SUR LE PROBLÈME D'APPROXIMATION DE S. BERNSTEIN ET SES GÉNÉRALISATIONS

PAR

IVAN VIDAV

à Ljubljana

Soit $K(u)$, $-\infty < u < \infty$, une fonction continue et soit C_0 l'espace des fonctions $f(u)$, continues sur la droite entière R de nombres réels, et telles que $f(u) \to 0$ pour $u \to \pm\infty$. Dans un mémoire récent M. H. Pollard a donné des conditions nécessaires et suffisantes, portant sur $K(u)$, pour que à toute fonction $f(u) \in C_0$ et à tout nombre positif ε corresponde un polynôme $P(u)$ tel qu'on ait $|f(u) - P(u)K(u)| < \varepsilon$. Voici le théorème démontré par M. Pollard:

Pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète dans l'espace C_0, il faut et il suffit que

(I) *Il existe une suite de polynômes $p_n(u)$ telle que*

A) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(u)\,K(u) = 1$; B) $|p_n(u)\,K(u)| \leq M$, $-\infty < u < \infty$.

(II) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|K(u)|}{1+u^2}\,du = -\infty.$$

(III) $K(u) \neq 0$, $-\infty < u < \infty$.

La condition (III) est une conséquence immédiate de (I A). D'autre part, en appliquant le théorème de Weierstrass sur l'approximation des fonctions continues, on voit que (III) entraîne (I A).

On peut généraliser le problème d'approximation polynômiale en prenant, au lieu de la droite entière R, un ensemble fermé quelconque E de points de R. C'est M. S. Mandelbrojt qui a posé cette question et qui a donné le premier [3] des conditions suffisantes, portant sur la fonction $K(u)$, pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète sur l'ensemble E. Au lieu de la condition (II) on suppose dans ce cas la divergence d'une intégrale plus compliquée (voir la condition II* dans le théorème

20 – 533807. *Acta Mathematica*. 91. Imprimé le 1 novembre 1954.

III). Alors, si $-\log K(u)$ est une fonction convexe de $\log u$, la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ est complète sur E.

Sur le conseil de M. S. Mandelbrojt j'ai cherché à remplacer la dernière de ses conditions (la convexité de $-\log K(u)$ par rapport à $\log u$) par une condition analogue à (I) de M. Pollard. Je suis parvenu à démontrer les théorèmes II et III où se trouvent des nouvelles conditions suffisantes pour que $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complet sur E.

Au cours de mes recherches j'ai trouvé que la condition (I) est très forte: elle est déjà suffisante dans le cas où $1/K(u)$ n'est pas une fonction entière. Or, on sait que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ est complète sur R, si $-\log K(u)$ est une fonction convexe de $\log u$ et si l'intégrale (II) diverge. Il s'ensuit de la remarque ci-dessus que ce fait n'est pas un cas particulier du théorème de M. Pollard. Cela s'applique de même au théorème de M. S. Mandelbrojt, qui ne résulte pas immédiatement de mon théorème III.

J'ai déjà indiqué les principaux résultats de ce travail dans deux notes parues dans les Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. ([7] et [8]).

Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes remercîments les plus sincères à M. S. Mandelbrojt pour son aide constante et pour les idées qu'il m'a donné pendant ce travail.

1. Nous démontrerons d'abord quelques lemmes qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 1. *Soit $f(u)$ une fonction continue et bornée sur $(-\infty, \infty)$: $|f(u)| < M$. Soit $\sigma(u)$ une fonction non décroissante telle que $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) < \infty$. Posons*

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)\, d\sigma(u)}{u - z}, \quad z = x + iy. \tag{1}$$

En tout point x où la dérivée $\sigma'(x)$ existe (donc presque partout), on a

$$|H(x + iy)| < A + B\,|\log|y||, \tag{2}$$

où A et B ne dépendent que de x et de M, mais sont les mêmes pour toute fonction $f(u)$ telle que $|f(u)| < M$.

