v, par exemple, soit nul. On a ainsi:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = 0, \qquad x^2 - \lambda^2 z^2 = 0.$$

Le noeud est donc à l'intersection de deux plans directeurs, c'est-à-dire sur un axe binaire, ce qui ramène au cas étudié dans la deuxième hypothèse. Supposons maintenant que u, v, w soients différents de zéro. Alors il vient $u = v = w$ ou bien:

$$z^2 - \lambda^2 y^2 = x^2 - \lambda^2 z^2 = y^2 - \lambda^2 x^2.$$

On tire de là: $x^2 = y^2 = z^2$, et l'on retrouve les noeuds situés sur les axes ternaires.

La quatrième hypothèse ne conduit donc à aucun cas nouveau.

51. Il reste à chercher les noeuds à l'infini (génératrices doubles du cone asymptotique). Si α, β, γ sont les cosinus directeurs d'une direction nodale, et si l'on pose:

$$\gamma^2 - \lambda^2\beta^2 = u',$$

$$\alpha^2 - \lambda^2\gamma^2 = v',$$

$$\beta^2 - \lambda^2\alpha^2 = w',$$

d'où

$$u' + v' + w' = 1 - \lambda^2 = \lambda,$$

il vient:

$$2\alpha u'(w' - \lambda^2 v') + 6A\alpha = 0,$$

$$2\beta v'(u' - \lambda^2 w') + 6A\beta = 0,$$

$$2\gamma w'(v' - \lambda^2 u') + 6A\gamma = 0,$$

et

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

De là les hypothèses suivantes:

1ère hypothèse. $\beta = \gamma = 0, \qquad \alpha = 1$

d'où

$$u'(w' - \lambda^2 v') + 3A = 0.$$

On a en même temps:

$$u' = 0, \qquad v' = 1, \qquad w' = -\lambda^2,$$

donc $A = 0$.

Si donc A est nul, les 15 directions binaires sont nodales; il y a 15 noeuds à l'infini. Le cone asymptotique est réduit aux plans directeurs. Ces 15 directions nodales coexistent:

1° avec un noeud à l'origine, si $D = 0$;

2° avec 30 noeuds à distance finie sur les axes binaires, si l'on a:

$$4B^2(C^2 - BD) = B^2C^2,$$

ou bien $3C^2 - 4BD = 0$. L'hypothèse $B = 0$ rejetterait ces noeuds à l'infini;

3° avec 20 noeuds sur les axes ternaires, si l'on a:

$$4(B^2 - pC)(C^2 - BD) = (BC - pD)^2;$$

4° avec 12 noeuds sur les axes quinaires, si l'on a:

$$4(B^2 - qC)(C^2 - BD) = (BC - qD)^2.$$

On peut avoir en même temps les 15 noeuds binaires à l'infini, les 30 noeuds binaires à distance finie et les 20 noeuds ternaires, soit en tout 65 noeuds.

2ème hypothèse. $\alpha = 0$, β et γ différents de zéro. Alors:

$$u' = \gamma^2 - \lambda^2\beta^2, \qquad v' = -\lambda^2\gamma^2, \qquad w' = \beta^2$$

et

$$v'(u' - \lambda^2 w') = w'(v' - \lambda^2 u')$$

ou bien:

$$\beta^2(\lambda^2\beta^2 - 2\gamma^2) + \gamma^2(\gamma^2 - 2\lambda^2\beta^2) = 0.$$

On tire de là, comme précédemment:

$$\gamma = \pm \lambda^2\beta \quad \text{et} \quad \beta = \pm \lambda\gamma.$$

Si l'on prend $\gamma = \lambda^2\beta$, il vient:

$$u' = \lambda^2\beta^2(\lambda^2 - 1), \qquad v' = -\lambda^6\beta^2, \qquad w' = \beta^2.$$

On tire de là, p ayant la même signification qu'à l'article précédent:

$$v'(u' - \lambda^2 w') = 3p$$

et la condition $v'(u' - \lambda^2 w') + 3A = 0$ devient $A + p = 0$.

Quand il en est ainsi, les dix directions ternaires sont nodales, et le cone asymptotique est coupé par un plan quelconque suivant une courbe unicursale.

Prenant maintenant $\beta = \lambda\gamma$, et raisonnant de la même façon, on est conduit à l'équation $A + q = 0$ pour caractériser les surfaces admettant les 6 axes quinaires comme directions nodales.

3ème hypothèse. α, β, γ différents de zéro. On trouve, comme dans le cas des noeuds à distance finie, que cette hypothèse se ramène aux précédentes.

En résumé, suivant que l'on a $A = 0$, $A + p = 0$ ou $A + q = 0$, le nombre des directions nodales s'élève à 15, à 10 ou à 6. Ces trois cas ne peuvent évidemment se présenter en même temps, mais chacun d'eux peut se combiner avec 30 noeuds binaires, avec 20 noeuds ternaires, ou avec 12 noeuds quinaires à distance finie. Deux espèces de noeuds à distance finie peuvent même coïncider avec une espèce de noeuds à l'infini. Le tableau des singularités qui peuvent se rencontrer sans que la surface se réduise à un cone ou à des plans ne comprend pas moins de 40 cas distincts, et cela en excluant les cas particuliers dans lesquels plusieurs noeuds viennent se réunir à l'origine pour y former un noeud multiple. Le nombre maximum de noeuds est de 65 (30 noeuds binaires — 20 noeuds ternaires — 15 directions nodales); nous avons déjà indiqué dans quelles conditions ce cas se réalise. La classe de la surface, qui est égale à 150 en l'absence de points nodaux, se trouve alors abaissée de $2 \times 65 = 130$ unités. La surface est donc de la 20ème classe.

Correction.

Page 240, dans les deux dernières équations, mettre partout μ au lieu de p.