

Une condition asymptotique pour le calcul de constantes de Sobolev logarithmiques sur la droite

Laurent Miclo

Centre de Mathématiques et Informatique, 39, rue Frédéric Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France. E-mail : miclo@latp.univ-mrs.fr

Reçu le 20 septembre 2006 ; révisée le 5 septembre 2007 ; accepté le 16 novembre 2007

Résumé. On présente une formule explicite pour la constante de Sobolev logarithmique correspondant à des diffusions réelles ou à des processus entiers de vie et de mort, sous l'hypothèse que certaines quantités, naturellement associées à des inégalités de Hardy dans ce contexte, approchent leur supremum au bord de leur domaine de définition. La preuve se ramène au cas de la constante de Poincaré, à l'aide de comparaisons exactes entre entropie et variances appropriées.

Abstract. An explicit formula for the logarithmic Sobolev constant relative to real diffusions or to birth and death integer-valued processes is presented, under an asymptotical assumption for quantities naturally associated to Hardy's inequalities in this context. Taking into account exact comparisons between entropy and appropriate variances, the proof comes back to Poincaré's inequality situation.

MSC : Premièrement : 46E35 ; secondairement : 37A30 ; 60E15 ; 94A17 ; 49R50

Mots-clés : Inégalités de Sobolev logarithmiques ; Inégalités de Poincaré ; Inégalités de Hardy ; Comparaisons entre entropies et variances ; Diffusions réelles ; Processus entiers de vie et de mort

1. Introduction

Des estimées très précises de constantes optimales associées à des inégalités fonctionnelles sont parfois importantes pour l'obtention de propriétés fines de convergence de processus de Markov. On présente dans ce papier des circonstances dans lesquelles un calcul exact est possible pour la constante de Sobolev logarithmique correspondant à des diffusions réelles. Les données du problème sont une probabilité invariante pour un générateur markovien, lequel sera lui-même commodément fourni sous forme d'une mesure (par le biais de la théorie des formes de Dirichlet dans des cas réguliers). Ce contexte peut sembler très restrictif, il apparaît toutefois fréquemment lors de réductions de problèmes sur des espaces d'état a priori plus compliqués.

Plus précisément, soient μ et ν une probabilité et une mesure (positive) sur \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne \mathcal{R} . On s'intéresse à la meilleure constante $C(\mu, \nu) \in \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\mathbb{L}^2(\mu)$, tout en étant absolument continue de dérivée faible f' , l'inégalité de Sobolev logarithmique suivante soit satisfaite

$$\text{Ent}(f^2, \mu) \leq C(\mu, \nu) \nu[(f')^2]$$

où le membre de gauche désigne l'entropie de f^2 par rapport à μ , qui vaut $\mu[f^2 \ln(f^2)] - \mu[f^2] \ln(\mu[f^2])$, cette quantité étant toujours bien définie à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$.

Dans un article très novateur [2], Bobkov et Götze ont proposé une estimation de $C(\mu, \nu)$ valable à des facteurs universels près et récemment, Barthe et Roberto [1] ont amélioré cette estimée en prouvant que si m est une médiane

de μ ,

$$D_-(\mu, \nu, m, \tilde{\Phi}) \vee D_+(\mu, \nu, m, \tilde{\Phi}) \leq C(\mu, \nu) \leq 4(D_-(\mu, \nu, m, \hat{\Phi}) \vee D_+(\mu, \nu, m, \hat{\Phi}))$$

avec pour toute application $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$D_-(\mu, \nu, m, \phi) := \sup_{x < m} \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([-\infty, x]) \phi\left(\frac{1}{\mu([-\infty, x])}\right)$$

(où par abus de notation, ν désignera aussi la dérivée de Radon–Nikodym de ν par rapport à la mesure de Lebesgue λ) et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \tilde{\Phi}(t) := \ln(1 + t/2), \\ \hat{\Phi}(t) := \ln(1 + e^2 t). \end{cases}$$

Les quantités $D_+(\mu, \nu, m, \phi)$ sont définies de manière symétrique par rapport à m .

