SUR L'ÉTUDE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER D'INDÉTERMINATION. II.

PAR

J. MALMQUIST

à STOCKHOLM.

1. Réduction d'un système différentiel à une forme normale.

1. Dans la première partie[1] nous avons étudié un système

$$x^{k+1}\frac{d\,y_i}{d\,x} = \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\, x) \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{1}$$

sous la supposition que l'équation caractéristique n'a que des racines simples et différentes de 0 et qu'il existe un système de séries de puissances de x qui satisfont formellement au système (1). À chaque solution $y_1, \ldots y_n$ correspond un domaine d'existence dans lequel les fonctions $y_1, \ldots y_n$ sont régulières pour $x \neq 0$ et qui est limité par certaines courbes en nombre fini ou infini définies par des équations $|x| = r$, $|y_1| = r'$, $\ldots$ $|y_n| = r'$ ou par certaines de ces équations. Il s'agissait d'étudier la forme d'un domaine d'existence d'une solution donnée et la représentation analytique de la solution dans ce domaine.

Dans cette partie nous allons étudier le cas général où l'équation caractéristique a des racines multiples dont l'une peut être 0. Nous supposons que les coefficients des séries

$$\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\, x) = \sum a_{i,\,i_1,\ldots i_n}(x)\, y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}$$

[1] Ce journal, t. 73, p. 87—129. En renvoyant dans la suite à ce travail nous le désignons par (I).

sont régulières sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$ et asymptôtes à des séries de puissances de x, et nous supposons que les séries $\mathfrak{P}_i$ convergent pour $|x| < r$, $|y_i| < r'$ $(i = 1, \ldots n)$. De plus, nous supposons qu'il existe un système de séries[1]

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_i^{(\nu)} x^{\frac{\nu}{p}} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

qui satisfont formellement au système (1), p étant un entier $\geqq 1$.

Sous ces suppositions le système (1) peut être transformé par des substitutions linéaires et par une substitution $x = t^q$ à un système qui a la forme normale suivante

$$(2) \qquad \begin{aligned} x^{k_i+1}\frac{dy_i}{dx} &= a_i(x) + f_i(x)\, y_i + x^{k_i}(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) \\ &\quad + x^{k_i+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j + x^{\mu_i}\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) \\ &\qquad (i = 1, \ldots n). \end{aligned}$$

Ici $k_1, \ldots k_n$ sont des entiers tels que

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_n \geqq 0.$$

Nous supposons en général que $k_1 > 0$. Si $k_m > 0$, $k_i = 0$ $(i = m+1, \ldots n)$ on a $f_i(x) = 0$ $(i = m+1, \ldots n)$. Pour $i \leqq m$ $f_i(x)$ est une fonction entière et rationnelle de x de degré $k_i - 1$ au plus et satisfaisant à $f_i(0) \neq 0$. Certaines des fonctions $f_i(x)$ peuvent être identiques: si $f_1(x) = \cdots = f_{n_1}(x) \neq f_i(x)$, $i > n_1$, on a $k_1 = \cdots = k_{n_1}$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $i = 2, \ldots n_1$; de même, si $f_{n_1+1}(x) = \cdots = f_{n_2}(x) \neq f_i(x)$, $i > n_2$, on a $k_{n_1+1} = \cdots = k_{n_2}$, $\varepsilon_{n_1+1} = 0$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 pour $i = n_1 + 2, \ldots n_2$; et ainsi de suite. Pour les fonctions $a_i(x)$ on a

$$a_i(x) \sim a_i^{(N)} x^N + \cdots,$$

le nombre N pouvant être pris aussi grand que l'on veut. Les séries $\mathfrak{P}_i$ commencent par des termes de degré $\geqq 2$ par rapport à $y_1, \ldots y_n$.

C'est pour un système de la forme (2) que nous allons étudier le problème dont nous avons parlé au commencement. Dans le cas où 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique nous aurons ainsi des résultats aussi complets que

[1] Nous ne discutons pas l'existence d'un tel système de séries. Probablement les séries existent en général, mais dans certains cas particuliers elles doivent être remplacées par des séries qui contiennent des logarithmes.

les résultats obtenus dans (I). Mais les résultats sont moins complets dans le cas où o est racine de l'équation caractéristique. Il peut même arriver que l'on n'obtient alors que des renseignements très insuffisants concernant les solutions d'un système (1). Considérons p. ex. le cas où les seconds membres de (1) ne contiennent que des termes de degré $\geqq 2$ par rapport à $y_1, \ldots y_n$. Alors le système (1) se transforme à la forme (2) par une substitution de la forme

$$y_i = x^{\nu} z_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

où ν est un entier positif. Le système transformé aura la forme

$$x \frac{d z_i}{d x} = - \nu z_i + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Le domaine d'existence d'une solution de ce système ne s'étend pas en général à $x = 0$. Néanmoins il peut arriver que le domaine d'existence d'une solution du système primitif s'étend à $x = 0$. L'étude complète des solutions de ce système doit être faite par d'autres méthodes.

Entre ce cas extrême et le cas où o n'est pas racine de l'équation caractéristique il y a des cas intermédiaires où l'étude du système (2) donne des renseignements plus ou moins complets concernant les solutions du système (1).

Les nombres μ_i dans le système (2) peuvent être supposés aussi grands que l'on veut. Mais pour que l'étude du système (2) donne des renseignements les plus complets concernant les solutions de (1) on doit prendre μ_i aussi petits que possible.

2. La réduction d'un système (1) à la forme (2) dépend en général sur la réduction d'un système d'équations différentielles linéaires

$$(3) \qquad x^{k+1} \frac{d y_i}{d x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots n)$$

à une forme normale correspondante

$$(4) \qquad x^{k_i+1} \frac{d y_i}{d x} = f_i(x) y_i + x^{k_i}(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) + x^{k_i+1} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots n).$$

La réduction d'un système (3) à un système (4) peut toujours être effectuée algébriquement à l'aide d'une suite finie de substitutions linéaires et d'une substitution $x = t^q$. On peut employer d'une part des substitutions linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles de la variable indépendante et dont le déterminant est $\neq 0$ quand cette variable prend la valeur 0, d'autre part des substitutions de la forme

$$x = t^q, \quad y_i = t^{\alpha_i} z_i \qquad (i = 1, \ldots n), \tag{5}$$

où q est un entier $\geqq 1$ et $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ sont des entiers $\geqq 0$. C'est ce qui résulte d'un travail de M. Hukuhara[1]. La réduction a été faite aussi par M. Horn[2] dans des cas particuliers.

Au sujet de cette réduction nous faisons une remarque complémentaire. En supposant que $f_1(x) = \cdots = f_{n_1}(x) \neq f_i(x)$, $i > n_1$, il est loisible de supposer qu'aucune des différences $r_i - r_j$ $(i, j = 1, \ldots n_1)$ n'est égale à un entier $\neq 0$; de même, en supposant que $f_{n_1+1}(x) = \cdots = f_{n_2}(x) \neq f_i(x)$, $i > n_2$, il est loisible de supposer qu'aucune des différences $r_i - r_j$ $(i, j = n_1 + 1, \ldots n_2)$ n'est égale à un entier $\neq 0$; et ainsi de suite. Il suffit de le montrer pour un système de la forme suivante

$$x \frac{d y_i}{d x} = r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{6}$$

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij}^{(1)} x + a_{ij}^{(2)} x^2 + \cdots.$$

Nous écrivons ce système de la manière suivante

$$\begin{aligned} x \frac{d y_i}{d x} &= r_{n_1} y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots n_1) \\ x \frac{d y_i}{d x} &= r_{n_2} y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = n_1 + 1, \ldots n_2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{7}$$

les nombres $r_{n_1}, r_{n_2}, \ldots$ étant distincts. Nous pouvons supposer que

$$\Re r_{n_1} \geqq \Re r_{n_2} \geqq \cdots.$$

Supposons que $r_{n_1} - r_{n_2}$ soit un entier positif. Par la substitution

$$y_i = x z_i \qquad (i = 1, \ldots n_1)$$

[1] Masuo Hukuhara, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. II. Journ. Fac. Sc. Hokkaido imp. Univ. V (1937), p. 123—166. Voir p. 157—165.

[2] J. Horn, Unbestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungen mit mehrfachen Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Math. Zeitschr., 44, 4 (1938), p. 481—506.

on aura

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
& x\frac{dz_i}{dx} = (r_{n_1} - 1)z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}^{(1)} y_j + \cdots && (i = 1, \ldots n_1) \\
& x\frac{dy_i}{dx} = r_{n_2} y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \cdots && (i = n_1 + 1, \ldots n_2) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

les termes non écrits contenant x comme facteur.

Supposons d'abord que $r_{n_1} - r_{n_2} > 1$. L'équation caractéristique de (8) a les racines $r_{n_1} - 1$, $r_{n_2}, \ldots$ d'ordres n_1, $n_2 - n_1, \ldots$ Par une substitution de la forme

$$
z_i = u_i + \sum_{j=n_1+1}^{n} b_{ij} y_j \qquad (i = 1, \ldots n_1),
$$

où b_{ij} sont des constantes, on aura un système de la forme (7), où r_{n_1} est remplacé par $r_{n_1} - 1$. En effet, il faut et il suffit que b_{ij} satisfassent aux équations

$$
(r_{n_1} - 1) b_{ij} + \varepsilon_i b_{i-1,j} + a_{ij}^{(1)} = r_j b_{ij} + \varepsilon_{j+1} b_{i,j+1}
$$
$$
(i = 1, \ldots n_1;\ j = n_1 + 1, \ldots n)
$$

où $\varepsilon_{n+1} = 0$. Ces équations déterminent b_{ij}: d'abord on pose $j = n$ et on aura successivement b_{in} pour $i = 1, \ldots n_1$; ensuite on pose $j = n - 1$, et ainsi de suite.

Supposons ensuite que $r_{n_1} - r_{n_2} = 1$. L'équation caractéristique de (8) a les racines r_{n_2}, $r_{n_3}, \ldots$ d'ordres n_2, $n_3 - n_2, \ldots$ Par une substitution linéaire on aura un système dont les n_2 premières équations ont la forme

$$
x\frac{dy_i}{dx} = r_{n_2} y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n_2).
$$

En poursuivant ces raisonnements on aboutira à un système (6) où aucune des différences $r_i - r_j$ $(i, j = 1, \ldots n)$ n'est égale à un entier $\neq 0$.

3. Appliquons maintenant la réduction précédente à un système (1). Nous posons

$$
\mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) = a_i(x) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + \sum_{i_1 + \cdots + i_n \geqq 2} a_{i, i_1, \ldots i_n}(x) y_1^{i_1} \ldots y_n^{i_n}.
$$

Nous supposons qu'on a fait préalablement une substitution $x = t^q$ de sorte que d'une part le système (1) soit satisfait formellement par des séries

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_i^{(\nu)} x^\nu \qquad (i = 1, \ldots n),$$

d'autre part les nombres q figurant dans les substitutions (5) soient égaux à 1. De plus nous supposons qu'on a fait une substitution

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{N} c_i^{(\nu)} x^\nu + z_i \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Nous pouvons donc supposer que

$$a_i(x) \sim a_i^{(N')} x^{N'} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où N' peut être supposé aussi grand que l'on veut.

Évidemment la forme du système (1) n'est pas changée par une substitution linéaire dont le déterminant est $\neq 0$ pour $x = 0$.

Par une substitution (5) où $q = 1$ on aura

$$x^{k+1} \frac{d z_i}{d x} = - \alpha_i x^k z_i + a_i(x) x^{-\alpha_i} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) x^{\alpha_j - \alpha_i} z_j$$
$$+ \sum_{i_1 + \cdots + i_n \geqq 2} a_{i, i_1, \ldots i_n}(x) x^{\alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_n i_n - \alpha_i} z_1^{i_1} \ldots z_n^{i_n}$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

Les nombres $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ doivent être choisis de manière que les séries asymptotiques pour $a_{ij}(x) x^{\alpha_j - \alpha_i}$ ne contiennent aucune puissance négative. Ces nombres ne sont déterminés qu'à un entier additif près. On peut choisir ce nombre additif de manière que les séries asymptotiques pour

$$a_{i, i_1, \ldots i_n}(x) x^{\alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_n i_n - \alpha_i}$$

ne contiennent que des puissances positives de x; le plus petit des exposants peut être supposé aussi grand que l'on veut. On peut supposer le nombre N' assez grand pour que les séries asymptotiques pour

$$a_i(x) x^{-\alpha_i}$$

ne contiennent que des puissances positives d'exposants aussi grands que l'on veut.

D'après cela, il est évident que l'on aura enfin un système de la forme

$$x^{k+1}\frac{dy_i}{dx} = a_i(x) + f_i(x)\,y_i + x^k(r_i\,y_i + \varepsilon_i\,y_{i-1}) + x^{k+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,y_j + x^{\mu}\sum_{i_1+\cdots+i_n\geq 2} a_{i,\,i_1,\ldots i_n}(x)\,y_1^{i_1}\ldots y_n^{i_n}$$
$$(i = 1, \ldots n),$$

où

$$a_i(x) \sim a_i^{(N)}x^N + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les nombres N, μ peuvent être supposés aussi grands que l'on veut. Si $f_i(x)$ contient x^{k-k_i} comme facteur, ce qui veut dire que l'équation caractéristique a la racine 0, l'équation $i^{\text{ème}}$ peut être divisée par x^{k-k_i}. Par suite, on aura un système de la forme (2).

2. Théorèmes d'existences.

4. Nous supposons comme précédamment qu'on a fait une substitution $x = t^q$ de sorte que d'une part le système (1) soit satisfait formellement par des séries

(9) $$y_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_i^{(\nu)}x^{\nu} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

d'autre part les nombres q entrant dans les substitutions (5) soient égaux à 1.

Nous allons démontrer l'existence d'une solution ou d'un faisceau de solutions du système (1) asymptôtes aux séries (9) dans un certain secteur. Nous considérons le système (2) correspondant et nous écrivons ce système de la manière suivante

(10)
$$x^{k_i+1}\frac{dy_i}{dx} = s_i\,y_i + a_i(x) + x\,L_i(y_1, \ldots y_n;\; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\; x)$$
$$(i = 1, \ldots m)$$
$$x\frac{dy_i}{dx} = r_i\,y_i + \varepsilon_i\,y_{i-1} + a_i(x) + x\,L_i(y_1, \ldots y_n;\; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\; x)$$
$$(i = m+1, \ldots n)$$

où l'on a

$$k_i > 0,\; s_i \neq 0 \qquad (i = 1, \ldots m)$$

et L_i sont linéaires et homogènes en $y_1, \dots y_n$

$$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\, y_j \qquad (i = 1, \dots n).$$

Il y a un nombre K de manière que

$$(11)\qquad \begin{aligned} &|a_i(x)| < K|x|^N, \quad |a_{ij}(x)| < K \\ &|\mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x)| < K \max(|y_1|^2, \dots |y_n|^2) \\ &|\mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x) - \mathfrak{P}_i(\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n; x)| < K \max(|y_j|, |\bar{y}_j|) \sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}_i| \\ &\qquad (i, j = 1, \dots n) \end{aligned}$$

pour $|x| < r$, $|y_i| < r'$, $|\bar{y}_i| < r'$ $(i = 1, \dots n)$.

Nous considérons les arguments de x tels que

$$\left| e^{s_i x^{-k_i}} \right| = 1$$

pour une des valeurs $i = 1, \dots m$. D'après M. Hukuhara nous désignons ces arguments comme des *arguments singuliers*.

Posant $x = r e^{i\varphi}$ nous prenons un secteur

$$X: \quad \varphi' < \varphi < \varphi''$$

satisfaisant à certaines conditions. D'abord φ', φ'' doivent être différents des arguments singuliers. Ensuite, nous distinguons deux cas

1) pour chaque valeur de i $(i = 1, \dots m)$ il y a des directions appartenant à X telles que la fonction

$$e^{-s_i x^{-k_i}}$$

tende vers l'infini quand x tend vers 0 dans une telle direction

2) pour certaines valeurs de i la fonction

$$e^{-s_i x^{-k_i}}$$

tend vers 0 quand x tend vers 0 dans une direction quelconque appartenant à X.

Nous considérons d'abord le premier cas. Nous introduisons les variables auxiliaires

$$u_i = -\frac{1}{k_i} x^{-k_i} \;\; (i = 1, \ldots m), \;\; u = \log x,$$

nous prenons un nombre k de manière que

$$\varphi'' - \varphi' = \frac{\pi}{k}$$

et nous introduisons la variable

$$u' = -\frac{1}{k} x^{-k}.$$

Soient U_i, U' les secteurs dans les plans u_i, u' correspondant à X.

Dans le cas où $k_i > k$ pour certaines valeurs de i nous posons la condition suivante pour X. Soit $\bar{U}_i$ le secteur partiel de U_i tel que $e^{-s_i u_i}$ tende vers 0 quand u_i tend vers l'infini dans une direction appartenant à $\bar{U}_i$. A chaque point u_i de U_i doit correspondre une demi-droite partant de u_i qui appartient à U_i et dont la direction appartient à $\bar{U}_i$ et fait un angle plus grand qu'un nombre ε avec chacune des directions limites de $\bar{U}_i$.