On peut supposer $x = 0$ et $\sigma(0) = 0$ sans restreindre la généralité de la démonstration. Alors on aura

$$H(iy) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,d\sigma(u)}{u - iy} + \int_{-\infty}^{-1} \frac{f(u)\,d\sigma(u)}{u - iy} + \int_{1}^{\infty} \frac{f(u)\,d\sigma(u)}{u - iy}.$$

Il résulte d'abord de $d\sigma(u) \geqq 0$ que

$$\left| \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} \frac{f(u)\,d\sigma(u)}{u - iy} \right| < M \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma(u) = M[\sigma(\infty) - \sigma(-\infty)].$$

D'autre part, on obtient par l'intégration par parties

$$\left| \int_{-1}^{+1} \frac{f(u)\,d\sigma(u)}{u - iy} \right| < M \int_{-1}^{+1} \frac{d\sigma(u)}{\sqrt{u^2 + y^2}} = M \frac{\sigma(1) - \sigma(-1)}{\sqrt{1 + y^2}} + M \int_{-1}^{+1} \frac{u\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{(u^2 + y^2)^3}}.$$

Comme $\sigma'(0)$ existe, le quotient $|\sigma(u)/u|$ reste borné pour $|u| \leqq 1$, donc $|\sigma(u)/u| \leqq m$. On en déduit

$$\int_{-1}^{+1} \frac{u\,\sigma(u)\,du}{\sqrt{(u^2 + y^2)^3}} \leqq 2m \int_{0}^{1} \frac{u^2\,du}{\sqrt{(u^2 + y^2)^3}} < 2m \int_{0}^{1} \frac{du}{\sqrt{u^2 + y^2}} = 2m \log \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{|y|},$$

d'où résulte immédiatement l'inégalité (2).

Lemme 2. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité $|z| < 1$.*

α) *Pour qu'il existe une fonction $\sigma(\vartheta)$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$, à variation bornée, telle que*

$$f(z) = \int_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\sigma(\vartheta), \tag{3}$$

il faut et il suffit que $f(z)$ soit une somme de fonctions $f_n(z)$, holomorphes pour $|z| < 1$ et telles que l'une des fonctions $R[f_n(z)]$, $I[f_n(z)]$ ait le signe constant dans le cercle $|z| < 1$.

β) *Dans ce cas, $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta})$ existe p. p. et on a*

$$\int_{0}^{2\pi} \left| \log |f(e^{i\vartheta})| \right| d\vartheta < \infty \tag{4}$$

si $f(z) \not\equiv 0$.

α) Si $\sigma(\vartheta)$ est non décroissante, la fonction $f(z)$, définie par l'intégrale (3), a la partie réelle positive pour $|z| < 1$. Comme on peut toujours écrire $\sigma(\vartheta) =$

$=\sigma_1(\vartheta)-\sigma_2(\vartheta)+i[\sigma_3(\vartheta)-\sigma_4(\vartheta)]$, les fonctions $\sigma_k(\vartheta)$ étant non décroissantes, il en résulte que la condition est nécessaire. Supposons, d'autre part, que $R[f_n(z)]\geqq 0$ pour $|z|<1$. Alors, d'après un théorème de Herglotz [1], il existe une fonction non décroissante $\sigma_n(\vartheta)$ telle que

$$f_n(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\,\sigma_n(\vartheta)+i\,I[f_n(0)]=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\,\bar\sigma_n(\vartheta),$$

où nous avons posé $\bar\sigma_n(\vartheta)=\sigma_n(\vartheta)+\dfrac{i}{2\pi}\,I[f_n(0)]\,\vartheta$. Il s'ensuit donc que la condition est aussi suffisante.

β) Posons $f(z)=f_1(z)-f_2(z)+i[f_3(z)-f_4(z)]$ où $R[f_n(z)]\geqq 0$, $n=1,\dots,4$, pour $|z|<1$. Les fonctions $\tau_n(z)=[f_n(z)-1]/[f_n(z)+1]$ sont holomorphes dans $|z|<1$ où l'on a $|\tau_n(z)|<1$. Par suite, d'après le théorème de Fatou, $\lim\limits_{r\to 1}\tau(re^{i\vartheta})=\tau(e^{i\vartheta})$ existe p. p. D'autre part, on aura

$$f(z)=2\,\frac{(\tau_1-\tau_2)\,(1-\tau_3)\,(1-\tau_4)+i\,(\tau_3-\tau_4)\,(1-\tau_1)\,(1-\tau_2)}{(1-\tau_1)\,(1-\tau_2)\,(1-\tau_3)\,(1-\tau_4)}=\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}. \tag{5}$$