Notre objectif ici est de donner, sous certaines conditions, une expression exacte pour $C(\mu, \nu)$ du même type que celles ci-dessus, comme nous l'avons fait précédemment [5] pour la constante de Poincaré. De manière plus détaillée, soient $M_\mu^- \in \mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ et $M_\mu^+ \in \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ l'infimum et le supremum du support de μ . On considère également l'application

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \frac{\sqrt{t} \ln(t)}{\sqrt{t} - 1} \in \mathbb{R}_+$$

(que l'on aura prolongée par continuité en 1 : $\Phi(1) = 2$). Des calculs élémentaires permettent de vérifier que Φ est concave et que l'application $[0, 1] \ni t \mapsto t\Phi(1/t)$ est croissante. Puis on pose, pour tout m appartenant à $]M_\mu^-, M_\mu^+[$ (plus nécessairement une médiane de μ),

$$D(\mu, \nu, m) := D_-(\mu, \nu, m, \Phi) \vee D_+(\mu, \nu, m, \Phi).$$

Notre principal résultat s'énonce alors

Théorème 1. *Supposons, pour un $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$ donné, soit que $\mu(\{M_\mu^-\}) = 0$ et*

$$\lim_{x \rightarrow (M_\mu^-)_+} \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([-\infty, x]) \Phi\left(\frac{1}{\mu([-\infty, x])}\right) = D(\mu, \nu, m)$$

soit que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow (M_\mu^+)_-} \int_m^x \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([x, +\infty]) \Phi(1/\mu([x, +\infty])) = D(\mu, \nu, m)$. Alors on a

$$C(\mu, \nu) = 4D(\mu, \nu, m).$$

Par symétrie du problème, on se ramène désormais à ne considérer que la seconde alternative dans les conditions ci-dessus. Du fait que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$, et par conséquence $\lim_{x \rightarrow M_\mu^+} \mu([x, +\infty]) \Phi(1/\mu([x, +\infty])) = 0$, cette hypothèse équivaut à

$$\lim_{x \rightarrow M_\mu^+} \int_y^x \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([x, +\infty]) \Phi\left(\frac{1}{\mu([x, +\infty])}\right) = D(\mu, \nu, m)$$

pour tout $y \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$ donné, du moins si $D(\mu, \nu, m) < +\infty$. Néanmoins, par définition, la constante $D(\mu, \nu, m)$ continue à dépendre du choix de m , qui peut être crucial comme le montre l'exemple suivant : prenons pour μ la probabilité définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu(dx) := \mathbb{1}_{]-\infty, -1]}(x) \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} + \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

L'ensemble des médianes correspondantes est $[-1, 1]$. Choisissons $\nu \ll \lambda$ symétrique vérifiant $d\nu/d\lambda = 1$ sur $[-1, 1]$ et

$$\forall x < -1, \quad \int_x^0 \frac{1}{\nu} d\lambda \mu(]-\infty, x]) \Phi\left(\frac{1}{\mu([x, +\infty[)}\right) = \frac{1}{2} \Phi(2).$$

Cet ajustement est bien possible car l'application $]0, 1/2[\ni t \mapsto t\Phi(1/t)$ est strictement croissante. Par rapport à la médiane $m = 0$, il apparaît que $D(\mu, \nu, 0) = 1/2\Phi(2)$ et le théorème 1 s'applique pour fournir que $C(\mu, \nu) = 1/2\Phi(2)$. Par contre le choix d'une autre médiane que 0, ou d'un point $m \in \mathbb{R}$ qui n'en soit pas une, conduit à une constante $D(\mu, \nu, m)$ strictement supérieure à $1/2\Phi(2)$ et ainsi les conditions du théorème ne sont pas remplies !

Une autre particularité du théorème 1 est que si $D(\mu, \nu, m)$ n'est "atteint" qu'à la limite, alors on peut perturber localement un peu μ et ν sans changer la constante de Sobolev logarithmique (voir [5] pour une discussion analogue dans le cas de la constante de Poincaré).

Le théorème 1 ne permet pas de retrouver l'exemple le plus célèbre d'inégalité de Sobolev logarithmique (dû à Gross [4]), qui dit que $C(\gamma, \gamma) = 2$, où γ est la distribution gaussienne standard. Pour plus d'informations à ce sujet, on renvoie à une version plus complète de ce papier [6].