Quant à l'existence de secteurs X satisfaisant à cette condition nous faisons la remarque suivante. Partons d'un secteur

$$\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k_1},$$

φ_0 et $\varphi_0 + \frac{\pi}{k_1}$ étant distincts des arguments singuliers, et augmentons ce secteur dans les deux directions sans que l'on rencontre un argument singulier. Soit X un secteur d'ouverture $< \frac{2\pi}{k_1}$ obtenu de cette manière et supposons que le cas 1) ait lieu pour ce secteur, ce qui est certainement le cas quand

$$\frac{\pi}{k_m} < \varphi'' - \varphi'.$$

Alors X satisfait à la condition posée. C'est ce que l'on voit de la figure 1. $A'OB'$ est le secteur dans le plan u_i d'ouverture $\leqq \pi$ correspondant au secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k_1}$ dans le plan x d'où l'on est parti. AOB est le secteur U_i; on suppose que $k_i > k$. EOF est une ligne telle que $|e^{s_i u_i}| = 1$ quand u_i se trouve sur cette ligne, les directions OE, OF correspondent donc à des arguments

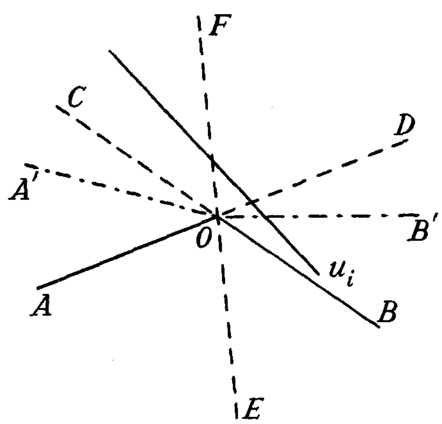


Fig. 1.

singuliers. OF appartient nécessairement au secteur COD, car OE ou OF n'appartient à aucun des secteurs AOA', BOB' d'après la définition de X. On suppose que $e^{-s_i u_i}$ tend vers 0 quand u_i tend vers l'infini dans une direction de même côté de EOF que OA' p. ex. Alors AOF est le secteur $\bar{U}_i$. À partir d'un point quelconque u_i de U_i on peut tirer une demi-droite qui appartient à U_i et dont la direction appartient à $\bar{U}_i$ et fait un angle plus grand que ε avec chacune des directions OA, OF.

5. Pour un secteur X satisfaisant aux conditions précédentes nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 1. *Il y a une solution et une seule du système* (1) *asymptôte aux séries* (9) *dans X.*

Nous allons démontrer l'existence d'une solution du système (10) à l'aide des approximations successives suivantes

(12)
$$y_{i,\nu+1} = e^{s_i u_i} \int_{\infty\, l_i}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x) + \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)]\, du_i$$
$$(i = 1, \ldots m)$$
$$y_{i,\nu+1} = e^{r_i u} \int_{\infty\, l}^{u} e^{-r_i u} [\varepsilon_i y_{i-1,\nu+1} + a_i(x) + x L_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x) + \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)]\, du,$$
$$(i = m+1, \ldots n),$$

où $y_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ et ν prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ...

Les lignes d'intégration l_i, l sont définies de la manière suivante. Soit U'' la partie infinie du demi-plan U' limitée par une droite, qui est parallèle à la droite limitant U' et dont la distance R' à l'origine est définie par

$$R' = \frac{1}{k}\bar{r}^{-k},$$

où $\bar{r}$ est un nombre qui sera assujetti à certaines conditions d'inégalité. Soient $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{X}$ les domaines correspondants dans les plans u_i, u, x. Le domaine $\mathfrak{U}_i$ est limité par une courbe convexe qui s'étend à l'infini dans les directions limites du secteur U_i correspondant à X. Cette courbe a la même forme que la courbe décrite par

$$(R' + i\,t)^{\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{k_i}{k} + 1$$

quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. En posant

$$(R' + i\,t)^{\varkappa} = \varrho\, e^{i\,\varphi}$$

on aura

$$\varrho = \left(\frac{R'}{\cos\frac{\varphi}{\varkappa}}\right)^{\varkappa},$$

et la courbe s'obtient quand φ varie de $-\varkappa\frac{\pi}{2}$ à $\varkappa\frac{\pi}{2}$. Elle a la forme d'une parabole si $\varkappa > 1$, elle a des asymptôtes passant par l'origine si $\varkappa < 1$ (voir la figure 2).

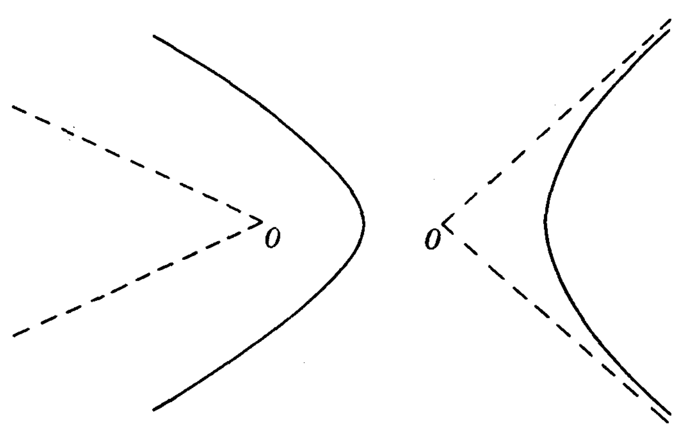


Fig. 2.

Pour $k_i > k$ il résulte de la condition posée pour X qu'on peut tirer à partir d'un point quelconque de $\mathfrak{U}_i$ une demi-droite l_i qui appartient à $\mathfrak{U}_i$ et dont la direction appartient à $\bar{U}_i$ et fait un angle $> \varepsilon$ avec chacune des directions limites de $\bar{U}_i$. Pour $k_i \leqq k$ la supposition que X satisfait à 1), p. 8, a pour conséquence qu'on peut tirer à partir d'un point quelconque de $\mathfrak{U}_i$ une demi-droite l_i appartenant à $\mathfrak{U}_i$ de direction fixe et telle que $e^{-s_i u_i}$ tende vers o quand u_i tend vers l'infini le long de l_i.

La courbe qui limite le domaine $\mathfrak{U}$ a la même forme que la courbe décrite par

$$-\frac{1}{k}\log(R' + i\,t)$$

quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$. En posant cette expression égale à $x + iy$ on aura

$$x = -\frac{1}{k}\log R' + \frac{1}{k}\log\cos ky.$$

La courbe s'obtient quand y varie de $-\frac{\pi}{2k}$ à $\frac{\pi}{2k}$ (voir la figure 3).

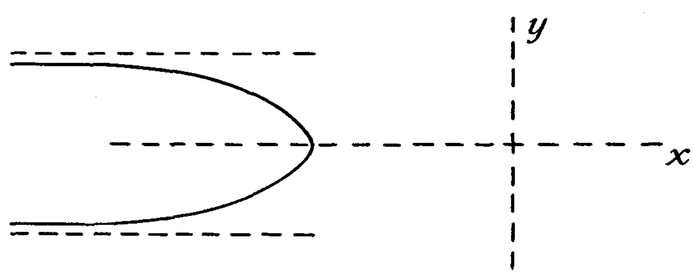


Fig. 3.

A partir d'un point quelconque de $\mathfrak{U}$ on peut tirer une demi-droite l parallèle à l'axe réel et appartenant à $\mathfrak{U}$. e^u tend vers o quand u tend vers l'infini le long de l.

6. Nous démontrons la convergence des approximations successives (12) dans le cas où tous les nombres ε_i $(i=m+1,\dots n)$ sont o. Pour la démonstration dans le cas où il y a des nombres ε_i qui sont $\neq$ o nous renvoyons au n:o 5 de (I).

Si v_i est un point quelconque de l_i on a

$$\Re\,[s_i(v_i - u_i)] > \varepsilon'\,|v_i - u_i|,$$

où ε' est un certain nombre positif. Si v est un point quelconque de l on a de même

$$\Re\,[(r_i - N)(v - u)] > \varepsilon'\,|v - u| \qquad (i = m+1, \dots n)$$

sous la supposition que

$$\Re\, r_i < N \qquad (i = m+1, \dots n).$$

On peut évidemment prendre N assez grand pour que ces inégalités soient remplies.

K étant le nombre qui figure dans les inégalités (11) nous prenons $\bar{r} \leqq r$ de manière que

$$8K\bar{r} < \varepsilon', \quad 4K\bar{r}^N < \varepsilon' r', \quad \bar{r} < \left(\frac{\varepsilon'}{N}\right)^{1/k_m}, \quad 2nK\bar{r} < \varepsilon'. \tag{13}$$

Supposons que $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ soient des fonctions de x régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfaisant aux inégalités

$$|y_{i\nu}| < \frac{4K}{\varepsilon'}|x|^N \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Alors, il résulte de (11), (12) que $y_{i,\nu+1}$ $(i = 1, \ldots n)$ sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|x|^{-N}|y_{i,\nu+1}| < |x|^{-N}|e^{s_i u_i}|\int_{u_i}^{\infty}|e^{-s_i u_i}||x|^N|du_i|\cdot K\left[1 + \frac{4K}{\varepsilon'}\bar{r} + \left(\frac{4K}{\varepsilon'}\right)^2\bar{r}^N\right]$$
$$(i = 1, \ldots m)$$

$$|x|^{-N}|y_{i,\nu+1}| < |x|^{-N}|e^{r_i u}|\int_{u}^{\infty}|e^{-r_i u}||x|^N|du|\cdot K\left[1 + \frac{4K}{\varepsilon'}\bar{r} + \left(\frac{4K}{\varepsilon'}\right)^2\bar{r}^N\right]$$
$$(i = m + 1, \ldots n).$$

Maintenant on a le lemme suivant

Lemme. — *Les expressions*

$$|x|^{-N}|e^{s_i u_i}|\int_{u_i}^{\infty}|e^{-s_i u_i}||x|^N|du_i| \qquad (i = 1, \ldots m)$$

$$|x|^{-N}|e^{r_i u}|\int_{u}^{\infty}|e^{-r_i u}||x|^N|du| \qquad (i = m + 1, \ldots n)$$

sont plus petites que $\frac{2}{\varepsilon'}$ *sous la condition que les nombres* R_i *correspondant à* $\bar{r}$ *satisfassent à*

$$R_i > \frac{1}{\varepsilon'}\frac{N}{k_i} \qquad (i = 1, \ldots m).$$

Pour $i = 1, \ldots m$ nous avons démontrés ces inégalités dans (I), p. 99, nous y renvoyons. Pour $i = m + 1, \ldots n$ on a immédiatement

$$|x|^{-N} |e^{-r_i u}| \int_u^\infty |e^{-r_i u}| |x|^N |du| = |e^{-(N-r_i)u}| \int_u^\infty |e^{(N-r_i)u}| |du| < \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Les inégalités $R_i > \frac{1}{\varepsilon'} \frac{N}{k_i}$ sont remplies car, R_i étant égal à $\frac{1}{k_i} \bar{r}^{-k_i}$, elles peuvent s'écrive $\bar{r} < \left(\frac{\varepsilon'}{N}\right)^{1/k_i}$.

On a

$$1 + \frac{4K}{\varepsilon'} \bar{r} + \left(\frac{4K}{\varepsilon'}\right)^2 \bar{r}^N < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 2$$

car on peut supposer que $N > 1$. Par suite, on aura

$$|y_{i,\nu+1}| < \frac{4K}{\varepsilon'} |x|^N \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Il est donc démontré que les approximations successives (12) définissent une suite infinie de fonctions $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|y_{i\nu}| < \frac{4K}{\varepsilon'} |x|^N \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Maintenant on conclut que

$$|y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}| < 2K\bar{r} |e^{s_i u_i}| \int_{u_i}^\infty |e^{-s_i u_i}| \sum_{j=1}^n |y_{j\nu} - y_{j,\nu-1}| |du_i|$$

$$(i = 1, \ldots m)$$

$$|y_{i,\nu+1} - y_{i\nu}| < 2K\bar{r} |e^{r_i u}| \int_u^\infty |e^{-r_i u}| \sum_{j=1}^n |y_{j\nu} - y_{j,\nu-1}| |du|$$

$$(i = m + 1, \ldots n).$$

Désignons par M_ν le maximum de $\sum_{j=1}^n |y_{j\nu} - y_{j,\nu-1}|$ pour x dans $\mathfrak{X}$. Alors on aura

$$M_{\nu+1} < \frac{2nK}{\varepsilon'} \bar{r} M_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

d'où

$$M_{\nu+1} < M_1 \left(\frac{2nK}{\varepsilon'} \bar{r}\right)^\nu.$$

Comme $2nK\bar{r} < \varepsilon'$ (voir (13)) on voit donc que les approximations successives convergent uniformément dans $\mathfrak{X}$.

À la limite on aura un système de fonctions $y_1, \ldots y_n$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|y_i| < \frac{4K}{\varepsilon'} |x|^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et aux équations

$$(14) \quad \begin{aligned} y_i &= e^{s_i u_i} \int\limits_{\infty l_i}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_1, \ldots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, du_i \\ &\qquad (i = 1, \ldots m) \\ y_i &= e^{r_i u} \int\limits_{\infty l}^{u} e^{-r_i u} [a_i(x) + x L_i(y_1, \ldots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, du \\ &\qquad (i = m + 1, \ldots n) \end{aligned}$$

et par suite aux équations (10).

7. Supposons maintenant qu'il existe un nouveau système de fonctions $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ qui soient régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfassent au système (10) et à des inégalités

$$|\bar{y}_i| < K_1 |x|^N \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Soit $\mathfrak{X}_1$ un domaine semblable à $\mathfrak{X}$ défini à l'aide d'un nombre $\bar{r}_1 < \bar{r}$ satisfaisant à

$$2nK(\bar{r}_1 + K_1 \bar{r}_1^N) < \varepsilon',$$

et supposons que x appartienne à $\mathfrak{X}_1$. On conclut que

$$\bar{y}_i = C_i e^{s_i u_i} + e^{s_i u_i} \int\limits_{\infty l_i}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \mathfrak{P}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)]\, du_i$$

$$(i = 1, \ldots m)$$

$$\bar{y}_i = C_i e^{r_i u} + e^{r_i u} \int_{\infty l}^{u} e^{-r_i u} [a_i(x) + x L_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \mathfrak{P}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)] du$$

$$(i = m + 1, \ldots n).$$

On peut faire tendre u_i vers l'infini de manière que $e^{s_i u_i} \to \infty$. Les fonctions $x^{-N} e^{r_i u}$ $(i = m + 1, \ldots n)$ tendent vers l'infini quand x tend vers o. Par suite, on doit avoir $C_i = 0$ $(i = 1, \ldots n)$. Les fonctions $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ satisfont donc aux équations (14). Alors, on aura

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(\bar{r}_1 + K_1 \bar{r}_1^N) |e^{s_i u_i}| \int_{u_i}^{\infty} |e^{-s_i u_i}| \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j| |du_i|$$

$$(i = 1, \ldots m)$$

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(\bar{r}_1 + K_1 \bar{r}_1^N) |e^{r_i u}| \int_{u}^{\infty} |e^{-r_i u}| \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j| |du|$$

$$(i = m + 1, \ldots n).$$

Désignant par M le maximum de

$$|x|^{-N} \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j|$$

pour x dans $\mathfrak{X}_1$ on en déduit

$$M \leqq \frac{2nK}{\varepsilon'} (\bar{r}_1 + K_1 \bar{r}_1^N) M,$$

ce qui est impossible pour $M > 0$. Par suite, la solution $y_1, \ldots y_n$ est unique.

Il y a des séries

$$y_i = \sum_{\nu=N}^{\infty} \bar{c}_i^{(\nu)} x^\nu \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{15}$$

qui satisfont formellement à (10). En posant dans ce système

$$y_i = \sum_{\nu=N}^{N'-1} \bar{c}_i^{(\nu)} x^\nu + z_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

on aura pour $z_1, \ldots z_n$ un système analogue pour lequel on peut répéter les raisonnements précédents. La solution $y_1, \ldots y_n$ du système (10) ainsi trouvée est nécessairement identique à la solution précédamment trouvée. On voit donc que cette solution est asymptôte aux séries (15) dans tout secteur à l'intérieur de X. Comme on peut augmenter le secteur X un peu on voit que $y_1, \ldots y_n$ sont asymptôtes aux séries (15) dans X. La solution correspondante du système (1) est asymptôte aux séries (9). C'est la seule solution ayant cette propriété, car à toute solution du système (1) asymptôte aux séries (9) correspond une solution du système (10) asymptôte aux séries (15). Le théorème 1 est donc démontré.

8. Dans le cas où tous les nombres $k_1, \ldots k_m$ ont la même valeur il y a toujours des secteurs X pour lesquels le théorème 1 a lieu, comme il résulte de la remarque faite p. 9. Mais dans le cas où $k_1, \ldots k_m$ n'ont pas la même valeur il peut arriver qu'il n'existe aucun secteur X pour lequel le premier cas p. 8 a lieu. Nous considérons maintenant un secteur X pour lequel le second cas a lieu. Soient

$$e^{-s_i x^{-k_i}} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

les fonctions qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 dans une direction quelconque appartenant à X.