$f(z)$ est donc le quotient de deux fonctions holomorphes et bornées dans $|z|<1$. Par conséquent, $\lim f(re^{i\vartheta})=f(e^{i\vartheta})$ existe p. p.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction holomorphe et bornée, non identiquement nulle pour $|z|<1$. De la formule de Jensen on déduit que

$$J(r)=\int_0^{2\pi}\log|\varphi(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta$$

est une fonction croissante de r, donc ([3], p. 19)

$$\int_0^{2\pi}\log|\varphi(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta>-\infty$$

en désignant par $\varphi(e^{i\vartheta})=\lim\limits_{r\to 1}\varphi(re^{i\vartheta})$ (voir aussi [5], [6]). De (5) on déduit $\log f(e^{i\vartheta})=$ $=\log\varphi_1(e^{i\vartheta})-\log\varphi_2(e^{i\vartheta})$, d'où il résulte que l'intégrale (4) converge.

Si nous faisons la représentation conforme du cercle-unité sur le demi-plan supérieur $y>0$, nous pouvons énoncer le lemme ci-dessus sous la forme suivante:

Lemme 2*. *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $y>0$.*

α) *Pour qu'il existe une fonction $\sigma(u)$ à variation totale bornée, telle que*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+uz}{u-z}\, d\sigma(u), \quad y > 0, \tag{6}$$

il faut et il suffit que $f(z)$ soit une somme de fonctions $f_n(z)$ holomorphes pour $y > 0$ et telles que l'une des fonctions $R[f_n(z)]$, $I[f_n(z)]$ ait le signe constant dans le demi-plan $y > 0$.

β) *Dans ce cas, $\lim_{y \to +0} f(x+iy) = f(x+i0)$ existe p. p. et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|f(x+i0)||}{1+x^2}\, dx < \infty, \tag{7}$$

si $f(z) \not\equiv 0$.

Les rayons du cercle-unité se transforment dans les cercles qui sont ortogonaux sur l'axe réel. Pour prouver le lemme 2* il suffit donc de démontrer le fait suivant:

$f(z)$ étant une fonction représentée par l'intégrale (6), on a

$$\lim_{v \to +0} \{f[x+\alpha(v)+iv] - f(x+iv)\} = 0 \tag{*}$$

pour tous les x où $\sigma(x)$ est continue, si $\alpha(v)$ est une fonction continue telle que le quotient $|\alpha(v)/v^2|$ reste borné pour $v \to +0$.

On peut évidemment supposer $x = 0$. Posons

$$f[\alpha(v)+iv] - f(iv) = \alpha(v) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+u^2)\, d\sigma(u)}{(u-iv)(u-\alpha-iv)} = \alpha(v) \left\{ \int_{-h}^{+h} + \int_{-\infty}^{-h} + \right.$$

$$\left. + \int_{h}^{\infty} \frac{(1+u^2)\, d\sigma(u)}{(u-iv)(u-\alpha-iv)} \right\}. \tag{8}$$

Or, on a

$$\left| \alpha \int_{-h}^{+h} \frac{(1+u^2)\, d\sigma(u)}{(u-iv)(u-\alpha-iv)} \right| < \frac{\alpha}{v^2} \cdot \int_{-h}^{+h} (1+u^2)\, |d\sigma(u)|.$$

La fonction $\sigma(u)$ étant continue pour $u = 0$, l'intégrale à droite tend vers zéro avec $h \to 0$. Comme le quotient $|\alpha(v)/v^2|$ reste borné, la première intégrale à droite dans (8) est $< \varepsilon$ pour h assez petit. Le nombre h étant fixé, les deux autres membres dans (8) tendent vers zéro avec $v \to 0$, d'où résulte (*). Le lemme 2* se trouve ainsi démontré.

On peut énoncer 2* β) aussi sous la forme suivante:

Lemme 2.** *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $y>0$ telle que*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z}, \tag{9}$$

$\sigma(u)$ étant une fonction à variation totale bornée. Alors $\lim\limits_{y \to +0} f(x+iy) = f(x+i0)$ existe p. p. et l'intégrale (7) converge, si $f(z) \not\equiv 0$.

D'après le lemme 2* α), il existe une fonction $\sigma_1(u)$ telle que

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+uz)\, d\sigma_1(u)}{u-z}.$$

2** est donc une conséquence du lemme 2*.[1]

2. Soit E un ensemble fermé quelconque de points de l'axe réel et soit $K(u)$, $u \in E$, une fonction continue sur E jouissant des propriétés suivantes:

(I*) *Il existe une suite de polynômes $p_n(u)$ telle que*

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(u)\, K(u) = 1$; (B) $|p_n(u)\, K(u)| \leqq M$, $u \in E$.