Le plan du papier est comme suit : dans la section suivante on reprendra une condition asymptotique obtenue dans [5] pour calculer des constantes de Poincaré dans un contexte symétrique et on donnera quelques renseignements supplémentaires sur certaines fonctions "presque maximisantes," lesquels nous permettront de supprimer l'hypothèse de symétrie. Ces préliminaires permettront dans les sections 3 et 4 de prouver respectivement les bornes $C(\mu, \nu) \leq 4D(\mu, \nu, m)$ et $C(\mu, \nu) \geq 4D(\mu, \nu, m)$ sous les hypothèses du théorème 1. Enfin nous nous intéresserons à un équivalent discret du théorème 1 lors de la dernière section.

2. Inégalités de Poincaré non symétriques

Dans [5], une condition asymptotique a été obtenue pour le calcul exact de la constante de Poincaré dans un contexte symétrique. Nous allons voir comment elle permet de restreindre le domaine fonctionnel sur lequel est pris le supremum définissant cette constante, ce qui illustre le fait que dans ce type de situation, les "points à l'infini" déterminent la constante de Poincaré. Puis on étendra la condition asymptotique de calcul de la constante de Poincaré au cas d'une probabilité μ et d'une mesure ν quelconques sur la droite.

Rappelons que la constante de Poincaré $A(\mu, \nu)$ associée à μ et ν , une probabilité et une mesure comme dans la section précédente, est définie par

$$A(\mu, \nu) := \sup_{f \in \mathcal{C}} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

où \mathcal{C} désigne l'ensemble des fonctions f absolument continues (de dérivée faible notée f') et où la variance d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ est définie à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ par $\text{Var}(f, \mu) := \frac{1}{2} \int (f(y) - f(x))^2 \mu(dx) \mu(dy)$. Nous supposons tout d'abord que μ et ν sont symétriques par rapport à 0. Ainsi on a $M_\mu^- = -M_\mu^+$ et on définit

$$\forall x \geq 0, \quad b_{\mu, \nu}(x) := \int_0^x \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([x, +\infty[),$$

$$B(\mu, \nu) := \sup_{x \geq 0} b_{\mu, \nu}(x).$$

Proposition 2. *Sous l'hypothèse que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ et $B(\mu, \nu) = \lim_{x \rightarrow M_\mu^+} b_{\mu, \nu}(x)$, on a $A(\mu, \nu) = 4B(\mu, \nu)$.*

Ce résultat a été montré dans [5].

L'hypothèse de la proposition 2 semble signifier que les "infinis" $-M_\mu^+$ et M_μ^+ jouent un rôle prépondérant dans la détermination de $A(\mu, \nu)$. Nous allons maintenant justifier cette assertion.

Pour $0 < \eta < 1/2$, notons $M_\mu(\eta) := F_\mu^{-1}(1 - \eta)$ (où F_μ^{-1} est l'inverse généralisé de la fonction de répartition de μ) et introduisons $\mathcal{F}(\eta)$ l'ensemble des fonctions impaires de \mathcal{C} qui sont nulles sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$.

Lemme 3. *Sous les hypothèses de la proposition 2 et si $B(\mu, \nu) < +\infty$, on a pour tout $0 < \eta < 1/2$,*

$$\tilde{A}(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}(\eta)} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}.$$

Démonstration. Pour $0 < \eta < 1/2$ fixé, soit $l \ll \lambda$ la mesure dont la densité vaut $+\infty$ sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$ et 0 ailleurs (i.e. telle que pour tout $R \in \mathcal{R}$, $l(R) = 0$ ou $+\infty$ suivant que $\lambda(R \cap [-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]) = 0$ ou $\lambda(R \cap [-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]) > 0$) et considérons $\tilde{\nu} := \nu + l$. Cette mesure reste symétrique par rapport à 0, on a $b_{\mu, \tilde{\nu}} \leq b_{\mu, \nu}$, et sous les hypothèses de la proposition 2,

$$B(\mu, \tilde{\nu}) = \lim_{x \rightarrow M_\mu^+} b_{\mu, \nu} = B(\mu, \nu).$$

Ceci permet d'appliquer cette proposition, pour obtenir

$$A(\mu, \tilde{\nu}) = 4B(\mu, \tilde{\nu}) = A(\mu, \nu).$$

Cependant pour $f \in \mathcal{C}$, on a $\tilde{\nu}[(f')^2] = +\infty$ dès que f' n'est pas λ -p.p. nul sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$, c'est-à-dire dès que f n'y est pas constante. Il n'est donc pas utile de considérer de telles fonctions dans le supremum définissant $A(\mu, \tilde{\nu})$ et par suite aussi dans celui définissant $A(\mu, \nu)$.