Nous supposons que $k_1(\varphi'' - \varphi') < 2\pi$. Pour chaque valeur de i telle que $i < i_\varkappa$, $i \neq i_1, \ldots i_\varkappa$ nous supposons en outre que le plus petit des secteurs

$$\varphi'' - \frac{\pi}{k_i} < \varphi < \varphi' + \frac{\pi}{k_i}$$

$$\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') - \frac{1}{2}\frac{k_{i_\varkappa}}{k_i}(\varphi'' - \varphi') < \varphi < \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') + \frac{1}{2}\frac{k_{i_\varkappa}}{k_i}(\varphi'' - \varphi')$$

contient des directions telles que $e^{-s_i x^{-k_i}}$ tende vers l'infini quand x tend vers 0 dans une telle direction.

Cette condition est évidemment remplie si tous les nombres $k_1, \ldots k_m$ ont la même valeur car alors $\varphi'' - \varphi' < \frac{\pi}{k_1}$. Quels que soient les nombres $k_1, \ldots k_m$ la condition est aussi remplie si X ne contient aucun argument singulier ou si X est un secteur de la forme

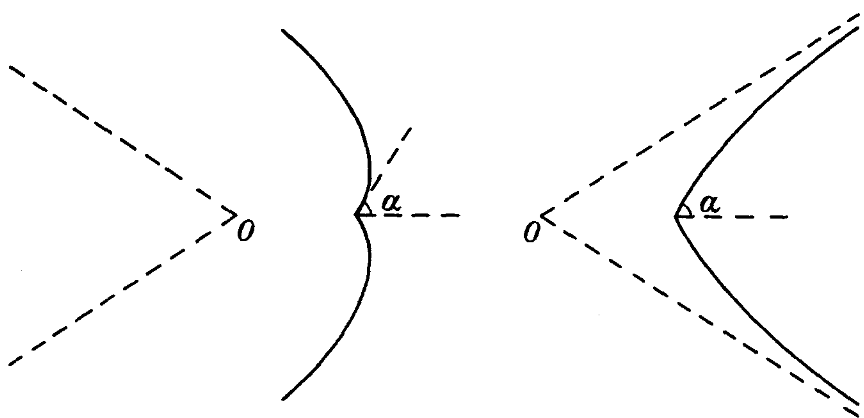
$$\overline{\varphi} - \delta < \varphi < \overline{\varphi} + \delta$$

contenant un seul argument singulier $\bar{\varphi}$. Un secteur quelconque peut être remplacé par un certain nombre de secteurs de cette nature de manière que deux secteurs consécutifs aient une partie commune.

Pour un secteur X qui satisfait aux conditions posées nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 2. *Il y a un faisceau de solutions du système* (1) *asymptôtes aux séries* (9) *dans* X.

Soit x_0 le milieu de l'arc d'un cercle $|x| = \bar{r}$ à l'intérieur de X. Dans le plan $u_{i_\varkappa}$ nous considérons le secteur $\mathfrak{U}_{i_\varkappa}$ que l'on obtient en transportant le secteur



$i < i_\varkappa$ $\qquad$ $i > i_\varkappa$

Fig. 4.

$U_{i_\varkappa}$ correspondant à X parallélement à lui-même de sorte que le sommet vienne à un point $u_{i_\varkappa, 0}$ correspondant à x_0. Nous désignons par $\mathfrak{U}_i$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{X}$ les domaines correspondants dans les autres plans u_i et dans le plan u et le plan x. Les courbes limitant ces domaines ont des formes analogues aux courbes considérées dans le n:o 5. Posons

$$\alpha = k_{i_\varkappa} \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}.$$

Les courbes limitant les domaines $\mathfrak{U}_i$ sont montrées sur la figure 4. Elles s'étendent à l'infini dans les directions limites des secteurs U_i correspondant à X. La courbe limitant le domaine $\mathfrak{U}$ est montrée sur la figure 5.

Il résulte de la condition posée pour X qu'on peut tirer à partir d'un point quelconque de $\mathfrak{U}_i$ $(i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$ une demi-droite l_i appartenant à $\mathfrak{U}_i$ de direction fixe et telle que la fonction $e^{-s_i u_i}$ tende vers o quand u_i tend vers l'infini le long de l_i.

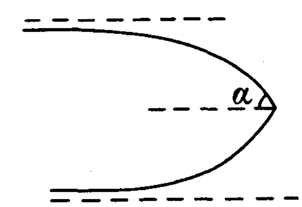


Fig. 5.

Dans un domaine $\mathfrak{U}_i$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ nous considérons une ligne l_i qui part du point u_{i0} correspondant à x_0 et qui est ou bien un segment rectiligne dont la direction appartient à U_i ou bien une ligne composée de deux segments rectilignes $u_{i0} \ldots u_{i1}$, $u_{i1} \ldots u_i$ dont les directions appartiennent à U_i. On peut de cette manière venir de u_{i0} à un point quelconque u_i de $\mathfrak{U}_i$.

Dans le domaine $\mathfrak{U}$ nous considérons une demi-droite l parallèle à l'axe réel.

9. Les lignes l_i, l étant définies de cette manière nous considérons les approximations successives suivantes

$$y_{i,\nu+1} = y_i^{(0)} e^{s_i(u_i - u_{i0})} + e^{s_i u_i} \int\limits_{\substack{u_{i0} \\ l_i}}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)$$
$$+ \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)]\, du_i$$
$$(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

(16) $$y_{i,\nu+1} = e^{s_i u_i} \int\limits_{\substack{\infty \\ l_i}}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x) + \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)]\, du_i$$
$$(i = 1, \ldots m;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$y_{i,\nu+1} = e^{r_i u} \int\limits_{\substack{\infty \\ l}}^{u} e^{-r_i u} [\varepsilon_i y_{i-1,\nu+1} + a_i(x) + L_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)$$
$$+ \mathfrak{P}_i(y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}; x)]\, du$$
$$(i = m + 1, \ldots n),$$

où $y_{i0} = 0$ $(i = 1, \ldots n)$ et ν prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ... Les valeurs initiales $y_i^{(0)}$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ satisfont aux inégalités

$$|y_i^{(0)}| < \frac{K}{\varepsilon'} |x_0|^N$$

où ε' est un nombre qui sera défini dans un moment.

Nous supposons que tous les nombres ε_i sont 0.

Si v_i est un point quelconque de l_i on a

$$\Re\,[s_i(v_i - u_i)] > \varepsilon'\,|v_i - u_i| \qquad (i = 1, \ldots m;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$\Re\,[s_i(u_i - v_i)] > \varepsilon'\,|u_i - v_i| \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

et si v est un point quelconque de l on a

$$\Re\,[(r_i - N)(v - u)] > \varepsilon'\,|v - u| \qquad (i = m + 1, \ldots n)$$

sous la condition que $\Re r_i < N$ $(i = m + 1, \ldots n)$.

Nous prenons le nombre $\bar r \leqq r$ de manière que

$$(17) \qquad 10\,K\bar r < \varepsilon', \quad 5\,K\bar r^N < \varepsilon' r', \qquad \bar r < \left(\frac{\varepsilon'}{N}\right)^{1/k_m}, \qquad 2\,n\,K\bar r < \varepsilon'.$$

Supposons que $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ soient des fonctions de x régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfaisant aux inégalités

$$|y_{i\nu}| < \frac{5\,K}{\varepsilon'}\,|x|^N \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Il résulte de (16), (17) que $y_{i,\nu+1}$ $(i = 1, \ldots n)$ sont régulières dans $\mathfrak{X}$. Afin d'obtenir une limite supérieure de $|y_{i,\nu+1}|$ nous nous appuyons sur le lemme suivant

Lemme. *Les expressions*

$$|x|^{-N}\,|e^{s_i u_i}|\int_{u_{i0}}^{u_i}|x|^N\,|e^{-s_i u_i}|\,|du_i| \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$|x|^{-N}\,|e^{s_i u_i}|\int_{u_i}^{\infty}|x|^{-N}\,|e^{-s_i u_i}|\,|du_i| \qquad (i = 1, \ldots m;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$|x|^{-N}\,|e^{r_i u}|\int_{u}^{\infty}|x|^{-N}\,|e^{-r_i u}|\,|du| \qquad (i = m + 1, \ldots n)$$

sont plus petites que $\frac{2}{\varepsilon'}$ *sous la condition que les nombres* R_i *correspondant à* $\bar r$ *satisfassent à*

$$R_i > \frac{1}{\varepsilon'}\,\frac{N}{k_i} \qquad (i = 1, \ldots m).$$

Les inégalités correspondant à $i = i_1, \ldots i_\varkappa$ s'obtiennent facilement si l'on remarque que $|x|$ et $|x|^{-N} |e^{s_i u_i}|$ sont décroissants quand u_i décrit l_i à partir de u_{i0}. Les inégalités pour R_i sont remplies car elles peuvent s'écrire

$$\bar{r} < \left(\frac{\varepsilon'}{N}\right)^{1/k_i}.$$

Par suite, on aura

$$|x|^{-N} |y_{i,\nu+1}| < \frac{K}{\varepsilon'} \left|\frac{u_i}{u_{i0}}\right|^{\frac{N}{k_i}} |e^{s_i(u_i - u_{i0})}| + \frac{4K}{\varepsilon'} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$|x|^{-N} |y_{i,\nu+1}| < \frac{4K}{\varepsilon'} \qquad (i = 1, \ldots n;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa).$$

Or

$$\left|\frac{u_i}{u_{i0}}\right|^{\frac{N}{k_i}} |e^{s_i(u_i - u_{i0})}| < 1.$$

On aura donc

$$|y_{i,\nu+1}| < \frac{5K}{\varepsilon'} |x|^N \qquad (i = 1, \ldots N).$$

Les approximations successives définissent donc une suite infinie de fonctions $y_{1\nu}, \ldots y_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|y_{i\nu}| < \frac{5K}{\varepsilon'} |x|^N.$$

On voit comme dans le n:o 6 que ces fonctions tendent uniformément vers des fonctions $y_1, \ldots y_n$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|y_i| < \frac{5K}{\varepsilon'} |x|^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

et aux équations

$$y_i = y_i^{(0)} e^{s_i(u_i - u_{i0})} + e^{s_i u_i} \int_{\substack{u_{i0} \\ l_i}}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_1, \ldots y_n; x)$$

$$+ \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, du_i$$

$$\text{(18)} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$(18)\quad y_i = e^{s_i u_i} \int_{l_i}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_1, \ldots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, du_i$$

$$(i = 1, \ldots m;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$y_i = e^{r_i u} \int_{l}^{u} e^{-r_i u} [a_i(x) + x L_i(y_1, \ldots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x)]\, du$$

$$(i = m + 1, \ldots n)$$

et par suite au système (10).

10. Posons maintenant

$$a_i(x) \sim \sum_{\nu=N}^{\infty} a_i^{(\nu)} x^\nu \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les premiers coefficients des séries (15) sont

$$\bar{c}_i^{(N)} = -\frac{1}{s_i} a_i^{(N)} \qquad (i = 1, \ldots m)$$

$$\bar{c}_i^{(N)} = \frac{1}{N - r_i} a_i^{(N)} \qquad (i = m + 1, \ldots n).$$

En intégrant par partie on aura

$$a_i^{(N)} e^{s_i u_i} \int_{u_{i0}}^{u_i} e^{-s_i u_i} x^N du_i = \bar{c}_i^{(N)} x^N + \frac{a_i^{(N)}}{s_i} x_0^N e^{s_i (u_i - u_{i0})} + a_i^{(N)} \frac{N}{s_i} e^{s_i u_i} \int_{u_{i0}}^{u_i} e^{-s_i u_i} x^{N+k_i} du_i$$

$$(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$a_i^{(N)} e^{s_i u_i} \int_{\infty}^{u_i} e^{-s_i u_i} x^N du_i = \bar{c}_i^{(N)} x^N + a_i^{(N)} \frac{N}{s_i} e^{s_i u_i} \int_{\infty}^{u_i} e^{-s_i u_i} x^{N+k_i} du_i$$

$$(i = 1, \ldots m;\ i \neq i_1, \ldots i_\varkappa).$$

De plus

$$a_i^{(N)} e^{r_i u} \int_\infty^u e^{-r_i u} x^N \, du = \bar{c}_i^{(N)} x^N \qquad (i = m + 1, \ldots n).$$

Alors, on conclut facilement des équations (18) que $y_1, \ldots y_n$ satisfont à des inégalités

$$| y_i - \bar{c}_i^{(N)} x^N | < K_1 | x |^{N+1} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour $| x | < \bar{r}_1$, K_1 et $\bar{r}_1 \leqq \bar{r}$ étant certaines constantes.

En posant dans (10)

$$y_i = \bar{c}_i^{(N)} x^N + \bar{y}_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

on aura pour $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ un système analogue

$$x^{k_i+1} \frac{d\bar{y}_i}{dx} = s_i \bar{y}_i + \bar{a}_i(x) + x \overline{L}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \overline{\mathfrak{P}}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots m)$$

$$x \frac{d\bar{y}_i}{dx} = r_i \bar{y}_i + \bar{a}_i(x) + x \overline{L}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \overline{\mathfrak{P}}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)$$
$$(i = m + 1, \ldots n),$$

où l'on a

$$| \bar{a}_i(x) | < \overline{K} | x |^{N+1} \qquad (i = 1, \ldots n).$$

Il en résulte

$$\bar{y}_i = \bar{y}_i^{(1)} e^{s_i (u_i - u_{i1})} + e^{s_i u_i} \int_{u_{i1}}^{u_i} e^{-s_i u_i} [\bar{a}_i(x) + x \overline{L}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \overline{\mathfrak{P}}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)] \, du_i$$
$$(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$\bar{y}_i = C_i e^{s_i u_i} + e^{s_i u_i} \int_\infty^{u_i} e^{-s_i u_i} [\bar{a}_i(x) + x \overline{L}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \overline{\mathfrak{P}}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)] \, du_i$$
$$(i = 1, \ldots m; \; i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$\bar{y}_i = C_i e^{r_i u} + e^{r_i u} \int_\infty^u e^{-r_i u} [\bar{a}_i(x) + x \overline{L}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x) + \overline{\mathfrak{P}}_i(\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n; x)] \, du$$
$$(i = m + 1, \ldots n),$$

où u_{i1} correspond à un point x_1 tel que $|x_1| = \bar{r}_1$ et $\bar{y}_i^{(1)}$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ sont les valeurs de $\bar{y}_i$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ pour $x = x_1$. En remarquant que $e^{(r_i - N)u} \to \infty$ quand u tend vers ∞ et que l'on peut faire tendre u_i (i ayant une valeur $\neq i_1, \ldots i_\varkappa$) vers ∞ de manière que $e^{s_i u_i} \to \infty$ on voit que les constantes C_i doivent être 0. On aura donc pour $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ des équations analogues aux équations (18) et on peut donc répéter les raisonnements que nous venons de faire.

Il en résulte que les solutions $y_1, \ldots y_n$ de (10) sont asymptôtes aux séries (15) dans X. Les solutions correspondantes du système (1) sont asymptôtes aux séries (9). Elles dépendent de $\varkappa$ constantes arbitraires $y_i^{(0)}$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$.

On pourrait facilement démontrer que la solution trouvée de (10) est univoquement déterminée par les valeurs initiales $y_i^{(0)}$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$. Mais nous préférons de démontrer un théorème d'unicité qui a une forme un peu différente.

11. Prenons un point x_0 dont l'argument est différent des arguments singuliers et supposons que pour certaines valeurs de i, soient $i_1', \ldots i_{\varkappa'}'$, la fonction

$$e^{-s_i x^{-k_i}}$$

tend vers 0 quand x tend vers 0 le long du rayon $0 \ldots x_0$, les autres fonctions

$$e^{-s_i x^{-k_i}}$$

tendant vers l'infini. De plus, nous supposons que

$$\Re\, r_i \geqq 0 \qquad (i = m + 1, \ldots m + \lambda)$$

$$\Re\, r_i < 0 \qquad (i = m + \lambda + 1, \ldots n).$$

Alors, on a le théorème suivant.