Nous démontrerons d'abord le

Théorème I. *S'il existe une fonction $\sigma(u)$ à variation totale bornée, constante sur CE (complément de E) et non équivalente à une constante sur E, telle que*

[1] On trouve la fonction $\sigma_1(u)$ de la manière suivante. D'abord on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+uz)\, d\sigma(u)}{(1+u^2)(u-z)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u\, d\sigma(u)}{1+u^2}. \tag{**}$$

D'autre part, on trouve pour $I[z] > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+uz)\, du}{(1+u^2)(u-z)} = \pi i.$$

Donc, en désignant par c la valeur du deuxième membre à droite de (**),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+uz)\, d\sigma_1(u)}{u-z},$$

où nous avons posé

$$d\sigma_1(u) = \frac{d\sigma(u)}{1+u^2} - \frac{ci}{\pi} \cdot \frac{du}{1+u^2}.$$

$$\int_E u^n K(u)\, d\sigma(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n K(u)\, d\sigma(u) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

la fonction $K(u)$ *satisfaisant à la condition* (I*), *alors la suite de polynômes* $p_n(z)$, $z = x + iy$, *converge uniformément dans tout domaine fini vers une fonction entière* $p(z)$ *et on a* $1/K(x) = p(x)$, $x \in E$.

Supposons, en effet, qu'il existe une fonction $\sigma(u)$, non équivalente à une constante sur E, vérifiant les relations (10). Posons

$$K(u) = K_1(u) + i K_2(u), \quad \sigma(u) = \sigma_1(u) + i\sigma_2(u),$$

$K_1(u)$, $K_2(u)$, $\sigma_1(u)$, $\sigma_2(u)$ étant des fonctions réelles de la variable réelle u. Considérons la fonction

$$H(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(u)\, d\sigma(u)}{u - z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\, d\sigma_1 - K_2\, d\sigma_2}{u - z} + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_2\, d\sigma_1 + K_1\, d\sigma_2}{u - z}. \tag{11}$$

Comme, d'après (I* A), $K(u) \neq 0$, $u \in E$, l'intégrale $H(z)$ est une fonction holomorphe pour $y > 0$ et $y < 0$ qui ne se réduit pas à zéro dans les deux demi-plans. Donc, au moins l'une des intégrales à droite est $\not\equiv 0$. Supposons par exemple

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\, d\sigma_1 - K_2\, d\sigma_2}{u - z} \not\equiv 0. \tag{12}$$

La fonction $G(z)$ est holomorphe partout dans le plan de la variable z à l'exception peut-être des points de l'ensemble E. Dans le cas $E = R$ (l'ensemble E est la droite entière), l'intégrale (12) peut représenter deux fonctions analytiques distinctes pour $y > 0$ et $y < 0$. On a évidemment $G(\bar z) = \bar G(z)$. Des relations (10), que nous pouvons écrire sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^n (K_1\, d\sigma_1 - K_2\, d\sigma_2) = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u^n (K_1\, d\sigma_2 + K_2\, d\sigma_1) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{10*}$$

on déduit d'abord (voir [4], p. 873)

$$z^n G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^n (K_1\, d\sigma_1 - K_2\, d\sigma_2)}{u - z}$$

d'où

$$p_n(z)\,G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(u)\,\frac{K_1\,d\,\sigma_1 - K_2\,d\,\sigma_2}{u-z} \quad [= S_n(z)]. \tag{13}$$

D'autre part, on tire de (I*) que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(u)\,K_1(u) = \frac{K_1(u)}{K(u)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_n(u)\,K_2(u) = \frac{K_2(u)}{K(u)}, \quad u \in E$$

et

$$|\,p_n(u)\,K_1(u)\,| \leqq |\,p_n(u)\,|\cdot|\,K(u)\,| \leqq M, \quad |\,p_n(u)\,K_2(u)\,| \leqq M.$$

En vertu de ces relations, la suite $S_n(z)$ converge uniformément vers

$$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\,d\,\sigma_1 - K_2\,d\,\sigma_2}{K(u)\,(u-z)} \tag{14}$$

dans les deux demi-plans $y > h$ et $y < -h$ pour tout $h > 0$. Il résulte donc de (13) que $p_n(z) = S_n(z)/G(z)$ tend vers $p(z) = S(z)/G(z)$ pour tout point $z = x + iy$, $|y| > 0$, tel que $G(z) \neq 0$. Or, nous verrons que la suite $p_n(z)$ converge vers une fonction entière dans tout le plan de la variable complexe z.