Par ailleurs, remarquons que de manière générale, si μ et ν sont symétriques par rapport à 0, on a

$$A(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{C}_i} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

où \mathcal{C}_i est l'ensemble des fonctions impaires de \mathcal{C} . En effet, décomposons $f \in \mathcal{C}$ en ses parties impaires et paires définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \tilde{f}(x) = (f(x) - f(-x))/2, \\ \hat{f}(x) = (f(x) + f(-x))/2. \end{cases}$$

Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mu)$, on calcule que $\text{Cov}(\tilde{f}, \hat{f}) = \mu[\tilde{f}\hat{f}] = 0$, du fait que $\tilde{f}\hat{f}$ est impaire et que μ est symétrique. Il apparaît ainsi que $\text{Var}(f) = \text{Var}(\tilde{f}) + \text{Var}(\hat{f})$. De même, on obtient que $\nu[\tilde{f}'\hat{f}'] = 0$, d'où $\nu[(f')^2] = \nu[(\tilde{f}')^2] + \nu[(\hat{f}')^2]$. Il en découle que

$$A(\mu, \nu) \leq \max\left(\sup_{f \in \mathcal{C}_i} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}, \sup_{f \in \mathcal{C}_p} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}\right)$$

où \mathcal{C}_p désigne l'ensemble des fonctions de \mathcal{C} qui sont paires.

Remarquons qu'en désignant par $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur \mathbb{R}_+ et en posant $\mu_+ := (\mu(\{0\})/2)\delta_0 + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \cdot \mu$ et $\nu_+ := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \cdot \nu$ (si g est une fonction positive, on note $g \cdot \mu$ la mesure admettant g pour densité par rapport à μ), on a par symétrie,

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \mathcal{C}_i} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} &= \sup_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)} \frac{\mu_+[f^2]}{\nu_+[(f')^2]}, \\ \sup_{f \in \mathcal{C}_p} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} &= \sup_{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)} \frac{\mu_+[(f - 2\mu_+[f])^2]}{\nu_+[(f')^2]}. \end{aligned}$$

Or pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, on constate que

$$\begin{aligned} \mu_+[(f - 2\mu_+[f])^2] &= \mu_+[f^2] - 4(\mu_+[f])^2 + 4(\mu_+[f])^2 \mu_+(\mathbb{1}) \\ &= \mu_+[f^2] - 2(\mu_+[f])^2 \\ &\leq \mu_+[f^2] \end{aligned}$$

d'où en fin de compte

$$A(\mu, \nu) \leq \sup_{f \in \mathcal{C}_i} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]} \leq A(\mu, \nu).$$

L'égalité de ces termes combinée à la première partie de la preuve permet de se convaincre qu'il suffit de considérer dans le supremum de définition de $A(\mu, \nu)$ des fonctions impaires qui s'annulent sur $[-M_\mu(\eta), M_\mu(\eta)]$. \square

Posons pour tout $0 < \eta < 1/2$, $\mathcal{F}_+(\eta)$ l'ensemble des fonctions de \mathcal{C} qui s'annulent sur $]-\infty, M_\mu(\eta)[$. En considérant les restrictions des fonctions à \mathbb{R}_+ , la preuve précédente montre que

$$A(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} = \sup_{f \in \mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}.$$

Evidemment on dispose d'un résultat symétrique en $-M_\mu^+$.

En particulier, toujours sous les conditions du lemme précédent, on a

$$A(\mu, \nu) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{f \in \mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\text{Var}(f, \mu)}{\nu[(f')^2]}$$

et il suffit donc de se placer au voisinage de M_μ^+ pour calculer $A(\mu, \nu)$. Cette propriété jouera un rôle important dans la suite du papier.