Théorème 3. *Il y a au plus une seule solution du système* (10) *telle que*

$$|y_i| < K|x|^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

le long du rayon $0 \ldots x_0$ *et* $y_i = y_i^{(0)}$ $(i = i_1', \ldots i_{\varkappa'}')$ *pour* $x = x_0$, $|x_0|$ *étant assez petit.*

Il y a au plus une seule solution du système (10) *telle que* $|y_i| < \bar{r}'$ $(i = 1, \ldots n)$ *le long du rayon* $0 \ldots x_0$ *et* $y_i = y_i^{(0)}$ $(i = i_1', \ldots i_{\varkappa'}', m+1, \ldots m+\lambda)$ *pour* $x = x_0$, $|x_0|$ *et* $\bar{r}'$ *étant assez petits.*

Nous nous limitons à démontrer la seconde partie du théorème et nous supposons que dans (10) tous les nombres ε_i sont 0. On voit comme à une autre occasion (p. 24) que toute solution de (10) satisfaisant aux conditions posées doit satisfaire aux équations

$$y_i = y_i^{(0)} e^{s_i(u_i - u_{i0})} + e^{s_i u_i} \int_{u_{i0}}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_1, \dots y_n; x)$$
$$+ \mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x)] \, du_i$$
$$(i = i'_1, \dots i'_{\varkappa'})$$

$$y_i = e^{s_i u_i} \int_{\infty}^{u_i} e^{-s_i u_i} [a_i(x) + x L_i(y_1, \dots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x)] \, du_i$$
$$(i = 1, \dots m; \ i \neq i'_1, \dots i'_{\varkappa'})$$

$$y_i = y_i^{(0)} e^{r_i(u - u_0)} + e^{r_i u} \int_{u_0}^{u} e^{-r_i u} [a_i(x) + x L_i(y_1, \dots y_n; x)$$
$$+ \mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x)] \, du$$
$$(i = m + 1, \dots m + \lambda)$$

$$y_i = e^{r_i u} \int_{\infty}^{u} e^{-r_i u} [a_i(x) + x L_i(y_1, \dots y_n; x) + \mathfrak{P}_i(y_1, \dots y_n; x)] \, du$$
$$(i = m + \lambda + 1, \dots n),$$

u_{i0}, u_0 correspondant à x_0 et les intégrations étant effectuées le longe du rayon $0 \dots x_0$. Supposons qu'il y ait deux solutions $y_1, \dots y_n$ et $\bar{y}_1, \dots \bar{y}_n$. Alors on conclut que

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(|x_0| + \bar{r}') |e^{s_i u_i}| \left| \int_{u_{i0}}^{u_i} |e^{-s_i u_i}| \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j| \, |du_i| \right|$$
$$(i = i'_1, \dots i'_{\varkappa'})$$

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(|x_0| + \bar{r}') |e^{s_i u_i}| \left| \int_{u_i}^{\infty} |e^{-s_i u_i}| \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j| \, |du_i| \right|$$
$$(i = 1, \dots m; \ i \neq i'_1, \dots i'_{\varkappa'})$$

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(|x_0| + \bar{r}') |e^{r_i u}| \left| \int_{u_0}^{u} |e^{-r_i u}| \sum_{j=1}^{n} |y_j - \bar{y}_j| \, |du| \right|$$
$$(i = m + 1, \dots m + \lambda)$$

$$|y_i - \bar{y}_i| < K(|x_0| + \bar{r}')|e^{r_i u}| \int_u^\infty |e^{-r_i u}| \sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j| |du|$$

$$(i = m + \lambda + 1, \ldots n).$$

Si l'on désigne par M de maximum de $\sum_{j=1}^n |y_j - \bar{y}_j|$ quand x décrit le rayon $0 \ldots x_0$ on en conclut

$$M \leqq \frac{nK}{\varepsilon'}(|x_0| + \bar{r}')M,$$

ce qui est impossible pour $M > 0$ si l'on suppose que

$$nK(|x_0| + \bar{r}') < \varepsilon'.$$

3. Réduction d'un système linéaire (4) à une forme canonique.

12. Pour un système linéaire

$$(4) \qquad x^{k_i+1}\frac{dy_i}{dx} = f_i(x)y_i + x^{k_i}(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) + x^{k_i+1}\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j$$

$$(i = 1, \ldots n)$$

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)}x + \cdots$$

nous allons démontrer un théorème qui est d'une importance capitale pour l'étude d'un système (2). Ce théorème est aussi d'un grand intérêt pour l'étude des solutions d'un système (3) dans le voisinage de $x = 0$.

Pour $i > j$, $f_i(x) \neq f_j(x)$ on peut écrire

$$x^{k_1-k_i}f_i(x) - x^{k_1-k_j}f_j(x) = x^{k_1-k_{ij}}(s_{ij} + \cdots), \quad s_{ij} \neq 0.$$

Si $k_i > k_j$ on a $k_{ij} = k_i$, $s_{ij} = f_i(0) = s_i$. Si $k_i = k_j$, $s_i \neq s_j$ on a $k_{ij} = k_i$, $s_{ij} = s_i - s_j$. Si $k_i = k_j$, $s_i = s_j$, k_{ij} est un certain nombre positif plus petit que k_i.

Nous désignons par φ^* l'un quelconque des arguments de x pour lesquels l'une des expressions

$$\left|e^{s_{ij}x^{-k_{ij}}}\right|$$

a la valeur 1. Nous prenons un argument φ_0 de telle manière que les arguments

$$\varphi_0 + \frac{\nu\pi}{k_1} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

soient distincts des arguments φ^*. Nous considérons les secteurs suivants

$$\varphi_0 + \frac{\nu\pi}{k_1} < \varphi < \varphi_0 + \frac{(\nu+1)\pi}{k_1} \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sur la surface de Riemann de $\log x$ et nous augmentons chacun de ces secteurs dans les deux directions sans que l'on rencontre un argument φ^*. Soient

$$X_\alpha: \quad \varphi'_\alpha < \varphi < \varphi''_\alpha \qquad (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

les secteurs ainsi définis. Deux secteurs X_α consécutifs ont une partie commune.

Le théorème que nous allons démontrer peut être énoncé de la manière suivante.

Théorème 4. *À chaque secteur X_α correspond une substitution linéaire et homogène de déterminant égal à 1 pour $x = 0$ par laquelle le système (4) se transforme au système*

$$x^{k_i+1}\frac{dy_i}{dx} = f_i(x)\,y_i + x^{k_i}(r_i\,y_i + \varepsilon_i\,y_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots n). \tag{19}$$

Les coefficients de la substitution linéaire sont asymptôtes à des séries de puissances de x dans X_α.

Un théorème analogue a été démontré par M. Hukuhara.[1] Le système (19) est plus simple que le système canonique de M. Hukuhara. C'est la réduction complémentaire faite à la page 4 qui nous donne le moyen de l'introduire. Les secteurs X_α sont définis tout autrement que les secteurs qui entrent dans le théorème de M. Hukuhara. Les derniers secteurs sont assujettis à la condition de ne contenir qu'un seul argument φ^* au plus;[2] ils peuvent donc être très petits s'il y a des arguments φ^* qui diffèrent l'un de l'autre par un nombre très petit. L'angle d'un secteur X_α est toujours plus grand que $\frac{\pi}{k_1}$.

13. Les coefficients de la substitution linéaire qui entre dans le théorème 4 peuvent être obtenus comme solution d'un certain système d'équations diffé-

[1] loc. cit., p. 166.

[2] Les arguments singuliers du système (4) (p. 166) de M. Hukuhara sont les arguments φ^* et pas les arguments singuliers du système donné, comme le dit M. Hukuhara.

rentielles linéaires[1]. Mais il nous semble que ce système est peu apte à la démonstration du théorème 4. Nous préférons de nous servir d'une suite de substitutions partielles de deux types différents. Les coefficients d'une substitution du premier type s'obtiennent comme solution d'un système différentiel qui n'est pas linéaire mais qui est pourtant plus simple à un certain égard que le système linéaire dont nous venons de parler. Les coefficients d'une substitution du second type s'obtiennent comme solution d'un système différentiel linéaire.

Nous écrivons d'abord le système (4) de la manière suivante

$$(20)\qquad \begin{aligned} x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} &= s_1 y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j && (i = 1, \ldots n_1) \\ x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} &= s_i y_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j && (i = n_1 + 1, \ldots n), \end{aligned}$$

où l'on a $k = k_1$ et $s_i \neq s_1$ $(i = n_1 + 1, \ldots n)$. Les coefficients $a_{ij}(x)$ sont asymptôtes à des séries de puissances de x s'annulant pour $x = 0$. Les séries asymptotiques pour les fonctions $a_{ij}(x)$ $(i = 1, \ldots n_1; j = n_1 + 1, \ldots n)$ contiennent x^{k+1} comme facteur. Nous cherchons à déterminer les coefficients $b_{ij}(x)$ de la substitution

$$(21)\qquad y_i = z_i + \sum_{j=n_1+1}^{n} b_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots n_1)$$

de telle manière que l'on obtienne pour $z_1, \ldots z_{n_1}$ un système d'équations différentielles ne contenant pas $y_{n_1+1}, \ldots y_n$. Il faut et il suffit que b_{ij} soit une solution du système suivant d'équations différentielles

$$(22)\qquad \begin{aligned} x^{k+1}\frac{d b_{ij}}{d x} = (s_1 - s_j)\, b_{ij} + a_{ij} + \sum_{h=1}^{n_1} a_{ih} b_{hj} \\ - \sum_{h=n_1+1}^{n} b_{ih} a_{hj} - \sum_{h'=1}^{n_1} \sum_{h=n_1+1}^{n} b_{ih} a_{hh'} b_{h'j} \\ (i = 1, \ldots n_1;\ j = n_1 + 1, \ldots n). \end{aligned}$$

Les nombres $s_1 - s_j$ $(j = n_1 + 1, \ldots . n)$ étant $\neq 0$ on peut appliquer le théorème 1 pour le secteur X_α (voir la remarque p. 9).[2] Il y a donc une solution du système (22) asymptôte à des séries de puissance dans X_α. Comme

[1] Voir le travail cité de M. HUKUHARA, p. 166.

[2] On peut s'appuyer aussi sur le théorème 1 de (I).

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij}^{(k+1)} x^{k+1} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n_1; j = n_1 + 1, \ldots n)$$

on aura

$$b_{ij}(x) \sim b_{ij}^{(k+1)} x^{k+1} + \cdots \qquad (i = 1, \ldots n_1; j = n_1 + 1, \ldots n).$$

Par suite, les termes

$$f_i(x) y_i + x^{k_i}(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1})$$

du système (4) ne sont pas changés par la substitution (21).

Ensuite on peut faire une réduction analogue dans les équations du système transformé dans lesquelles $s_i = s_{n_1+1}$. À cet effet on doit remarquer qu'on n'a pas besoin, pour la validité du théorème 1 (ou du théorème 2) de supposer que les coefficients dans le système (2) soient asymptôtes à des séries de puissance de x sur toute la surface de Riemann de $\log x$; il suffira de supposer que les coefficients sont asymptôtes à des séries de puissances dans un secteur un peu plus grand que X.

Après un certain nombre de transformations on aura un système transformé composé de systèmes partiels de la forme

$$x^{k+1} \frac{dy_i}{dx} = s y_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots m),$$

où il n'y a qu'un seul nombre s. Pour réduire un tel système il suffit de considérer le système que l'on obtient en effaçant les termes sy_i et en divisant par x ou par une puissance de x. Le système ainsi obtenu a la même forme que le système (20) mais le nombre k est diminué. Pour la détermination d'une substitution (21) il peut arriver maintenant qu'on doit appliquer le théorème 2 et qu'il y a donc plusieurs substitutions qui réalisent la réduction; il suffit de prendre une de ces substitutions.

En poursuivant ces raisonnements on aboutira au résultat suivant. Il y a au moins une substitution linéaire par laquelle le système (4) se transforme à un système qui est composé d'un certain nombre de systèmes partiels de la forme

$$(23) \qquad x^{k+1} \frac{dy_i}{dx} = f(x) y_i + x^k (r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) + x^{k+1} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x) y_j \qquad (i = 1, \ldots m),$$

où k a l'une des valeurs k_i dans (4) et $f(x)$ est la fonction $f_i(x)$ correspondante. Les coefficients de la substitution sont asymptôtes à des séries de puissances dans X_α. Le déterminant de la substitution est égal à 1 identiquement.

14. Pour réduire un système de la forme (23) il suffit de réduire le système suivant

$$x\frac{d y_i}{d x} = r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1} + x\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x)\, y_j \tag{24}$$

$$(i = 1, \dots m),$$

où l'on a

$$a_{ij}(x) \sim a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} x + \cdots$$

dans X_α.

Nous écrivons le système (24) avec des matrices. Soit E_n la matrice unité de dimension n et soit I_n la matrice suivante de dimension n

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$R = \begin{pmatrix} r_{m_1} E_{m_1} & \dots & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & r_{m_q} E_{m_q} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} I_{m_1} & \dots & 0 \\ . & \dots & . \\ 0 & \dots & I_{m_q} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$(x\, a_{ij}(x)) = A(x).$$

Alors le système (24) peut s'écrire

$$x\frac{dY}{dx} = (R + I + A(x))\, Y. \tag{25}$$

Les relations asymptotiques pour $a_{ij}(x)$ peuvent s'écrire

$$A(x) \sim A^{(1)} x + A^{(2)} x^2 + \cdots.$$

Nous allons montrer que l'équation (25) peut être transformée à l'équation

$$x\frac{dY}{dx} = (R + I)\, Y \tag{26}$$

par une substitution linéaire.

Ecrivons d'abord une solution de (26). Posons

$$x^R = \begin{pmatrix} x^{r_{m_1}} E_{m_1} & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & x^{r_{m_q}} E_{m_q} \end{pmatrix}, \quad F_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} & \frac{x^{n-2}}{\lfloor n-2} & \ldots & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_{m_1}(x) & \ldots & 0 \\ . & \ldots & . \\ 0 & \ldots & F_{m_q}(x) \end{pmatrix}.$$

On aura

$$x \frac{dx^R}{dx} = R x^R = x^R R$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = F(x) I = I F(x)$$

$$x \frac{d}{dx} x^R F(\log x) = x^R F(\log x)(R + I)$$

$$= (R + I) x^R F(\log x),$$

par suite

$$Y = x^R F(\log x)$$

est une solution de (26).

Ecrivons aussi les relations suivantes que l'on démontre sans peine

$$(x^R)^{-1} = x^{-R}$$

$$(F_n(x))^{-1} = F_n(-x), \quad (F(x))^{-1} = F(-x)$$

$$(x^R F(\log x))^{-1} = F(-\log x) x^{-R} = x^{-R} F(-\log x).$$

En posant dans (25) $Y = Z \bar{Y}$ on aura

$$x \frac{dZ}{dx} \bar{Y} + x Z \frac{d\bar{Y}}{dx} = (R + I + A(x)) Z \bar{Y}.$$

Pour que l'on ait

$$x \frac{d\bar{Y}}{dx} = (R + I) \bar{Y}$$

il faut et il suffit que Z soit une solution de l'équation

$$x \frac{dZ}{dx} + Z(R + I) - (R + I) Z = A(x) Z. \tag{27}$$

15. Nous allons montrer que l'équation (27) est satisfaite par une matrice qui satisfait à une relation asymptotique

$$Z \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^{\nu}, \quad C^{(0)} = E$$

dans X_α. Nous démontrons d'abord que les matrices $C^{(\nu)}$ peuvent être déterminées de manière que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^{\nu}$$

satisfait formellement à l'équation (27).[1]

Les matrices $C^{(\nu)}$ doivent satisfaire aux équations suivantes

$$\nu C^{(\nu)} + C^{(\nu)}(R + I) - (R + I) C^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} A^{(\mu)} C^{(\nu-\mu)}. \tag{28}$$

Posons

$$A^{(\mu)} = (a_{ik}^{(\mu)}) = \begin{vmatrix} A_{11}^{(\mu)} & \dots & A_{1q}^{(\mu)} \\ . & \dots & . \\ A_{q1}^{(\mu)} & \dots & A_{qq}^{(\mu)} \end{vmatrix}$$

$$C^{(\nu)} = (c_{ik}^{(\nu)}) = \begin{vmatrix} C_{11}^{(\nu)} & \dots & C_{1q}^{(\nu)} \\ . & \dots & . \\ C_{q1}^{(\nu)} & \dots & C_{qq}^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

Alors les équations (28) peuvent s'écrire

$$(\nu + r_k - r_i) C_{ik}^{(\nu)} + C_{ik}^{(\nu)} I_{m_k} - I_{m_i} C_{ik}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i'j}^{(\mu)} c_{jk'}^{(\nu-\mu)} \right), \tag{29}$$

où nous avons désigné r_{m_i} par r_i et où i', k' dans la matrice

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i'j}^{(\mu)} c_{jk'}^{(\nu-\mu)} \right)$$

doivent prendre les mêmes valeurs que dans la matrice

$$C_{ik}^{(\nu)} = (c_{i'k'}^{(\nu)}).$$

[1] Cf. un mémoire de M. ADAM SCHMIDT, Neuer Beweis eines Hauptsatzes über Bestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungssysteme. Journal de Crelle, t. 179, p. 1.

Posons plus simplement

$$d = \nu + r_k - r_i, \quad C_0 = C_{ik}^{(\nu)}, \quad D_0 = \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{i'j}^{(\mu)} c_{jk'}^{(\nu-\mu)} \right).$$

En posant

$$\begin{aligned} C_{\lambda+1} &= I_{m_i} C_\lambda - C_\lambda I_{m_k} \\ D_{\lambda+1} &= I_{m_i} D_\lambda - D_\lambda I_{m_k} \end{aligned} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots m_i + m_k - 1)$$

on conclut de (29) que

$$\begin{aligned} d\, C_0 &= C_1 + D_0 \\ d\, C_1 &= C_2 + D_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ d\, C_{m_i+m_k-1} &= D_{m_i+m_k-1} \end{aligned}$$

car

$$C_{m_i+m_k} = 0,$$

comme on le voit facilement, I_n^n étant o.