Partout où la limite $G(x + i\,0)$ existe on a $G(x - i\,0) = \bar{G}(x + i\,0)$. Soient maintenant x_1 et x_2, $x_1 < x_2$, deux points de l'axe réel tels que: 1) les limites $G(x_k + i\,0)$, $k = 1, 2$, existent et sont différentes de zéro. Donc, si $\delta > 0$ est assez petit, on aura $|\,G(x_k + i\,y)\,| \geqq m > 0$, $k = 1, 2$, pour $|\,y\,| \leqq \delta$. 2) En posant $\sigma_1(u) = \alpha_1(u) - \beta_1(u)$ et $\sigma_2(u) = \alpha_2(u) - \beta_2(u)$, $\alpha_k(u)$ et $\beta_k(u)$ étant non décroissantes, les dérivées $\alpha_k'(x_n)$, $\beta_k'(x_n)$, $k, n = 1, 2$, existent et sont finies. Désignons par γ_1 un arc simple de longueur finie joignant les points $x_1 + i\,\delta$ et $x_2 + i\,\delta$, situé tout entier dans le demi-plan $y > 0$ et qui ne passe par aucun zéro de $G(z)$, et par γ_2 un arc joignant $x_1 - i\,\delta$ et $x_2 - i\,\delta$, ayant des propriétés semblables dans le demi-plan $y < 0$. Les deux segments $x = x_1$, $|\,y\,| \leqq \delta$ et $x = x_2$, $|\,y\,| \leqq \delta$, et les arcs γ_1, γ_2 forment une courbe fermée C. Sur cette courbe, le module $|\,G(z)\,|$ est borné inférieurement par un nombre positif m. D'autre part, d'après le lemme 1, en tenant compte des propriétés des points x_1, x_2 et de la forme de la fonction $S_n(z)$, il existe deux constantes P et Q, indépendantes de n, telles que, sur C, on ait $|\,S_n(z)\,| \leqq P + Q\,|\log|\,y\,||$. Donc, il résulte de (13) que, sur C,

$$|\,p_n(z)\,| \leqq \frac{P}{m} + \frac{Q}{m}\,|\log|\,y\,||. \tag{15}$$

Les polynômes $p_n(z)$ étant partout holomorphes, on a

$$p_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p_n(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}. \tag{16}$$

La suite $p_n(z)$ converge sur C. Il s'ensuit de l'inégalité (15) que l'intégrale (16) converge aussi. Donc, dans le domaine limité par la courbe C, la suite $p_n(z)$ tend vers une fonction $p(z)$ et on aura

$$p(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Il en résulte que $p(z)$ y est une fonction holomorphe. Comme, évidemment, tout domaine fini du plan z peut être entouré d'une courbe C semblable, on conclut que la suite $p_n(z)$ converge partout vers une fonction entière $p(z)$. On déduit alors de (I* A) que $1/K(x) = p(x)$, $x \in E$ et le théorème I est démontré.

Nous pouvons donner au théorème I aussi la forme suivante:

Théorème I*. *Si la fonction continue $K(u)$, $u \in E$, satisfaisant à la condition* (I*), *n'est pas l'inverse d'une fonction entière, alors à toute fonction $f(u)$, continue sur E, avec $f(u) \to 0$, $u \to \pm\infty$, et à tout nombre positif ε correspond un polynôme $P(u)$ tel que l'on ait $|f(u) - P(u)K(u)| < \varepsilon$, $u \in E$.*

Supposons maintenant que l'ensemble E soit la droite entière R. On sait que, dans ce cas, la condition (II) est nécessaire pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète. D'où l'on peut tirer le

Corollaire: *Si $K(u)$, continue sur $(-\infty, \infty)$, n'est pas l'inverse d'une fonction entière et s'il existe une suite de polynômes $p_n(u)$ satisfaisant à la condition* (I), *alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|K(u)||}{1+u^2}\,du = \infty. \tag{17}$$

Si $1/K(u)$ est une fonction entière, alors la condition (I) peut être satisfaite sans que l'intégrale (17) soit divergente. C'est le cas pour $K(u) = 1/\left(1 + \frac{u^2}{4!} + \frac{u^4}{8!} + \cdots\right) =$ $= 2/(\cosh\sqrt{u} + \cos\sqrt{u})$, où (I) est évidemment remplie, mais (17) converge.