Revenons maintenant au cas où μ et ν sont une probabilité et une mesure quelconques sur \mathbb{R} . Pour $m \in \mathbb{R}$ donné, on s'intéresse aux fonctions $b_{\mu, \nu, m}^-$ et $b_{\mu, \nu, m}^+$ définies respectivement sur $]M_\mu^-, m]$ et $[m, M_\mu^+]$ par

$$\begin{aligned} \forall M_\mu^- < x \leq m, \quad b_{\mu, \nu, m}^-(x) &:= \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \mu(]-\infty, x]), \\ \forall m \leq x < M_\mu^+, \quad b_{\mu, \nu, m}^+(x) &:= \int_m^x \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([x, +\infty[) \end{aligned}$$

qui nous conduisent à la quantité

$$B(\mu, \nu, m) := \max \left(\sup_{M_\mu^- < x \leq m} b_{\mu, \nu, m}^-(x), \sup_{m \leq x < M_\mu^+} b_{\mu, \nu, m}^+(x) \right).$$

Le résultat suivant est bien connu et dû à Bobkov et Götze [2], qui n'avaient considéré que le cas où m est une médiane, mais leur preuve s'étend immédiatement au cas général.

Théorème 4. *Quelque soit le choix de $m \in \mathbb{R}$, on a $A(\mu, \nu) \leq 4B(\mu, \nu, m)$.*

Voici un critère d'égalité :

Proposition 5. *Supposons, soit que $\mu(\{M_\mu^-\}) = 0$ et $B(\mu, \nu, m) = \lim_{x \rightarrow M_\mu^-} b_{\mu, \nu, m}^-(x)$, soit que $\mu(\{M_\mu^+\}) = 0$ et $B(\mu, \nu, m) = \lim_{x \rightarrow M_\mu^+} b_{\mu, \nu, m}^+(x)$. La borne du théorème précédent est alors atteinte :*

$$A(\mu, \nu) = 4B(\mu, \nu, m).$$

Démonstration. Par symétrie, il suffit de traiter le cas de la deuxième hypothèse. Soit S la symétrie par rapport à m et considérons $\tilde{\mu}_+ := \frac{\mu_+ + S(\mu_+)}{2\mu_+([m, +\infty[)}$, avec $\mu_+ := (\mu(\{m\})/2)\delta_m + \mathbb{1}_{]m, +\infty[} \cdot \mu$. Soit également $\tilde{\nu}_+ := \nu_+ + S(\nu_+)$, avec $\nu_+ := \mathbb{1}_{]m, +\infty[} \cdot \nu$. L'hypothèse de la proposition implique que

$$B(\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+, m) = \lim_{x \rightarrow M_{\tilde{\mu}_+}^+} b_{\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+, m}(x) = \frac{1}{2\mu([m, +\infty[)} \lim_{x \rightarrow M_\mu^+} b_{\mu, \nu, m}(x) = \frac{B(\mu, \nu, m)}{2\mu([m, +\infty[)}$$

ainsi d'après le début de cette section, on a

$$A(\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+) = 4B(\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+, m) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sup_{f \in \mathcal{F}_+(\eta)} \frac{\tilde{\mu}_+[f^2]}{\tilde{\nu}_+[(f')^2]}$$

où $\mathcal{F}_+(\eta)$ est l'ensemble des fonctions qui s'annulent sur $]-\infty, M_\mu^+(\eta)[$, pour $0 < \eta < 1/2$, avec $M_\mu^+(\eta) := \inf\{x \in \mathbb{R} : \mu(]-\infty, x]) > 1 - \eta\}$.