Nous supposons qu'aucun des nombres $r_i - r_j$ $(i, j = 1, \ldots q)$ n'est égal à un entier $\neq 0$; nous avons montré dans le n:o 2 qu'il est loisible de faire cette supposition. Alors on conclut que

$$(30) \qquad \nu\, C_0 = \sum_{\lambda=0}^{m_i+m_k-1} \left(\frac{\nu}{d}\right)^{\lambda+1} \frac{D_\lambda}{\nu^\lambda},$$

d étant $\neq 0$. Il est donc démontré que les matrices $C^{(\nu)}$ peuvent être déterminées.

16. Nous considérons en passant le cas où la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A^{(\nu)} x^\nu$$

est absolument convergente pour $|x| \leqq \varrho$. Alors on voit d'une manière très simple que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^\nu$$

est absolument convergente pour $|x| < \varrho$. En effet, il y a des nombres K', K'' de manière que

$$\left|a_{ij}^{(\mu)}\right| \varrho^{\mu} < K', \quad \frac{\nu}{\left|\nu + r_k - r_i\right|} < K''.$$

Soit γ_μ le plus grand des nombres $\left|c_{ik}^{(\mu)}\right|$ $(i, k = 1, \ldots m)$. Les éléments dans $D_0 \varrho^\nu$ sont en valeurs absolues plus petits que

$$m K' (\gamma_0 + \gamma_1 \varrho + \cdots + \gamma_{\nu-1} \varrho^{\nu-1}), \quad \gamma_0 = 1,$$

et les éléments dans $D_\lambda \varrho^\nu$ sont en valeurs absolues plus petits que

$$2^\lambda m K' (\gamma_0 + \gamma_1 \varrho + \cdots + \gamma_{\nu-1} \varrho^{\nu-1}).$$

Par suite, on aura d'après (30)

$$\nu \gamma_\nu \varrho^\nu < m K' K'' \sum_{\lambda=0}^{m} \left(\frac{2 K''}{\nu}\right)^\lambda (\gamma_0 + \gamma_1 \varrho + \cdots + \gamma_{\nu-1} \varrho^{\nu-1}).$$

Si l'on pose

$$K = m K' K'' \sum_{\lambda=0}^{m} (2 K'')^\lambda$$

et si l'on détermine les nombres β_ν par les équations

$$\beta_0 = 1, \quad \nu \beta_\nu = K(\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{\nu-1}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

on aura donc

$$\gamma_\nu \varrho^\nu < \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Or

$$\nu \beta_\nu = (\nu - 1) \beta_{\nu-1} + K \beta_{\nu-1}$$

donc

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu-1}} = 1.$$

Par suite, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^\nu$$

est convergente pour $\varrho' < \varrho$, d'où résulte que la série $\Sigma \gamma_\nu \varrho'^\nu$ est convergente pour $\varrho' < \varrho$. Donc, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^\nu$$

est absolument convergente pour $|x| < \varrho$.

17. Revenons au cas où l'on a dans (27)

$$A(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{(\nu)} x^{\nu},$$

x appartenant à X_α. L'existence de la solution formelle $Z = \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^{\nu}$ de l'équation (27) étant démontrée on pourrait s'appuyer sur le travail de M. Hukuhara[1] pour en conclure qu'il existe une solution Z de (27) satisfaisant dans X_α à la relation asymptotique $Z \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)} x^{\nu}$. Mais nous préférons de le montrer par une méthode plus élémentaire.

Nous montrons d'abord comment on peut trouver une solution de l'équation

$$x\frac{dZ}{dx} + Z(R+I) - (R+I)Z = A(x)x^{\lambda}, \tag{31}$$

où $A(x)$ est une matrice donnée dont les éléments sont en valeurs absolues plus petits qu'une constante K dans X_α et λ est un entier positif. En posant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1q} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ A_{q1} & \dots & A_{qq} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1q} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ Z_{q1} & \dots & Z_{qq} \end{pmatrix}$$

on aura

$$x\frac{dZ_{ik}}{dx} + (r_k - r_i) Z_{ik} + Z_{ik} I_{m_k} - I_{m_i} Z_{ik} = A_{ik} x^{\lambda}. \tag{32}$$

Posons

$$\begin{aligned} A_{ik} &= A_{ik}^{(0)}, \quad Z_{ik} = Z_{ik}^{(0)} \\ I_{m_i} A_{ik}^{(\nu)} - A_{ik}^{(\nu)} I_{m_k} &= A_{ik}^{(\nu+1)} \\ I_{m_i} Z_{ik}^{(\nu)} - Z_{ik}^{(\nu)} I_{m_k} &= Z_{ik}^{(\nu+1)} \end{aligned} \qquad (\nu = 0, 1, \dots m_i + m_k - 1).$$

Alors on conclut que

$$\begin{aligned} x\frac{dZ_{ik}}{dx} &= (r_i - r_k) Z_{ik} + Z_{ik}^{(1)} + A_{ik} x^{\lambda} \\ x\frac{dZ_{ik}^{(1)}}{dx} &= (r_i - r_k) Z_{ik}^{(1)} + Z_{ik}^{(2)} + A_{ik}^{(1)} x^{\lambda} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x\frac{dZ_{ik}^{(m_i+m_k-1)}}{dx} &= (r_i - r_k) Z_{ik}^{(m_i+m_k-1)} + A_{ik}^{(m_i+m_k-1)} x^{\lambda}. \end{aligned}$$

[1] loc. cit., p. 136.

Nous supposons λ assez grand pour que tous les nombres $\lambda + \Re(r_k - r_i)$ $(i, k = 1, \ldots q)$ soient positifs. Alors on aura la solution suivante

$$(33)\qquad \begin{aligned} Z_{ik} = x^{r_i - r_k} \int_0^x \frac{1}{x} x^{\lambda + r_k - r_i} A_{ik}\, dx \\ + \sum_{\nu=2}^{m_i + m_k} x^{r_i - r_k} \int_0^x \frac{1}{x} \int_0^x \cdots \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{x} x^{\lambda + r_k - r_i} A_{ik}^{(\nu-1)} (dx)^\nu \end{aligned}$$

les intégrations étant effectuées le long d'une ligne droite. Toute autre solution s'obtient si l'on ajoute une expression

$$\sum_{\nu=0}^{m_i + m_k - 1} C_{ik}^{(\nu)} (\log x)^\nu x^{r_i - r_k},$$

où $C_{ik}^{(\nu)}$ sont des matrices constantes.

On voit facilement que les éléments de la solution (33) sont en valeurs absolues plus petits que

$$K \sum_{\nu=1}^{m_i + m_k} 2^{\nu - 1} |\lambda + r_k - r_i|^{-\nu} |x|^\lambda.$$

Par suite, les éléments de Z sont en valeurs absolues plus petits que

$$K K' |x|^\lambda,$$

où K' est une constante que l'on peut prendre égale à 1 si λ est suffisamment grand. Il n'y a qu'une seule solution de (31) de cette nature si λ est suffisamment grand.

18. Posons maintenant dans (27)

$$Z = \sum_{\nu=0}^{\lambda - 1} C^{(\nu)} x^\nu + Z_\lambda,$$

par suite, on aura pour Z_λ

$$(34)\qquad x \frac{d Z_\lambda}{dx} + Z_\lambda (R + I) - (R + I) Z_\lambda = A(x) Z_\lambda + A_\lambda(x),$$

les éléments de $A_\lambda(x)$ étant en valeurs absolues plus petits que $K_\lambda |x|^\lambda$ pour x

dans X_α, $|x| < r$; K_λ est une certaine constante. Nous cherchons une solution de (34) à l'aide des approximations cuccessives

$$(35) \qquad x\frac{dZ_\lambda^{(\nu)}}{dx} + Z_\lambda^{(\nu)}(R+I) - (R+I)Z_\lambda^{(\nu)} = A(x)Z_\lambda^{(\nu-1)} + A_\lambda(x)$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots).$$

On prend pour $Z_\lambda^{(0)}$ la matrice o et on prend pour $Z_\lambda^{(\nu)}$ la solution de (35) que nous venons de déterminer. On voit d'abord que les éléments de $Z_\lambda^{(1)}$ sont en valeurs absolues plus petit que $K_\lambda|x|^\lambda$. Les éléments de $A(x)$ sont en valeurs absolues plus petits que $K|x|$, où K est une certaine constante. Supposant que les éléments de $Z_\lambda^{(\nu)} - Z_\lambda^{(\nu-1)}$ soient en valeurs absolues plus petit que $K_\lambda|x|^\lambda(K|x|)^{\nu-1}$ on conclut que les éléments de $Z_\lambda^{(\nu+1)} - Z_\lambda^{(\lambda)}$ sont en valeurs absolues plus petits que $K_\lambda|x|^\lambda(K|x|)^\nu$. Par suite, les approximations successives convergent uniformément pour $K|x| < \delta < 1$, x dans X_α. À la limite on aura une solution de (34) dont les éléments sont en valeurs absolues plus petits que $K'_\lambda|x|^\lambda$, où $K'_\lambda = \frac{K_\lambda}{1-\delta}$.

Il n'y a qu'une seule solution de cette nature. En effet, supposons qu'il y ait deux solutions Z_λ, $\bar{Z}_\lambda$. La différence $Z_\lambda - \bar{Z}_\lambda$ doit être la solution de l'équation

$$x\frac{dZ}{dx} + Z(R+I) - (R+I)Z = A(x)(Z_\lambda - \bar{Z}_\lambda)$$

déterminée dans le n:o 17. Si l'on désigne par M le maximum pour $2KK'_\lambda|x| \leqq \leqq \delta' < 1$, x dans X_α, des valeurs absolues des éléments de $Z_\lambda - \bar{Z}_\lambda$ divisés par $|x|^\lambda$ on aurait donc $M \leqq \delta' M$, ce qui est impossible pour $M > 0$. On en conclut que la solution trouvée de l'équation (27) est asymptôte à la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} C^{(\nu)}x^\nu$ dans X_α. Par là, le théorème 4 est démontré.

19. Nous pouvons maintenant par un énoncé condensé exprimer comment les solutions d'un système (4) se comportent dans le voisinage de $x=0$. On peut obtenir un système fondamental de solutions du système (19) sous forme d'une matrice composée dont les éléments diagonaux sont des matrices de la forme

$$e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} x^{R^{(i)}} F^{(i)}(\log x)$$

et les autres éléments sont des matrices o. Nous désignons cette matrice par Y.

D'après le théorème 4 il correspond à chaque secteur X_α une substitution linéaire par laquelle le système (4) se transforme en le système (19). Cette substitution définit une matrice $Z^{(\alpha)}$ telle que

$$Z^{(\alpha)} \sim E + \sum_{\nu=1}^{\infty} A^{(\nu)} x^\nu$$

dans X_α, $A^{(\nu)}$ étant certaines matrices constantes. La solution générale du système (4) s'obtient d'une matrice

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C,$$

où C est une matrice constante

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

Soit $C^{(\alpha)}$ une telle matrice déterminée. Dans le secteur commun à X_α, $X_{\alpha+1}$ on peut écrire

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C^{(\alpha)} = Z^{(\alpha+1)}\, Y\, C^{(\alpha+1)},$$

d'où résulte la substitution

$$C^{(\alpha+1)} = Y^{-1}\, Z^{(\alpha+1)^{-1}}\, Z^{(\alpha)}\, Y\, C^{(\alpha)} = C^{(\alpha,\, \alpha+1)}\, C^{(\alpha)}, \tag{36}$$

où

$$Y^{-1}\, Z^{(\alpha+1)^{-1}}\, Z^{(\alpha)}\, Y = C^{(\alpha,\, \alpha+1)} \tag{37}$$

est une matrice constante quadratique de déterminant égal à 1. À chaque pair de secteurs X_α, $X_{\alpha+1}$ correspond une substitution (36). À l'aide de ces substitutions on aura une suite de matrices constantes $C^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Les matrices

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sont prolongements analytiques l'une de l'autre quand x tourne autour de $x = 0$, sous la condition que la détermination de Y soit suivie par continuité.

Il résulte de la démonstration de l'existence de la matrice $Z^{(\alpha)}$ correspondant au secteur X_α que cette matrice n'est pas toujours univoquement déterminée mais qu'elle peut dépendre de constantes arbitraires. Nous avons maintenant un moyen de fixer comment ces constantes entrent. En effet, supposons que

$Z^{(\alpha)}$, $\bar{Z}^{(\alpha)}$ soient deux matrices correspondant à deux systèmes de valeurs des constantes. La solution générale du système (4) peut donc s'écrire sous l'une ou l'autre des formes suivantes

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C, \qquad \bar{Z}^{(\alpha)}\, Y\, \bar{C}.$$

On en conclut que la matrice

$$Y^{-1}\, Z^{(\alpha)^{-1}}\, \bar{Z}^{(\alpha)}\, Y$$

est une matrice constante, désignons la par C. Par suite

$$\bar{Z}^{(\alpha)} = Z^{(\alpha)}\, Y\, C\, Y^{-1}.$$

Inversement, soit C la matrice constante quadratique la plus générale telle que

$$Y\, C\, Y^{-1} \sim E + \sum_{\nu=1}^{\infty} C^{(\nu)} x^{\nu}$$

dans X_α. Alors

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C\, Y^{-1}$$

est l'expression générale de la matrice $\bar{Z}^{(\alpha)}$. Il résulte de la forme de la matrice Y que le seul cas possible est

$$Y\, C\, Y^{-1} \sim E$$

dans X_α.

Disons quelques mots du cas particulier où les seconds membres du système (4) sont uniformes autour de $x = 0$. Alors, il y a $2\, k_1$ substitutions (36). Partons d'une solution

$$Z^{(\alpha)}\, Y\, C$$

et faisons tourner x une fois autour de $x = 0$ dans le sens positif. Après le tour on aura la solution

$$Z^{(\alpha)}\, \bar{Y}\, \bar{C},$$

où $\bar{C}$ est lié à C par une substitution linéaire dont le déterminant est égal à 1 et $\bar{Y}$ est la matrice que l'on obtient de Y quand x tourne une fois autour de $x = 0$. Le déterminant d'une matrice $F^{(i)}(\log x)$ étant égal à 1 on en conclut que le produit des racines de l'équation fondamentale déterminante est égal à

$$\prod_{j=1}^{n} e^{2\pi i\, r_j}.$$

4. Développements en séries.

20. Nous étudions d'abord le cas le plus simple où l'équation caractéristique du système (1) n'a pas la racine 0, c'est-à-dire où tous les nombres k_i ont la même valeur. Alors, le système (2) a la forme suivante

$$(38)\quad \begin{aligned} x^{k+1}\frac{d y_i}{d x} &= a_i(x) + f_i(x) y_i + x^k(r_i y_i + \varepsilon_i y_{i-1}) \\ &\qquad + x^{k+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n; x) \\ &\qquad (i = 1, \ldots n). \end{aligned}$$

Nous considérons des secteurs X_α définis comme dans le paragraphe précédent, à cela près qu'on remplace les arguments φ^* par la réunion des arguments singuliers (voir p. 8) et des arguments φ^*, soit X un quelconque de ces secteurs. Il y a d'après le théorème 1 une solution $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ du système (38) asymptôte aux séries (15) dans X. En posant

$$y_i = \bar{y}_i + \eta_i \qquad (i = 1, \ldots n)$$

on aura pour $\eta_1, \ldots \eta_n$ un système analogue

$$(39)\quad x^{k+1}\frac{d\eta_i}{d x} = f_i(x)\eta_i + x^k(r_i\eta_i + \varepsilon_i\eta_{i-1}) + x^{k+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_j + \bar{\mathfrak{P}}_i(\eta_1, \ldots \eta_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots n).$$

D'après le théorème 4 le système linéaire

$$x^{k+1}\frac{d\eta_i}{d x} = f_i(x)\eta_i + x^k(r_i\eta_i + \varepsilon_i\eta_{i-1}) + x^{k+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_j$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

peut être transformé au système

$$(40)\quad x^{k+1}\frac{d z_i}{d x} = f_i(x) z_i + x^k(r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots n)$$

par une substitution

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n)$$

dont les coefficients satisfont à des relations asymptotiques

$$b_{ij}(x) \sim b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} x + \cdots$$

dans X, le déterminant $|b_{ij}^{(0)}|$ étant égal à 1. En faisant la même substitution dans le système (38) on aura un système de la forme suivante

$$(41) \qquad x^{k+1}\frac{dz_i}{dx} = f_i(x) z_i + x^k (r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots n),$$

où l'on a

$$\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x) z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$$

les coefficients $a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)$ étant asymptôtes à des séries de puissances dans X. Nous pouvons supposer que

$$|a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)| < A r'^{-(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}.$$

Nous faisons encore une transformation dans le système (41) de manière que les termes $\varepsilon_i z_{i-1}$ disparaissent. Cette transformation peut s'écrire (voir p. 31)

$$(42) \qquad z_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\log x) \bar{z}_j \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $f_{ij}(\log x)$ sont des fonctions entières et rationnelles de $\log x$ dont le déterminant est égal à 1. La substitution inverse est

$$\bar{z}_i = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(-\log x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n).$$

De plus nous posons $\bar{z}_i = x^\delta \zeta_i$ $(i = 1, \ldots n)$, δ étant un nombre positif. Pour $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ on aura le système suivant

$$x^{k+1}\frac{d\zeta_i}{dx} = (f_i(x) + (r_i - \delta) x^k) \zeta_i + x^{-\delta} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(-\log x) \mathfrak{P}_j(z_1, \ldots z_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

que nous écrivons

$$(43) \qquad x^{k+1}\frac{d\zeta_i}{dx} = (f_i(x) + (r_i - \delta) x^k) \zeta_i + \overline{\mathfrak{P}}_i(\zeta_1, \ldots \zeta_n; x)$$
$$(i = 1, \ldots n)$$

avec

$$\overline{\mathfrak{P}}_i(\zeta_1, \ldots \zeta_n; x) = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2} \bar{a}_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x) \zeta_1^{\alpha_1} \ldots \zeta_n^{\alpha_n}.$$

On peut supposer que,

$$|\bar{a}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)| < \bar{A}\,\bar{r}'^{-(\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$$

si $|x|$ est assez petit; nous préférons d'écrire

$$|\bar{a}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)| < \bar{A}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}.$$

21. Prenons une droite quelconque passant par l'origine et ne passant par aucun des points $s_i = f_i(0)$ $(i = 1, \ldots n)$. En rangeant les variables $y_1, \ldots y_n$ dans un ordre convenable on peut supposer que $s_1, \ldots s_p$ se trouvent d'un même côté de cette droite et que $s_{p+1}, \ldots s_n$ se trouvent de l'autre côté.