Soit maintenant $1/K(u)$ une fonction entière. Si la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ n'est pas complète, il résulte des considérations ci-dessus que l'on peut construire les fonctions $S(z) \not\equiv 0$, $G(z) \not\equiv 0$. Donc $p(z) = S(z)/G(z)$. D'après le lemme 2** on conclut que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|G(x+i0)||}{1+x^2}\,dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|S(x+i0)||}{1+x^2}\,dx < \infty.$$

Parce que $K(x) = 1/p(x) = G(x + i\,0)/S(x + i\,0)$ presque partout, il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|K(x)||}{1 + x^2}\, d\,x < \infty.$$

Par conséquent, la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ est complète, si $K(u)$ satisfait aussi à la condition (II). Nous avons ainsi démontré le théorème de M. H. Pollard. Dans la démonstration nous n'avons pas utilisé les résultats obtenus par Loomis sur la transformée de Hilbert.

Si la fonction $K(u)$, $K(-u) = K(u)$, est telle qu'on ait $1/K(u) = C_0 + C_2 u^2 + C_4 u^4 + \cdots$, où $C_{2n} \geqq 0$, alors la condition (I) est toujours remplie et la condition (II) est suffisante. Mais dans le cas général, (I A) et (I B) sont nécessaires aussi pour que la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ soit complète. En effet, pour la fonction $K(u) = e^{-u^2(1+\cos u)}$ les conditions (I A) et (II) sont remplies. Comme on a $K(n\pi) = 1$ pour $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, il n'existe pas un polynôme $p(u)$ non constant tel que $|p(u) K(u)|$ reste borné. Donc la suite $\{u^n e^{-u^2(1+\cos u)}\}_0^\infty$ n'est pas complète quoique l'intégrale (17) diverge.

3. Soit maintenant l'ensemble $E \neq R$. Dans ce qui suit nous supposerons que $1/K(u)$ est une fonction entière et que le point $u = 0$ n'appartient pas à E, ce qui ne restreint pas la généralité des considérations.

Désignons par D un domaine simplement connexe du plan z jouissant des propriétés suivantes: a) D contient le demi-plan $y > 0$. b) Les distances de tous les points de D qui sont situés dans le demi-plan $y < 0$, aux points de l'ensemble E sont bornées inférieurement par un nombre positif $\delta > 0$. Le domaine D peut d'ailleurs se recouvrir partiellement.

Si $K(u)$ satisfait à la condition (I*) et si la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ n'est pas complète sur E, alors les fonctions $S(z)$ et $G(z)$ existent et ne se réduisent pas à zéro. Posons donc $\frac{1}{K}(K_1\, d\,\sigma_1 - K_2\, d\,\sigma_2) = d\,\varphi(u)$, $\varphi(u)$ étant une fonction à variation totale bornée. Alors nous aurons

$$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\varphi\,(u)}{u - z}. \tag{18}$$

Soit $\varphi(u) = \varphi_1(u) - \varphi_2(u) + i[\varphi_3(u) - \varphi_4(u)]$, les fonctions $\varphi_k(u)$ étant non décroissantes. Si, dans (18), on remplace $\varphi(u)$ par cette expression, on aura $S(z) = S_1(z) - S_2(z) + i[S_3(z) - S_4(z)]$, où on a posé

$$S_k(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\varphi_k(u)}{u-z}, \quad k=1,\,2,\,3,\,4.$$

La fonction $S_k(z)$ est holomorphe dans le domaine D. La partie imaginaire $I[S_k(z)]$ est positive pour $y>0$ et, d'après les propriétés du domaine D, $I[S_k(z)]$ est bornée inférieurement dans D: soit $I[S_k(z)] \geqq -M$. En effet, soit $z \in D$ un point situé dans le demi-plan $y<0$. Il résulte de la propriété b) que

$$I[S_k(z)] = y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,\varphi_k(u)}{(u-x)^2+y^2} \geqq \frac{y}{\delta^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\,\varphi_k(u) \geqq -\frac{1}{\delta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\varphi_k(u),$$

si $|y| \leqq 1$, et $I[S_k(z)] \geqq -\int_{-\infty}^{+\infty} d\,\varphi_k(u)$, si $y<-1$.