Remarquons que pour $0 < \eta < 1/2$ et $f \in \mathcal{F}_+(\eta)$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $(\mu[f])^2 \leq \mu[\{f \neq 0\}]\mu[f^2] \leq \eta\mu[f^2]$, d'où $\text{Var}(f, \mu) \geq (1 - \eta)\mu[f^2]$. Cependant, pour $0 < \eta < \mu([m, +\infty[)$ et $f \in \mathcal{F}_+(\eta)$, on a $\mu[f^2] = \mu_+[f^2] = 2\mu([m, +\infty[)\tilde{\mu}_+[f^2]$ et on dispose aussi de $\nu[(f')^2] = \tilde{\nu}_+[(f')^2]$. Ainsi en prenant le supremum sur de telles fonctions et en passant à la limite quand η tend vers 0_+ , on se convainc que

$$\begin{aligned} A(\mu, \nu) &\geq 2\mu([m, +\infty[)A(\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+) \\ &= 8\mu([m, +\infty[)B(\tilde{\mu}_+, \tilde{\nu}_+, m) \\ &= 4B(\mu, \nu, m). \end{aligned}$$

Le théorème 4 nous permet ensuite de conclure à l'égalité escomptée. \square

3. Majoration de la constante de Sobolev logarithmique

Nous présentons ici une majoration valable sans hypothèse (de type asymptotique), comparable au théorème 4 pour la constante de Poincaré. En reprenant les notations de l'introduction, notre objectif est donc de démontrer la

Proposition 6. *Pour toute probabilité μ , toute mesure ν et tout $m \in]M_\mu^-, M_\mu^+[$, on a*

$$C(\mu, \nu) \leq 4D(\mu, \nu, m).$$

On cherche d'abord à réduire le domaine sur lequel est pris le supremum dans la définition de $C(\mu, \nu)$. Quitte à écrêter les fonctions par des valeurs de plus en plus grandes, on peut les prendre bornées, car l'entropie et l'énergie s'approchent bien sous cette procédure. Puis par homogénéité, il est possible d'imposer que $\mu[f^2] = 1$. On va introduire une condition supplémentaire obtenue par optimisation d'une constante additive.

Lemme 7. *Soit \mathcal{B} l'ensemble des fonctions bornées de \mathcal{C} qui vérifient $\mu[f^2] = 1$ et $\mu[f \ln(f^2)] = 0$. On a alors*

$$C(\mu, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{B}} \frac{\text{Ent}(f^2, \mu)}{\nu[(f')^2]}.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}$ bornée et satisfaisant $\nu[(f')^2] < +\infty$, on définit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) := \text{Ent}((f+t)^2, \mu).$$

Il est bien connu que $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} F(t) = 2 \text{Var}(f, \mu)$ et on vérifie que l'application F est dérivable partout. De plus, on calcule que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = 2\mu \left[(f+t) \ln \left(\frac{(f+t)^2}{\mu[(f+t)^2]} \right) \right].$$

En effectuant un développement limité pour $|t|$ grand, on obtient que

$$F'(t) = -\frac{1}{3t^2} \mu[(f - \mu[f])^3] + o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Ainsi si $\mu[(f - \mu[f])^3] \neq 0$, par exemple si $\mu[(f - \mu[f])^3] > 0$, alors en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) $F(t)$ tend vers $2 \text{Var}(f, \mu)$ par valeurs strictement supérieures (resp. inférieures). Par dérivabilité de F , ceci implique qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $F(T) = \max_{\mathbb{R}} F$ et $F'(T) = 0$. On en déduit notamment que

$$\frac{\text{Ent}(f^2, \mu)}{v[(f')^2]} \leq \frac{\text{Ent}((f+T)^2, \mu)}{v[(f+T)']^2},$$

$$\mu \left[(f+T) \ln \left(\frac{(f+T)^2}{\mu[(f+T)']^2} \right) \right] = 0.$$

Par ailleurs, si $\mu[(f - \mu[f])^3] = 0$ et du moins si μ n'est pas une masse de Dirac (dans ce dernier cas l'égalité du lemme ci-dessus est triviale), on vérifie sans difficulté, par un calcul variationnel autour de f pour la fonctionnelle $g \mapsto \mu[(g - \mu[g])^3]$, qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathcal{C} qui approchent f au sens où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} + \sqrt{v[(f' - f_n')^2]} = 0$$

et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu[(f - \mu[f])^3] \neq 0$. On se ramène ainsi à la situation précédente, ce qui permet d'obtenir que

$$C(\mu, v) = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{B}}} \frac{\text{Ent}(f^2, \mu)}{v[(f')^2]}$$

avec $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des fonctions bornées de \mathcal{C} qui vérifient $\mu[f \ln(f^2/\mu[f^2])] = 0$. Le résultat annoncé en découle par homogénéité. \square