Soit τ_i la solution de l'équation

$$x^{k+1}\frac{d\zeta}{dx} = (f_i(x) + (r_i - \delta)x^k)\zeta$$

contenant une constante arbitraire C_i. Nous cherchons à obtenir une solution du système (43) sous la forme

$$(44)\quad \begin{aligned} \zeta_i &= \tau_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p\geqq 2}\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\,\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_p^{\alpha_p} & (i = 1, \ldots p) \\ \zeta_i &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p\geqq 2}\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\,\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_p^{\alpha_p} & (i = p+1, \ldots n). \end{aligned}$$

Les coefficients $\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ peuvent être calculés de la manière suivante. Supposons que l'on ait déterminé les fonctions $\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$. Une fonction $\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = N$ doit satisfaire à l'équation différentielle linéaire suivante du premier ordre

$$(45)\quad \begin{aligned} &x^{k+1}\frac{d\bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}}{dx} + \bar{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}\left\{\sum_{j=1}^{p}\alpha_j(f_j(x) + (r_j - \delta)x^k) - (f_i(x) + (r_i - \delta)x^k)\right\} \\ &\qquad = \sum \bar{a}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\,G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(\bar{\varphi}_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) + \bar{a}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}(x), \end{aligned}$$

où l'on a

$$2 \leqq \beta_1 + \cdots + \beta_n < N, \qquad 2 \leqq \gamma_1 + \cdots + \gamma_p < N$$

et

$$G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(\bar{\varphi}_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p})$$

désigne le coefficient de $\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_p^{\alpha_p}$ dans la série que l'on obtient en introduisant les séries (44) dans $\zeta_1^{\beta_1}\ldots\zeta_n^{\beta_n}$.

Nous étudions la convergence des séries (44) dans le cas où il n'y a entre $s_1, \ldots s_p$ aucune relation de la forme

$$s_i = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p,$$

$\alpha_1, \ldots \alpha_p$ étant des entiers $\geqq 0$ dont la somme est $\geqq 2$. Pour le cas où il y a des relations de cette forme nous renvoyons à (I) n:o 11.

Nous assujettisons les secteurs X_α à une condition nouvelle. Nous prenons l'argument φ_0, qui sert de base à la définition des secteurs X_α, de manière que le secteur $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ contienne des directions telles que les fonctions

$$e^{-s_i x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots p)$$

tendent vers 0 quand x tend vers 0 dans une telle direction. Nous pouvons supposer qu'il en est de même des fonctions

$$e^{-(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i) x^{-k}} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

pour toutes les valeurs entières $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ soit plus grand qu'un certain nombre N', car les nombres $\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i$, $s_1, \ldots s_p$ appartiennent alors à un même secteur faisant partie du demiplan dans lequel sont situés les nombres $s_1, \ldots s_p$.

De plus, pour chacun des nombres

$$\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i$$
$$(2 \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p \leqq N';\ i = 1, \ldots n)$$

on peut supposer que le secteur

$$\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{k}$$

contient des directions telles que la fonction

$$e^{-(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i) x^{-k}}$$

tende vers 0 quand x tend vers 0 dans une telle direction. Il suffit de supposer que φ_0, $\varphi_0 + \frac{\pi}{k}$ soient distincts des arguments pour lesquels une des expressions

$$\left| e^{(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i) x^{-k}} \right|$$
$$(2 \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p \leqq N';\ i = 1, \ldots n)$$

a la valeur 1.

Nous introduisons la variable auxiliaire $u = -\frac{1}{k} x^{-k}$ et nous considérons dans le plan u un domaine $\mathfrak{U}$ qui est limité par un arc du cercle $|x| = R = \frac{1}{k} r^{-k}$, r étant assez petit, et par deux demi-tangentes à ce cercle dont les directions correspondent aux directions limites de X (voir la figure 6). Soit $\mathfrak{X}$ le domaine correspondant dans le plan x.

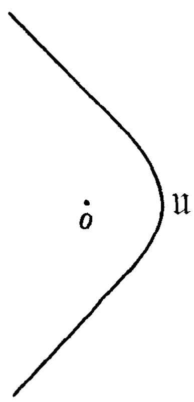


Fig. 6.

En prenant les nombres $\varphi_0 - \varphi'_\alpha$, $\varphi''_\alpha - \left(\varphi_0 + \frac{\pi}{k}\right)$ suffisamment petits on peut faire correspondre à chaque système de nombres $i, \alpha_1, \ldots \alpha_p$ $(i = 1, \ldots n;\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2)$ un secteur $U_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ faisant partie du secteur U correspondant à X de telle manière que l'ouverture de $U_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ soit plus grande qu'un nombre fixe ε et que l'on peut tirer à partir d'un point quelconque de $\mathfrak{U}$ une demidroite $l_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ qui appartient à $\mathfrak{U}$ et dont la direction appartient à $U_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$; le secteur $U_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ satisfait à la condition que la fonction

$$e^{(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_\beta s_p s_p - s_i) u}$$

tende vers 0 quand u tend vers l'infini dans une direction quelconque appartenant à ce secteur. On peut supposer que tous les secteurs $U_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p > N'$ soient identiques.

Cela posé, supposons que l'on ait déterminé les fonctions $\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$ et supposons que ces fonctions soient régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfassent à des inégalités

$$|\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)| < k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}.$$

Considérons une fonction $\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = N$. Elle doit satisfaire à l'équation (45). Posons

$$f_i(x) = s_i + c_{i1} u^{-\frac{1}{k}} + \cdots + c_{i,k-1} u^{-\frac{k-1}{k}}$$

$$\varphi_i(u) = s_i u + \frac{k}{k-1} c_{i1} u^{\frac{k-1}{k}} + \cdots + k c_{i,k-1} u^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k}(r_i - \delta) \log u$$

$$\varphi(u) = \alpha_1 \varphi_1(u) + \cdots + \alpha_p \varphi_p(u) - \varphi_i(u)$$

$$f(x) = \sum \bar{a}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\, G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(\overline{\varphi}_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) + \bar{a}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}(x)$$

et prenons la solution suivante de l'équation (45)

$$\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x) = e^{-\varphi(u)} \int\limits_{\infty}^{u} e^{\varphi(u)} f(x)\, du, \tag{46}$$

l'intégration étant effectuée le long de $l_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$. Alors on aura

$$|\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)| < |e^{-\varphi(u)}| \int\limits_{u}^{\infty} |e^{\varphi(u)}||du| \cdot$$
$$\cdot \left\{\sum \bar{A}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}\, G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) + \bar{A}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}\right\}.$$

Remarquons maintenant que

$$\left|\frac{v^{\frac{j}{k}} - u^{\frac{j}{k}}}{v - u}\right| < K r^{k-j} \qquad (j = 1, \ldots k-1)$$

$$\left|\frac{\log v - \log u}{v - u}\right| < K r^{k}$$

pour tout point v de la ligne d'intégration et que tous les nombres

$$\left|\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p - 1}{\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i}\right|$$

sont plus petits qu'un nombre fixe. Alors, on conclut facilement que

$$|e^{-\varphi(u)}| \int\limits_{u}^{\infty} |e^{\varphi(u)}||du| < K',$$

où K' est un nombre fixe indépendant de $i, \alpha_1, \ldots \alpha_p$. En posant

$$k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p} = K' \left\{\sum \bar{A}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}\, G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) + \bar{A}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}\right\}$$

on aura donc

$$|\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)| < k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}.$$

On aura donc une suite infinie de fonctions $\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|\overline{\varphi}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)| < k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p},$$

les nombres $k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}$ étant définis par les équations

$$k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p} = K'\left\{\sum \bar{A}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p} G^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) + \bar{A}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}\right\}.$$

Ces nombres sont les coefficients de séries

$$(47)\qquad \begin{aligned} \zeta_i &= \tau_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p\geqq 2} k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_p^{\alpha_p} && (i=1,\ldots p)\\ \zeta_i &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p\geqq 2} k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}\tau_1^{\alpha_1}\ldots\tau_p^{\alpha_p} && (i=p+1,\ldots n)\end{aligned}$$

qui satisfont formellement aux équations

$$\zeta_i = \tau_i + K'\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n\geqq 2}\bar{A}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}\zeta_1^{\beta_1}\ldots\zeta_n^{\beta_n} \qquad (i=1,\ldots p)$$

$$\zeta_i = K'\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n\geqq 2}\bar{A}_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}\zeta_1^{\beta_1}\ldots\zeta_n^{\beta_n} \qquad (i=p+1,\ldots n).$$

Les séries (47) ont un domaine de convergence $|\tau_i| < r'$ $(i=1,\ldots p)$. Par suite, les séries (44) sont absolument et uniformément convergentes pour les valeurs de $x, \tau_1, \ldots \tau_p$, considérées comme des variables indépendantes, telles que

$$|x| < r,\ |\tau_i| < r'\ (i=1,\ldots p),\ x \text{ dans } \mathfrak{X}.$$

22. Revenons aux variables $z_1, \ldots z_n$ et posons (voir (42))

$$t_i = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(\log x)\tau_j \cdot x^{\delta} \qquad (i=1,\ldots p).$$

Alors $t_1, \ldots t_p$ est la solution générale du système

$$x^{k+1}\frac{dz_i}{dx} = f_i(x)z_i + x^k(r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) \qquad (i=1,\ldots p).$$

On aura

$$z_i = t_i + x^\delta \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(\log x) \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \bar{\varphi}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, \tau_1^{\alpha_1} \ldots \tau_p^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \ldots p)$$

$$z_i = x^\delta \sum_{j=p+1}^{n} f_{ij}(\log x) \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \bar{\varphi}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, \tau_1^{\alpha_1} \ldots \tau_p^{\alpha_p} \qquad (i = p+1, \ldots n).$$

En posant ici

$$x^\delta \tau_i = \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(-\log x)\, t_i \qquad (i = 1, \ldots p)$$

on aura des séries qui peuvent s'écrire

$$(48) \qquad \begin{aligned} z_i &= t_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (i = 1, \ldots p) \\ z_i &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (i = p+1, \ldots n). \end{aligned}$$

Elles convergent pour des valeurs de $x, t_1, \ldots t_p$ telles que

$$|x| < r,\ x \text{ dans } \mathfrak{X},\ |t_i|\,|x|^{-\delta}\,|\log x|^\nu < \bar{r}' \qquad (i = 1, \ldots p),$$

où ν est le plus grand des degrés des fonctions f_{ij} $(i, j = 1, \ldots p)$ et $\bar{r}'$ est un nombre assez petit.

Nous étudions les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$. Les séries (48) satisfont aux système (41) quelles que soient les constantes d'intégration qui entrent dans $t_1, \ldots t_p$. Par suite, les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ correspondant aux valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = N$ doivent satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p = N} x^{k+1} \frac{d}{dx} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} = \\ = (f_i(x) + r_i x^k) \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p = N} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} \\ + \varepsilon_i x^k \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p = N} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} \\ + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p = N} \Big\{ \sum a_{i,\beta_1,\ldots\beta_n}(x)\, G_{\beta_1,\ldots\beta_n}^{\alpha_1,\ldots\alpha_p}(\varphi_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_p}) \\ + a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p,0,\ldots 0}(x) \Big\} t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} \\ (i = 1, \ldots n), \end{aligned}$$

où l'on a

$$2 \leqq \beta_1 + \cdots + \beta_n < N, \ 2 \leqq \gamma_1 + \cdots + \gamma_p < N.$$

En effectuant la dérivation de $t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p}$ on doit se servir des équations

$$x^{k+1} \frac{d t_i}{d x} = f_i(x) t_i + x^k (r_i t_i + \varepsilon_i t_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots p).$$

Désignons les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ $(i = 1, \ldots n; \ \alpha_1 + \cdots + \alpha_p = N)$ dans un ordre convenable par $\varphi_1(x), \ldots \varphi_M(x)$. L'équation différentielle pour

$$\varphi_h(x) = \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$$

peut s'écrire

$$x^{k+1} \frac{d \varphi_h}{d x} + P_h(x) \varphi_h + \sum \delta_j \varphi_j = F_h(x), \tag{49}$$

où l'on a posé

$$P_h(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j (f_j(x) + r_j x^k) - (f_i(x) + r_i x^k)$$

$$F_h(x) = \sum a_{i, \beta_1, \ldots \beta_n}(x) \, G_{\beta_1, \ldots \beta_n}^{\alpha_1, \ldots \alpha_p}(\varphi_{j, \gamma_1, \ldots \gamma_p}) + a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p, 0, \ldots 0}(x)$$

$$\sum \delta_j \varphi_j = \sum_{j'=2}^{p} \varepsilon_{j'} \alpha_{j'} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_{j'-1} - 1, \alpha_{j'} + 1, \ldots \alpha_p} - \varepsilon_i \varphi_{i-1, \alpha_1, \ldots \alpha_p}$$

$\alpha_{j'-1}$ étant > 0 et $\alpha_{j'}$ étant $< N$. Il est loisible de supposer que la somme $\sum \delta_j \varphi_j$ ne contienne que des termes correspondant à $j < h$. C'est ce que l'on voit par induction en prenant d'abord les fonctions correspondant à $\alpha_p = N$, ensuite les fonctions correspondant à $\alpha_p = N - 1$, et ainsi de suite, et en supposant la chose établie quand on remplace p par $p - 1$.

Nous pouvons maintenant démontrer que les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ sont asymptôtes à des séries de puissances de x dans tout secteur à l'intérieur de X et par suite dans X, le secteur X pouvant être remplacé par un secteur un peu plus grand. En effet, supposons ce résultat établi pour les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$ et pour les fonctions $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots M)$ correspondant à des valeurs de j plus petites que h. Alors, les fonctions $\sum \delta_j \varphi_j$, $F_h(x)$ entrant dans (49) sont asymptôtes à des séries de puissances de x.

Il résulte de ce qui précède que les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ satisfont à des inégalités de la forme

$$|\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)| < K_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p} |x|^{-\delta(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p - 1)} |\log x|^{\nu(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p + 1)}.$$

Le secteur X contient des directions telles que la fonction

$$e^{-(\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p - s_i) x^{-k}}$$

tende vers 0 quand x tend vers 0 dans une telle direction (voir. p. 43). Par suite $\varphi_h(x)$ doit être une expression de la forme (46), $f(x)$ étant remplacé par $F_h(x) - \sum \delta_j \varphi_j$. Il en résulte que $\varphi_h(x)$ est asymptôte à une série de puissances de x.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

Théorème 5. *Nous supposons que les racines $s_1, \ldots s_n$ de l'équation caractéristique du système* (1) *sont $\neq 0$. Prenons une ligne droite passant par l'origine de manière que $s_1, \ldots s_p$ se trouvent de l'un côté de cette droite et $s_{p+1}, \ldots s_n$ de l'autre côté.*

Supposons qu'il n'y ait entre $s_1, \ldots s_p$ aucune relation de la forme

$$s_i = \alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_p s_p.$$

Prenons un secteur X d'ouverture $> \frac{\pi}{k}$ $(k = k_1)$ satisfaisant aux conditions posées aux pages 27, 43.

Par une substitution

$$y_i = \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $\bar{y}_i$, b_{ij} sont asymptôtes dans X à des séries de puissances de x, le système (38) *se transforme à un système de la forme* (41).