On peut représenter conformément le domaine D du plan z sur le demi-plan $\eta>0$ de la variable $\zeta = \xi + i\eta$ de manière qu'à $z=0$ et $z=\infty$ correspondent $\zeta=0$ et $\zeta=\infty$. Soit $\zeta=\zeta(z)$ la fonction qui réalise cette représentation. $S_k(z)$ devient une fonction holomorphe dans le demi-plan $\eta>0: S_k[z(\zeta)] = \sum_k(\zeta)$. Comme on peut écrire $\sum_k(\zeta) = [\sum_k(\zeta)+M]-M$, où $I[\sum_k(\zeta)+M] \geqq 0$ pour $\eta>0$, il existe, d'après le lemme 2*, une fonction $\alpha_k(t)$ à variation totale bornée telle qu'on ait

$$\sum\nolimits_k(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+t\zeta)\,d\,\alpha_k(t)}{t-\zeta}.$$

Donc, en posant $\alpha(t) = \alpha_1(t)-\alpha_2(t)+i[\alpha_3(t)-\alpha_4(t)]$, nous aurons

$$\sum(\zeta) = S[z(\zeta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\,d\,\alpha(t).$$

Les mêmes considérations sont valables pour la fonction $G[z(\zeta)] = \Gamma(\zeta)$. Il existe donc une fonction $\beta(t)$ telle que, pour $\eta>0$,

$$\Gamma(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\,d\beta(t).$$

Par conséquent, $\sum(\xi+i0)$ et $\Gamma(\xi+i0)$ existent p. p. et on aura $\sum(\xi+i0)/\Gamma(\xi+i0) =$ $= p[z(\xi)] = 1/K[z(\xi)]$. On déduit du lemme 2*, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|K[z(\xi)]||}{1+\xi^2}\, d\xi < \infty. \tag{19}$$

Nous avons donc démontré

Théorème II. *Soit* $K(u)$ *une fonction satisfaisant à la condition* (I*). *Si pour un domaine* D *quelconque avec les propriétés* a) *et* b) *on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log|K[z(\xi)]||}{1+\xi^2}\, d\xi = \infty, \tag{20}$$

où $z = z(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, *est la fonction qui réalise la représentation conforme du domaine* D *sur le demi-plan* $\eta > 0$, *alors la suite* $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ *est complète sur l'ensemble* E.

Choisissons maintenant le domaine D de la manière suivante: Soit h un nombre positif et posons $E_h = \bigcup_{x \in E} [x e^{-h}, x e^h]$, où $[x e^{-h}, x e^h]$ désigne l'intervalle fermé d'extrémités $x e^{-h}$ et $x e^h$. Désignons par V la classe des fonctions $v(x)$, $-\infty < x < \infty$, continues, jouissant des propriétés suivantes: 1) $v(x)$ possède une dérivée $v'(x)$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} x[v'(x)]^2\, dx < \infty$. 2) $v(x) = \frac{1}{2}$ pour $x \in E_h$ et $\frac{1}{2} \leq v(x) \leq \frac{3}{2} - \varepsilon$ pour $x \notin E_h$, où $\varepsilon < 1$ est un nombre positif.

Désignons par C_t l'arc du cercle $z = i t e^{i\vartheta}$ avec $-\pi v(-t) < \vartheta < \pi v(t)$, la fonction $v(t)$ appartenant à la classe V. Soit D le domaine $\bigcup_{0 < t < \infty} C_t$. Il est aisé de voir que D a les propriétés a) et b). Donc, (19) est valable lorsque $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ n'est pas complet sur E.

D'après les résultats obtenus par M. Warshawski [9] et Mme Lelong-Ferrand [2], la fonction $\zeta(z)$ qui réalise la représentation conforme du domaine D sur le demi-plan $\eta > 0$ jouit de la propriété suivante: En posant $|z| = r$, on a dans tout le domaine D

$$|\zeta(z)| = A(1 + \varepsilon_r) \cdot \exp\left\{\int_{r_0}^{r} \frac{dt}{[v(t) + v(-t)]\, t}\right\}, \tag{21}$$

A et r_0 sont des constantes, ε_r est une fonction de z telle que $\varepsilon_r \to 0$ uniformément avec $r \to \infty$. On suppose, bien entendu, que $v(t)$ appartient à la classe V.