Nous disposons désormais de tous les ingrédients nécessaires à la

Démonstration de la proposition 6. Soit $f \in \mathcal{B}$, on pose $g = \Phi(f^2)$ qui est une fonction à valeurs positives. Elle ne peut être nulle μ -p.s. que si f l'est aussi, ce qui est impossible puisque $\mu[f^2] = 1$. On peut donc considérer la probabilité μ_g définie par $\mu_g = (\mu[g])^{-1} g \cdot \mu$. L'étape principale de la démonstration consiste à observer que

$$\text{Ent}(f^2, \mu) = \mu[g] \text{Var}(f, \mu_g).$$

En effet, en intégrant l'égalité

$$g(f-1) = f \ln(f^2) \tag{1}$$

il apparaît que $\mu[g](\mu_g[f] - 1) = 0$ d'où $\mu_g[f] = 1$. En multipliant alors l'équation (1) par f puis en intégrant par rapport à μ , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Ent}(f^2, \mu) &= \mu[g] \mu_g[f(f-1)] \\ &= \mu[g] \mu_g[(f-1)^2] \\ &= \mu[g] \text{Var}(f, \mu_g). \end{aligned}$$

Cependant d'après le théorème 4, on a pour tout $m \in]M_{\mu_g}^-, M_{\mu_g}^+[$,

$$\text{Var}(f, \mu_g) \leq 4B(\mu_g, v, m)v[(f')^2].$$

Or par définition de $B_+(\mu_g, v, m)$, il apparaît que

$$\mu[g]B_+(\mu_g, v, m) = \sup_{m \leq x < M_{\mu_g}^+} \int_m^x \frac{1}{v} d\lambda \mu[g]\mu_g([x, +\infty[) = \sup_{m \leq x < M_{\mu_g}^+} \int_m^x \frac{1}{v} d\lambda \mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x, +\infty[}].$$

Ceci amène à s'intéresser à $\mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x,+\infty[}]$, par exemple pour $x < M_\mu^+$ donné. On utilise alors l'inégalité de Jensen pour les fonctions concaves pour obtenir

$$\frac{\mu[\Phi(f^2)\mathbb{1}_{[x,+\infty[}]}{\mu([x,+\infty[})} \leq \Phi\left(\frac{\mu[f^2\mathbb{1}_{[x,+\infty[}]}{\mu([x,+\infty[})}\right) \leq \Phi\left(\frac{1}{\mu([x,+\infty[})}\right)$$

où l'on a tenu compte de l'inégalité $\mu[f^2\mathbb{1}_{[x,+\infty[}] \leq \mu[f^2] = 1$ et de la croissance de Φ qui s'obtient facilement. Par conséquence, on a montré que $\mu[g]B_+(\mu_g, \nu, m) \leq D_+(\mu, \nu, m)$, et comme on dispose d'une inégalité analogue à gauche de m , il en découle que $\mu[g]B(\mu_g, \nu, m) \leq D(\mu, \nu, m)$, puis que $\text{Ent}(f^2, \mu) \leq 4D(\mu, \nu, m)\nu[(f')^2]$. Le résultat voulu s'en suit. \square

4. Minoration de la constante de Sobolev logarithmique

Nous allons maintenant vérifier que sous la condition asymptotique donnée dans le théorème 1 (que l'on supposera remplie en M_μ^+), la borne obtenue dans la section précédente est atteinte, ce qui terminera la preuve de ce théorème 1.