Soit $t_1, \ldots t_p$ la solution générale du système linéaire

$$x^{k+1} \frac{d t_i}{d x} = f_i(x) t_i + x^k (r_i t_i + \varepsilon_i t_{i-1}) \qquad (i = 1, \ldots p).$$

Il y a un système de séries

$$(48)\qquad \begin{aligned} z_i &= t_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (i = 1, \ldots p) \\ z_i &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \ldots t_p^{\alpha_p} && (i = p+1, \ldots n) \end{aligned}$$

qui satisfont au système (41) *quelles que soient les constantes* $C_1, \ldots C_p$ *entrant dans* $t_1, \ldots t_p$. *Les coefficients* $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_p}(x)$ *sont asymptôtes dans* X *à des séries de puissances de* x. *À tout nombre* δ *correspondent des nombres* r, r' *de telle manière que les séries* (48) *soient convergeantes pour les valeurs de* x, $t_1, \ldots t_p$ *telles que*

$$|x| < r,\ x \text{ dans } X,\ |t_i| < r'|x|^\delta \qquad (i = 1, \ldots p).$$

On peut se servir des séries (48) pour étudier les domaines d'existence des solutions du système (38) et pour suivre les solutions de ce système quand x tourne autour de $x = 0$. Nous renvoyons pour cette étude à (I) p. 121—129.

23. La théorie précédente peut être appliquée, avec des légères modifications, à l'étude d'un système (38) où $k = 0$.

Par une substitution

$$y_i = \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où $\bar{y}_i$, b_{ij} sont asymptôtes à des séries de puissances de x sur la surface de Riemann de $\log x$, le système (38) se transforme à un système de la forme

$$(50)\qquad x\frac{dz_i}{dx} = r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) \qquad (i = 1, \ldots n),$$

où

$$\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n; x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$$

les coefficients $a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)$ étant asymptôtes à des séries de puissances sur la surface de Riemann de $\log x$.

Prenons une ligne droite passant par l'origine et ne passant par aucun des points $1, r_1, \ldots r_n$. Supposons que $1, r_1, \ldots r_p$ se trouvent de l'un côté de cette droite et $r_{p+1}, \ldots r_n$ de l'autre côté. Nous supposons qu'il n'y a aucune relation de la forme

$$r_i = \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p + \alpha \qquad (i = 1, \ldots p),$$

où α, $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ sont des entiers $\geqq 0$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2$. Pour plus de simplicité nous supposons de plus que tous les nombres ε_i sont 0.

Nous cherchons à satisfaire au système (50) par des séries de la forme

$$(51) \quad \begin{aligned} y_i &= C_i x^{r_i} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) (C_1 x^{r_1})^{\alpha_1} \ldots (C_p x^{r_p})^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \ldots p) \\ y_i &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x) (C_1 x^{r_1})^{\alpha_1} \ldots (C_p x^{r_p})^{\alpha_p} \qquad (i = p + 1, \ldots n). \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait déterminé les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$. Une fonction $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = N$ doit satisfaire à l'équation

$$(52) \quad \begin{aligned} x \frac{d \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}}{dx} + (\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i) \varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p} = \\ = \sum a_{i, \beta_1, \ldots \beta_n}(x) G^{\alpha_1, \ldots \alpha_p}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(\varphi_{j, \gamma_1, \ldots \gamma_p}) + a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p, 0, \ldots 0}(x), \end{aligned}$$

où $2 \leqq \beta_1 + \cdots + \beta_n < N$, $2 \leqq \gamma_1 + \cdots + \gamma_p < N$.

D'après la supposition il y a deux arguments φ_0, φ_1 tels que $0 < \varphi_1 - \varphi_0 < \pi$ et que les arguments des nombres 1, $\frac{1}{r_1}, \ldots \frac{1}{r_p}$ soient situés entre φ_0 et φ_1. Nous pouvons supposer aussi que les arguments des nombres

$$\frac{1}{\alpha + \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

soient situés entre φ_0 et φ_1 pour tous les nombres α, $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ dont la somme est plus grand qu'un certain nombre N'. Nous introduisons la variable auxiliaire $u = \log x$. Dans le plan de cette variable nous considérons le secteur

$$U\colon \varphi_1 + \frac{\pi}{2} < \varphi < \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}$$

qui est situé à gauche de l'axe imaginaire.

Nous pouvons supposer que

$$|a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}(x)| < A_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n}$$

et que les séries $\sum A_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ ont un domaine de convergence.

Supposons démontré que les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$ soient régulières sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$ et qu'elles soient asymptôtes à des séries de puissances de x. Alors la même chose a lieu pour la fonction

$$f(x) = \sum a_{i, \beta_1, \ldots, \beta_n}(x)\, G^{\alpha_1, \ldots \alpha_p}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(\varphi_{j, \gamma_1, \ldots \gamma_p}) + a_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p, 0, \ldots 0}(x).$$

En supposant que

$$|\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)| < k_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}$$

pour $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p < N$ on aura

$$|f(x)| < \sum A_{i, \beta_1, \ldots \beta_n} G^{\alpha_1, \ldots \alpha_p}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(k_{j, \gamma_1, \ldots \gamma_p}) + A_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p, 0, \ldots 0}.$$

Maintenant deux cas sont à considérer suivant que $N > N'$ ou $N \leqq N'$. Supposons d'abord que $N > N'$. Nous prenons alors la solution suivante de l'équation (52)

$$\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p} = e^{-(\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i) u} \int\limits_{\substack{\infty \\ l}}^{u} e^{(\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i) u} f(x)\, du$$

l'intégration étant effectué le long d'une demi-droite l dont la direction appartient au secteur U. On en conclut que

$$|\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)| < K' \left\{ \sum A_{i, \beta_1, \ldots \beta_n} G^{\alpha_1, \ldots \alpha_p}_{\beta_1, \ldots \beta_n}(k_{j, \gamma_1, \ldots \gamma_p}) + A_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p, 0, \ldots 0} \right\},$$

où K' est un nombre indépendant de $i, \alpha_1, \ldots \alpha_p$. De plus, on voit que $\varphi_{i, \alpha_1, \ldots \alpha_p}(x)$ est régulière sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$ et asymptôte à une série de puissances de x.

Supposons ensuite que $N \leqq N'$. On peut prendre l'entier α de manière que $\alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_p > N'$. Posons

$$f(x) \sim a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots.$$

Nous prenons la solution suivante de l'équation (52)

$$\varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p} = \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{a_\nu x^\nu}{\nu + \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i} +$$

$$+ e^{-(\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i) u} \int\limits_{\substack{\infty \\ l}}^{u} e^{(\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p - r_i) u} \left(f(x) - \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} a_\nu x^\nu\right) du.$$

On voit facilement que cette fonction est régulière sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$ et asymptôte à une série de puissances de x. Il y a un nombre $K_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}$ de manière que

$$|\varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}(x)| < K_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}\left\{\sum A_{i,\beta_1,\dots\beta_p} G^{\alpha_1,\dots\alpha_p}_{\beta_1,\dots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\dots\gamma_p}) + A_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p,0,\dots0}\right\}.$$

Désignons par K le plus grand des nombres K' et $K_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}$ $(i = 1, \dots n;$ $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p \leqq N')$. Nous avons obtenu une suite infinie de fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}(x)$ qui sont régulières sur la surface de Riemann de $\log x$ pour $0 < |x| < r$ et asymptôtes à des séries de puissances. Elles satisfont aux inégalités

$$|\varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}(x)| < k_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p},$$

les nombres $k_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}$ étant déterminés par les équations

$$k_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p} = K\left\{\sum A_{i,\beta_1,\dots\beta_n} G^{\alpha_1,\dots\alpha_p}_{\beta_1,\dots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\dots\gamma_p}) + A_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p,0,\dots0}\right\}.$$

Alors on conclut comme précédamment que les séries

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p\geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \dots t_p^{\alpha_p} \qquad (i = 1, \dots n)$$

convergent absolument et uniformément pour $|x| < r$, $|t_i| < r'$ $(i = 1, \dots p)$, r et r' étant suffisamment petits.

Dans le cas où les seconds membres du système (50) sont des séries de puissances de $x, y_1, \dots y_n$ on voit facilement que les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\dots\alpha_p}(x)$ sont des séries de puissances de x convergentes pour $|x| < r$. On retrouve donc un résultat classique.[1]

Disons enfin quelques mots du cas où il y a dans (50) des nombres ε_i qui sont $\neq 0$ et où il y a des relations de la forme

$$r_i = \alpha + \alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p \qquad (i = 1, \dots p).$$

[1] Voir É. Picard, Traité d'Analyse, t. III, p. 17—22.

L'ordre des variables $z_1, \dots z_p$ étant choisi d'une manière convenable on peut supposer que ces relations sont de la forme

$$r_i = \alpha + \alpha_1 r_1 + \dots + \alpha_{i-1} r_{i-1}. \tag{53}$$

On doit maintenant considérer un certain système d'équations différentielles

$$x\frac{dz_i}{dx} = r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1} + G_i(x, z_1, \dots z_{i-1}) \qquad (i = 1, \dots p), \tag{54}$$

$G_i(x, z_1, \dots, z_{i-1})$ étant une certaine fonction entière et rationnelle de $x, z_1, \dots z_{i-1}$ contenant des termes

$$a_{\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}} x^\alpha z_1^{\alpha_1} \dots z_{i-1}^{\alpha_{i-1}},$$

où les exposants $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ sont les nombres qui figurent dans les relations (53). On a $\varepsilon_1 = 0$, $G_1 = 0$. Soit $t_1, \dots t_p$ la solution générale du système (54). Probablement on peut obtenir un système de séries

$$(55) \qquad \begin{aligned} z_i &= t_i + \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \dots t_p^{\alpha_p} && (i = 1, \dots p) \\ z_i &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_p \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_p}(x)\, t_1^{\alpha_1} \dots t_p^{\alpha_p} && (i = p + 1, \dots n) \end{aligned}$$

qui satisfont au système (50) quelles qui soient les constantes entrant dans $t_1, \dots t_p$, les coefficients $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_p}(x)$ étant asymptôtes à des séries de puissances de x et les séries (55) étant convergentes pour

$$|x| < r, \ |t_i| < r' |x|^\delta \qquad (i = 1, \dots p).$$

Dans le cas où les seconds membres de (50) sont des séries de puissances de $x, z_1, \dots z_n$ ce résultat est connu[1]. Alors $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_p}(x)$ sont des séries de puissances de x et les séries (55) convergent pour $|x| < r$, $|t_i| < r'$ $(i = 1, \dots n)$.

24. Passons à l'étude d'un système (2) dans le cas où les nombres $k_1, \dots k_n$ ne sont pas identiques. Nous écrivons le système de la manière suivante

[1] Voir H. DULAC; Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières. S. M. F. Bull., t. 40, p. 324—383.

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
x^{k_i+1}\frac{d\,y_i}{d\,x} &= a_i(x) + f_i(x)\,y_i + x^{k_i}(r_i\,y_i + \varepsilon_i\,y_{i-1}) \\
&\qquad + x^{k_i+1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,y_j + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\, x) \qquad (i = 1, \ldots m) \\
x\frac{d\,y_i}{d\,x} &= a_i(x) + r_i\,y_i + \varepsilon_i\,y_{i-1} + x\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\,y_j + \mathfrak{P}_i(y_1, \ldots y_n;\, x) \\
&\qquad (i = m + 1, \ldots n).
\end{aligned}
$$

On peut toujours obtenir des séries de la forme (48). Mais on rencontre en général des difficultés quand on veut étudier la convergence. Pour que les séries soient aussi efficaces que possible elles doivent être convergentes quand les valeurs absolues de x et des expressions t sont plus petites que certains nombres. Mais nous allons nous limiter dans ce travail à démontrer la convergence des séries déduites pour des valeurs assez petites des valeurs absolues de x et des constantes arbitraires entrant dans les expressions t.

Nous prenons un secteur X pour lequel les théorèmes 2, 4 ont lieu. Il y a une substitution

$$
y_i = \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x)\,z_j \qquad (i = 1, \ldots n)
$$

par laquelle le système (56) se transforme à un système de la forme

$$
(57)\quad
\begin{aligned}
x^{k_i+1}\frac{d\,z_i}{d\,x} &= f_i(x)\,z_i + x^{k_i}(r_i\,z_i + \varepsilon_i\,z_{i-1}) \\
&\qquad + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n;\, x) \qquad (i = 1, \ldots m) \\
x\frac{d\,z_i}{d\,x} &= r_i\,z_i + \varepsilon_i\,z_{i-1} + \mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n;\, x) \qquad (i = m + 1, \ldots n),
\end{aligned}
$$

où

$$
\mathfrak{P}_i(z_1, \ldots z_n;\, x) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \geqq 2} a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)\, z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n} \qquad (i = 1, \ldots n).
$$

Les fonctions $\bar{y}_i$, b_{ij}, $a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ sont asymptôtes dans X à des séries de puissances de x. On peut supposer que

$$
|a_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n}(x)| < A_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n},
$$

les séries $\Sigma A_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_n} z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$ ayant un domaine de convergence.

Pour plus de simplicité nous supposons que tous les nombres ε_i sont 0.

Nous employons les mêmes notations que dans la démonstration du théorème 2. De plus, nous désignons par

$$t_i = C_i \left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_i} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right) - Q_i\left(\frac{1}{x_0}\right)} \qquad (i = i_1, \dots i_\varkappa)$$

les solutions générales des équations

$$x^{k_i+1} \frac{dz_i}{dx} = (f_i(x) + r_i x^{k_i}) z_i \qquad (i = i_1, \dots i_\varkappa).$$

25. Nous cherchons des solutions du système (57) sous la forme suivante

$$(58) \quad \begin{aligned} z_i &= t_i + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)\, C_{i_1}^{\alpha_1} \dots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} && (i = i_1, \dots i_\varkappa) \\ z_i &= \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa \geqq 2} \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)\, C_{i_1}^{\alpha_1} \dots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} && (i \neq i_1, \dots i_\varkappa). \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait déterminé les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa < N$. Les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)$ correspondant à un système de valeurs de $\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa = N$ doivent satisfaire aux équations

$$(59) \quad \begin{aligned} x^{k_i+1} \frac{d\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}}{dx} &= (f_i(x) + r_i x^{k_i}) \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} \\ &\quad + \sum a_{i, \beta_1, \dots \beta_n}(x)\, G_{\beta_1, \dots \beta_n}^{\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(\varphi_{j, \gamma_1, \dots \gamma_\varkappa}) \\ &\quad + a_{i, \delta_1, \dots \delta_n}(x) \left(\frac{t_{i_1}}{C_{i_1}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{t_{i_\varkappa}}{C_{i_\varkappa}}\right)^{\alpha_\varkappa} \\ &\qquad (i = 1, \dots m) \\ x \frac{d\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}}{dx} &= r_i \varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} \\ &\quad + \sum a_{i, \beta_1, \dots \beta_n}(x)\, G_{\beta_1, \dots \beta_n}^{\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(\varphi_{j, \gamma_1, \dots \gamma_\varkappa}) \\ &\quad + a_{i, \delta_1, \dots \delta_n}(x) \left(\frac{t_{i_1}}{C_{i_1}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{t_{i_\varkappa}}{C_{i_\varkappa}}\right)^{\alpha_\varkappa} \\ &\qquad (i = m + 1, \dots n). \end{aligned}$$

Ici on a

$$\delta_i = 0 \qquad (i \neq i_1, \dots i_\varkappa)$$

$$\delta_{i_1} = \alpha_1, \dots \delta_{i_\varkappa} = \alpha_\varkappa$$

$$2 \leqq \beta_1 + \cdots + \beta_n < N, \qquad 1 \leqq \gamma_1 + \cdots + \gamma_\varkappa < N.$$

On n'a $\gamma_1 + \cdots + \gamma_\varkappa = 1$ que pour $j = i_\nu$ et alors $\gamma_\nu = 1$, $\varphi_{i_\nu, \gamma_1, \dots \gamma_\varkappa} = \dfrac{t_{i_\nu}}{C_{i_\nu}}$.

On peut supposer que

$$\left|\frac{t_{i_\nu}}{C_{i_\nu}}\right| < \left|\frac{x}{x_0}\right|^N \qquad (\nu = 1, \dots \varkappa)$$

pour les valeurs de x qui appartiennent à $\mathfrak{X}$ (voir p. 21). Supposons que les fonctions $\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)$ correspondant à des valeurs de $\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa$ telles que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_\varkappa < N$ soient régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfassent à des inégalités

$$|\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}(x)| < k_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} \left|\frac{x}{x_0}\right|^N.$$

Alors, les fonctions

$$\varphi_i(x) = \sum a_{i, \beta_1, \dots \beta_n}(x)\, G^{\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}_{\beta_1, \dots \beta_n}(\varphi_{j, \gamma_1, \dots \gamma_\varkappa}) + a_{i, \delta_1, \dots \delta_n}(x) \left(\frac{t_{i_1}}{C_{i_1}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{t_{i_\varkappa}}{C_{i_\varkappa}}\right)^{\alpha_\varkappa} \qquad (i = 1, \dots n)$$

sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|\varphi_i(x)| < \left|\frac{x}{x_0}\right|^N \left\{\sum A_{i, \beta_1, \dots \beta_n}\, G^{\alpha_1, \dots \alpha_\varkappa}_{\beta_1, \dots \beta_n}(k_{j, \gamma_1, \dots \gamma_\varkappa}) + A_{i, \delta_1, \dots \delta_n}\right\} \qquad (i = 1, \dots n).$$

Nous prenons les solutions suivantes des équations (59)

$$\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} = x^{r_i} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} \int_{u_{i0}}^{u_i} x^{-r_i} e^{-Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} \varphi_i(x)\, du_i \qquad (i = i_1, \dots i_\varkappa)$$

$$\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} = x^{r_i} e^{Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} \int_{\infty}^{u_i} x^{-r_i} e^{-Q_i\left(\frac{1}{x}\right)} \varphi_i(u)\, du_i \qquad (i = 1, \dots m;\ i \neq i_1, \dots i_\varkappa)$$

$$\varphi_{i, \alpha_1, \dots \alpha_\varkappa} = x^{r_i} \int_{\infty}^{u} x^{-r_i} \varphi_i(x)\, du \qquad (i = m + 1, \dots n),$$

les lignes d'intégrations étant les mêmes que dans la démonstration du théorème 2. Alors nous concluons que les fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)$ $(i = 1, \ldots n)$ sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)| < K'\left|\frac{x}{x_0}\right|^N \left\{\sum A_{i,\beta_1,\ldots\beta_n} G^{\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_\varkappa}) + A_{i,\delta_1,\ldots\delta_n}\right\}$$
$$(i = 1, \ldots n),$$

où K' est un certain nombre fixe.