Tout point u de l'ensemble E est le centre d'un segment de longueur $2|u|(1 - e^{-h})$ qui fait partie de la frontière de D. Par suite, on pourra prolonger la fonction $\zeta(z)$ dans le demi-plan $y < 0$ à travers ce segment et on aura $\zeta(\bar{z}) = \bar{\zeta}(z)$. Décrivons autour du point u comme centre un cercle de rayon $\varkappa|u| = a$, où $0 < \varkappa < 1 - e^{-h}$. La fonction $\zeta(z)$ ne s'annulant pas pour $z \neq 0$, il résulte de la formule de Poisson que

$$\log \zeta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a e^{i\vartheta} + (z-u)}{a e^{i\vartheta} - (z-u)} \log |\zeta(u + a e^{i\vartheta})| \, d\vartheta + i \cdot I [\log \zeta(u)].$$

On peut dériver le membre à droite sous le signe de l'intégrale. On en obtient pour $z = u$

$$\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} \log |\zeta(u + a e^{i\vartheta})| \, d\vartheta. \tag{22}$$

D'autre part, il résulte de (21), en tenant compte de la propriété 1) de $v(x)$, que l'on a

$$\log |\zeta(z)| = \lambda + \frac{1}{v(u) + v(-u)} \log |z| + o(1), \quad |z - u| \leq a,$$

où λ est une constante et $o(1) \to 0$ uniformément avec $r \to \infty$. Il s'ensuit de (22) que

$$\frac{\zeta'(u)}{\zeta(u)} = \frac{1}{\pi a [v(u) + v(-u)]} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} \log |u + a e^{i\vartheta}| \, d\vartheta + \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} o(1) e^{-i\vartheta} \, d\vartheta$$

d'où l'on obtient, $\zeta(u) = \xi$ étant réelle,

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{v(u) + v(-u)} \cdot \frac{du}{u} + o(1) \frac{du}{u}, \quad u \in E. \tag{23}$$

Désignons par $\tilde{E}$ l'ensemble des points de l'axe réel ξ qui correspond à E. Comme $\xi = 0$ n'appartient pas à $\tilde{E}$, on déduit de (19), si la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ n'est pas complète, que

$$\int_{\tilde{E}} |\log |K[x(\xi)]|| \cdot \xi^{-2} \, d\xi < \infty.$$

Il résulte maintenant de (21) et (23) que

$$\int_E |\log |K(u)|| \cdot \exp\left\{-\int^{|u|} \frac{dt}{[v(t) + v(-t)]\, t}\right\} \cdot \frac{du}{|u|} < \infty. \tag{24}$$

Nous avons donc démontré

Théorème III. *Soit $K(u)$, $u \in E$, une fonction continue et soit $v(r)$ une fonction appartenant à la classe V. Si $K(u)$ satisfait aux conditions* (I* A), (I* B) *et à*

$$\text{(II*)} \qquad \int_E |\log|K(u)||\cdot \exp\left\{-\int^{|u|}\frac{dt}{[v(t)+v(-t)]\,t}\right\}\cdot\frac{du}{|u|}=\infty,$$

alors la suite $\{u^n K(u)\}_0^\infty$ *est complète sur l'ensemble* E.

La condition (II*) est analogue à celle de M. Mandelbrojt, qui a supposé, au lieu de (I*), que $-\log K(u)$ soit une fonction convexe de $\log u$.

Bibliographie

[1]. G. Herglotz, Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, *Leipz. Ber.*, 63 (1911), pp. 501–511.

[2]. J. Lelong-Ferrand, Sur la représentation conforme des bandes, *Journal d'analyse mathématique*, Vol. II/1 (1952), pp. 51–71.

[3]. S. Mandelbrojt, General theorems of closure, *The Rice Institute Pamphlet*, 38 (1951).

[4]. H. Pollard, Solution of Bernstein's Approximation Problem, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 4 (1953), pp. 869–875.

[5]. F. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Zeitschrift*, Bd. 18 (1923), pp. 87–95.

[6]. G. Szegö, Über die Randwerte einer analytischen Funktion, *Math. Annalen*, 84 (1921), pp. 232–244.

[7]. I. Vidav, Sur la solution de H. Pollard du problème d'approximation de S. Bernstein, *C. R. Acad. Sc.*, 238 (1954), pp. 1959–1961.

[8]. —, Sur une généralisation d'un théorème de M. S. Mandelbrojt, *C. R. Acad. Sc.*, 238 (1954), pp. 2138–2140.

[9]. S. E. Warshawski, On conformal mapping of infinite strips, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 51 (1942), pp. 280–335.