On aura donc une suite infinie de fonctions $\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)$ qui sont régulières dans $\mathfrak{X}$ et satisfont aux inégalités

$$|\varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)| < k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}\left|\frac{x}{x_0}\right|^N,$$

les nombres $k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}$ étant définis par les équations

$$k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa} = K'\left\{\sum A_{i,\beta_1,\ldots\beta_n} G^{\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}_{\beta_1,\ldots\beta_n}(k_{j,\gamma_1,\ldots\gamma_\varkappa}) + A_{i,\delta_1,\ldots\delta_n}\right\}$$

où l'on n'a $\gamma_1 + \cdots + \gamma_\varkappa = 1$ que pour $j = i_\nu$; alors $\gamma_\nu = 1$ et $k_{i_\nu,\gamma_1,\ldots\gamma_\varkappa} = 1$.

Les séries

$$z_i = C_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_\varkappa \geqq 2} k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa} C_{i_1}^{\alpha_1} \ldots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$z_i = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_\varkappa \geqq 2} k_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa} C_{i_1}^{\alpha_1} \ldots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} \qquad (i \neq i_1, \ldots i_\varkappa)$$

satisfont aux équations

$$z_i = C_i + K' \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n \geqq 2} A_{i,\beta_1,\ldots\beta_n} z_1^{\beta_1} \ldots z_n^{\beta_n} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

$$z_i = K' \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n \geqq 2} A_{i,\beta_1,\ldots\beta_n} z_1^{\beta_1} \ldots z_n^{\beta_n} \qquad (i \neq i_1, \ldots i_\varkappa),$$

elles ont donc un domaine de convergence. Par suite, les séries (58) convergent pour les valeurs de x qui appartiennent à $\mathfrak{X}$ et pour $|C_i| < r'$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$, r' étant suffisamment petit.

On voit facilement que les fonctions $z_1, \ldots z_n$ définies par les séries (58) satisfont à des inégalités

$$|z_i| < KK''|x|^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

si $C_{i_1}, \ldots C_{i_\varkappa}$ satisfont à

$$|C_i| < K|x_0|^N < r' \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa).$$

Dans le cas où il y a des nombres ε_i qui sont $\neq 0$ on fait d'abord la substitution (42). Ensuite on peut appliquer les raisonnements précédents. On aura un résultat analogue, les fonctions $t_{i_1}, \ldots t_{i_\varkappa}$ devant être remplacées par la solution générale du système

$$x^{k_i+1}\frac{d z_i}{d x} = f_i(x) z_i + x^{k_i}(r_i z_i + \varepsilon_i z_{i-1}) \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

c'est-à-dire par des expressions de la forme

$$\sum_{\beta=1}^{\varkappa} f_{i_\alpha, i_\beta}(\log x)\; C_{i_\beta}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_{i_\beta}} e^{Q_{i_\beta}\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{i_\beta}\left(\frac{1}{x_0}\right)} \qquad (\alpha = 1, \ldots \varkappa).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant qui est valable sous les mêmes conditions sous lesquelles le théorème 2 a lieu, et qui doit être considéré comme un complément de ce théorème montrant comment les solutions dépendent des valeurs initiales.

Théorème 6. *Par une substitution de la forme*

$$y_i = \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n) \tag{60}$$

où $\bar{y}_i$, b_{ij} sont des fonctions asymptôtes dans X à des séries de puissances de x, le système (56) se transforme à un système de la forme (57).

Soit

$$t_i = \sum_{\beta=1}^{\varkappa} f_{i, i_\beta}(\log x)\; C_{i_\beta}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{r_{i_\beta}} e^{Q_{i_\beta}\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{i_\beta}\left(\frac{1}{x_0}\right)} \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa)$$

la solution générale du système

$$x^{k_i+1}\frac{d t_i}{d x} = f_i(x) t_i + x^{k_i}(r_i t_i + \varepsilon_i t_{i-1}) \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa).$$

Il y a un système de séries

$$\begin{aligned} z_i &= t_i + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_\varkappa \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)\; C_{i_1}^{\alpha_1} \ldots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} && (i = i_1, \ldots i_\varkappa) \\ z_i &= \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_\varkappa \geqq 2} \varphi_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_\varkappa}(x)\; C_{i_1}^{\alpha_1} \ldots C_{i_\varkappa}^{\alpha_\varkappa} && (i \neq i_1, \ldots i_\varkappa) \end{aligned} \tag{61}$$

qui satisfont au système (57) *pour des valeurs quelconques de* $C_{i_1}, \ldots C_{i_\varkappa}$ *satisfaisant à* $|C_i| < r'$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$. *Ces séries convergent pour les valeurs de* x *qui appartiennent au domaine* $\mathfrak{X}$ *et pour* $|C_i| < r'$ $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$. *Elles satisfont à des inégalités*

$$|z_i| < KK''|x|^N \qquad (i = 1, \ldots n)$$

si $C_{i_1}, \ldots C_{i_\varkappa}$ *satisfont à*

$$|C| < K|x_0|^N < r' \qquad (i = i_1, \ldots i_\varkappa).$$

26. Le théorème 6 n'est pas de la même porteé que le théorème 5. Mais on peut se servir du théorème 6 pour suivre certaines solutions du système (56) quand x tourne autour de $x = 0$. Nous allons considérer une suite de secteurs satisfaisant aux conditions suivantes. Deux secteurs consécutifs ont une partie commune. Le théorème 4 est applicable à chaque secteur. Les directions limites des secteurs sont distinctes des directions singulières. Chaque secteur contient au plus une seule direction singulière. Si un secteur contient un argument singulier $\overline{\varphi}$ ce secteur doit être de la forme $\overline{\varphi} - \delta < \varphi < \overline{\varphi} + \delta$.

Soit $X_0, X_1, \ldots$ une suite de secteurs satisfaisant à ces conditions. Nous supposons qu'on les rencontre successivement quand x tourne dans le sens positif. Nous supposons qu'il existe une suite de nombre $i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}$ plus petits que $m + 1$ de telle manière que les fonctions

$$e^{-s_i x^{-k_i}} \qquad (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$$

tendent vers 0 quand x tend vers 0 dans une direction quelconque appartenant à X_0. Soit i un des nombres $1, \ldots m$ différent de $i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}$. Alors la fonction

$$e^{-s_i x^{-k_i}}$$

tend vers l'infini quand x tend vers 0 dans certaines directions appartenant à X_0. À $X_1, X_2, \ldots$ correspondent de même des suites de nombres

$$i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)};\ i_1^{(2)}, \ldots i_{\varkappa_2}^{(2)};\ \ldots$$

À chacun des secteurs $X_0, X_1, \ldots$ on peut appliquer le théorème 6. Soit

$$y_i = y_i^{(\nu)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\nu)} z_j^{(\nu)} \qquad (i = 1, \ldots n)$$

la substitution (60) correspondant à X_ν et soient

$$C_{i_1^{(\nu)}}^{(\nu)}, \ldots C_{i_{\varkappa_\nu}^{(\nu)}}^{(\nu)}$$

les constantes arbitraires qui entrent dans les séries (61) correspondant à X_ν. Désignons les coefficients de ces séries par $\varphi^{(\nu)}_{i,\alpha_1,\ldots\alpha_{\varkappa_\nu}}$ et posons

$$t_i^{(\nu)} = \sum_{\beta=1}^{\varkappa_\nu} f_{i,\, i_\beta^{(\nu)}}(\log x)\, C^{(\nu)}_{i_\beta^{(\nu)}} \left(\frac{x}{x_\nu}\right)^{r_{i_\beta^{(\nu)}}} e^{Q_{i_\beta^{(\nu)}}\left(\frac{1}{x}\right) - Q_{i_\beta^{(\nu)}}\left(\frac{1}{x_\nu}\right)}$$

$$(i = i_1^{(\nu)}, \ldots i_{\varkappa_\nu}^{(\nu)}).$$

Nous pouvons supposer que $|x_0| = |x_1| = \cdots = r$. Soient $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1, \ldots$ les domaines $\mathfrak{X}$ correspondant aux secteurs X_0, $X_1, \ldots$ et désignons par $x_{\nu-1,\nu}$ le point d'intersection entre les courbes limitant $\mathfrak{X}_{\nu-1}$ et $\mathfrak{X}_\nu$.

Pour les deux systèmes de nombres $i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}$ et $i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)}$ deux cas sont à considérer: ou bien ces deux systèmes n'ont aucun nombre commun, ou bien il y a des nombres $i_1^{(0,1)}, \ldots i_{\varkappa_{01}}^{(0,1)}$ qui sont communs aux deux systèmes. Nous considérons d'abord le premier cas. Dans les équations

$$y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(0)} z_j^{(0)} = y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} z_j^{(1)}$$

$$(i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)},\ i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

nous posons $x = x_{01}$. Les équations ainsi obtenues peuvent être résolues par rapport à $z_j^{(0)}$ $(j = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$, $z_j^{(1)}$ $(j = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$ comme il résulte de n:o 13. Dans les expressions ainsi obtenues nous introduisons

$$z_j^{(0)} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa_0} \geqq 2} \varphi^{(0)}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_{\varkappa_0}}(x_{01})\, C^{(0)\alpha_1}_{i_1^{(0)}} \ldots C^{(0)\alpha_{\varkappa_0}}_{i_{\varkappa_0}^{(0)}} \qquad (j \neq i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$$

$$z_j^{(1)} = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa_1} \geqq 2} \varphi^{(1)}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_{\varkappa_1}}(x_{01})\, C^{(1)\alpha_1}_{i_1^{(1)}} \ldots C^{(1)\alpha_{\varkappa_1}}_{i_{\varkappa_1}^{(1)}} \qquad (j \neq i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)}).$$

Désignant par $\zeta_j^{(0)}$ $(j = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$ et $\zeta_j^{(1)}$ $(j = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$ les expressions ainsi obtenues nous considérons les équations

$$\zeta_j^{(0)} = t_j^{(0)} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa_0} \geqq 2} \varphi^{(0)}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_{\varkappa_0}}(x_{01})\, C^{(0)\alpha_1}_{i_1^{(0)}} \ldots C^{(0)\alpha_{\varkappa_0}}_{i_{\varkappa_0}^{(0)}} \qquad (j = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$$

$$\zeta_j^{(1)} = t_j^{(1)} + \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{\varkappa_1} \geqq 2} \varphi^{(1)}_{j,\alpha_1,\ldots\alpha_{\varkappa_1}}(x_{01})\, C^{(1)\alpha_1}_{i_1^{(1)}} \ldots C^{(1)\alpha_{\varkappa_1}}_{i_{\varkappa_1}^{(1)}} \qquad (j = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)}).$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport à

$$C_i^{(0)} \ (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}), \qquad C_i^{(1)} \ (i = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

si r est suffisamment petit, car les solutions

$$y_1^{(0)}, \ldots y_n^{(0)} \quad \text{et} \quad y_1^{(1)}, \ldots y_n^{(1)}$$

satisfont à des inégalités

$$|y_i^{(0)}| < K|x|^N, \qquad |y_i^{(1)}| < K|x|^N \qquad\qquad (i = 1, \ldots n).$$

Les constantes

$$C_i^{(0)} \ (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}), \qquad C_i^{(1)} \ (i = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

étant déterminées de cette manière on aura deux solutions

$$\bar{y}_i^{(0)} \ (i = 1, \ldots n) \quad \text{et} \quad \bar{y}_i^{(1)} \ (i = 1, \ldots n)$$

telles que

$$\bar{y}_i^{(0)} = \bar{y}_i^{(1)} \qquad\qquad (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}, \ i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

pour $x = x_0$, et que $|\bar{y}_i^{(0)}|$, $|\bar{y}_i^{(1)}|$ $(i = 1, \ldots n)$ soient plus petits qu'une expression $K|x|^N$ le long du rayon $0 \ldots x_{01}$. Il résulte du théorème 3 que ces solutions sont identiques, car il n'y a parmi les expressions

$$e^{-s_i x^{-k_i}} \qquad (i \neq i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}, i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(0)}; \ i \leqq m)$$

aucune expression qui tend vers 0 quand x tend vers 0 le long du rayon $0 \ldots x_{01}$. La solution ainsi trouvée satisfait à des inégalités $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$ dans le domaine composé de $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$. C'est la seule solution qui satisfait à ces inégalités, car si $y_1, \ldots y_n$ est une telle solution les constantes

$$C_i^{(0)} \ (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}), \qquad C_i^{(1)} \ (i = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

sont univoquement déterminées par les équations

$$y_i = y_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(0)} z_j^{(0)} \qquad\qquad (i = i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)})$$

$$y_i = y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(1)} z_j^{(1)} \qquad\qquad (i = i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)})$$

où l'on pose $x = x_{01}$.

On peut raisonner d'une manière analogue dans le cas où les deux systèmes de nombres $i_1^{(0)}, \ldots i_{\varkappa_0}^{(0)}$ et $i_1^{(1)}, \ldots i_{\varkappa_1}^{(1)}$ ont des nombres $i_1^{(0,1)}, \ldots i_{\varkappa_{01}}^{(0,1)}$ communs. On aura des solutions dépendant des constantes arbitraires $C_i^{(1)}$ $(i = i_1^{(0,1)}, \ldots i_{\varkappa_{01}}^{(0,1)})$ et satisfaisant à $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$ dans le domaine composé de $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}_1$. Dans ce cas on peut poursuivre les raisonnements en venant au secteur X_2, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les constantes sont déterminées. On aura ainsi une solution et une seule qui satisfait à des inégalités $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$ dans un domaine composé d'un certain nombre de domaines $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \ldots \mathfrak{X}_\nu$. En remplaçant r par un nombre plus petit on peut dire aussi qu'on a une solution et une seule satisfaisant à $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$ pour $|x| < r$ dans un secteur X qui est la réunion des secteurs $X_0, X_1, \ldots X_\nu$. Ce secteur X est univoquement déterminé par le secteur initial X_0 et par la distribution des arguments singuliers et les multiplicités des racines s_i. On pourrait chercher à en déduire des secteurs aussi grands que possible *définis d'une manière simple* de telle manière qu'il correspond à chaque secteur une solution et une seule satisfaisant à des inégalités $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$ dans ce secteur pour $|x| < r$. Mais nous ne pouvons pas y entrer pour le moment.

Soit $\bar{y}_1, \ldots \bar{y}_n$ la solution correspondant au secteur X et soit X' un secteur faisant partie de X et tel que le théorème 4 soit applicable à X'. Il y a alors une substitution

$$y_i = \bar{y}_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x) z_j \qquad (i = 1, \ldots n)$$

qui peut être employée pour tout le secteur X' et qui conduit à un système (57). Pour suivre les solutions $y_1, \ldots y_n$ de (56) dans X' il suffiit maintenant de suivre les solutions $z_1, \ldots z_n$ de ce système (57).

Prenons une solution $z_1, \ldots z_n$ qui ne peut pas être prolongée ainsi dans tout le secteur X'. On sera nécessairement arrêté par une certaine direction singulière. Alors se pose la question de décider si un domaine d'existence de cette solution est limité par une courbe qui s'étend à $x = 0$ dans la dite direction singulière. Pour pouvoir traiter cette question et pour étudier la forme d'une telle courbe on doit avoir recours à des séries qui convergent quand les valeurs absolues de x et des expressions t sont plus petites que certains nombres. Dans le cas où les nombres k_i $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ ont la même valeur on peut obtenir des séries de cette nature, mais on rencontre des difficultés quand les nombres k_i $(i = i_1, \ldots i_\varkappa)$ n'ont pas la même valeur.

Dans le cas où $\Re r_i \geqq 0$ $(i = m + 1, \ldots m + \lambda)$ on peut se demander aussi s'il existe des séries analogues aux séries (48) et contenant en outre des expressions $C_i x^{r_i}$ $(i = m + 1, \ldots m + \lambda)$. Des séries de cette nature sont d'une importance capitale si l'on ne veut pas se limiter, comme nous l'avons fait dans ce qui précède, à étudier des solutions $y_1, \ldots y_n$ qui satisfont à des inégalités $|y_i| < K|x|^N$ $(i = 1, \ldots n)$, mais si l'on veut étudier les solutions $y_1, \ldots y_n$ sous la seule supposition que $|y_1|, \ldots |y_n|$ soient plus petits qu'un certain nombre r'.