A nouveau l'argument sous-jacent va consister à se ramener au cas de la constante de Poincaré. Supposons μ, ν et m fixés comme dans l'énoncé du théorème 1. On construit une nouvelle probabilité $\tilde{\mu}$ de la manière suivante. On commence par poser

$$\forall x \geq m, \quad \tilde{\mu}([x, +\infty[) := \left(\mu([x, +\infty[) \Phi\left(\frac{1}{\mu([x, +\infty[)}\right) \right) \wedge 1$$

ce qui définit bien une mesure sur les boréliens de $[m, +\infty[$, car l'application

$$\Psi :]0, 1] \ni u \mapsto u \Phi\left(\frac{1}{u}\right) \tag{2}$$

est strictement croissante et continue. On prolonge par continuité cette fonction en 0 en posant $\Psi(0) = 0$. Pour compléter la sous-probabilité obtenue sur $([m, +\infty[, \mathcal{R} \cap [m, +\infty[)$ en une probabilité $\tilde{\mu}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$, soit $a = (1 - \tilde{\mu}([m, +\infty[))/\mu(]-\infty, m[)$ et imposons que $\tilde{\mu}$ soit égal à $a\mu$ sur $]-\infty, m[$. On remarque déjà que $M_{\tilde{\mu}}^+ = M_\mu^+$. L'intérêt principal de $\tilde{\mu}$ provient du

Lemme 8. *Sous l'hypothèse du théorème 1 en M_μ^+ , on est assuré de*

$$A(\tilde{\mu}, \nu) = 4B(\tilde{\mu}, \nu, m) = 4D(\mu, \nu, m).$$

Démonstration. De par la croissance de Φ , on a $\Psi(u) \geq \Phi(1)u = 2u$. Il en découle notamment que $a \leq 1$ puis que

$$\begin{aligned} B_-(\tilde{\mu}, \nu, m) &:= \sup_{x < m} \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \tilde{\mu}([-\infty, x]) \\ &\leq \sup_{x < m} \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([-\infty, x]) \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x < m} \int_x^m \frac{1}{\nu} d\lambda \mu([-\infty, x]) \Phi\left(\frac{1}{\mu([-\infty, x])}\right) \\ &= \frac{1}{2} D_-(\mu, \nu, m). \end{aligned}$$

De manière plus immédiate encore, on a

$$B_+(\tilde{\mu}, \nu, m) := \sup_{x > m} \int_m^x \frac{1}{\nu} d\lambda \tilde{\mu}([x, +\infty[) \leq D_+(\mu, \nu, m)$$

et du fait que par hypothèse le suprémum est approché pour x tendant vers $(M_\mu^+)_-$, on est assuré de l'égalité $B_+(\tilde{\mu}, v, m) = D_+(\mu, v, m)$. Puisque l'on a aussi $D(\mu, v, m) = D_+(\mu, v, m) \geq D_-(\mu, v, m)$, on en déduit que $B(\tilde{\mu}, v, m) = B_-(\tilde{\mu}, v, m) \vee B_+(\tilde{\mu}, v, m) = D(\mu, v, m)$. De plus le suprémum apparaissant dans $B(\tilde{\mu}, v, m)$ est notamment approché en $M_{\tilde{\mu}}^+$, ce qui nous place dans le contexte de la proposition 5, pour obtenir que $A(\tilde{\mu}, v) = 4B(\tilde{\mu}, v, m)$. \square

Pour prouver le théorème 1, il reste à se convaincre que

$$A(\tilde{\mu}, v) \leq C(\mu, v). \quad (3)$$

Pour ceci nous aurons besoin du résultat technique suivant pour lequel on commence par remarquer que $\tilde{\mu}$ est absolument continu par rapport à μ . En effet, ceci provient de la formule de changement de variable dans l'intégrale de Stieltjes (voir par exemple la formule (92.1) de l'ouvrage [3] de Dellacherie et Meyer) et la densité $\varphi := d\tilde{\mu}/d\mu$ est donnée explicitement par

$$\forall x \in]M_\mu^-, M_\mu^+[, \quad \varphi(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x < m, \\ \Psi'(\mu([x, +\infty[)), & \text{si } x \in [m, M_\mu^+ \setminus \mathcal{D}), \\ \frac{\Psi(\mu([x, +\infty[)) - \Psi(\mu(\{x\}))}{\mu(\{x\})}, & \text{si } x \in \mathcal{D}, \end{cases}$$

où $\mathcal{D} := \{x \in [m, M_\mu^+ : \mu(\{x\}) > 0\}$ est le lieu des masses de Dirac incluses dans μ restreint à $[m, M_\mu^+]$. On dispose alors de l'estimée suivante.

Lemme 9. *Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on a $\int \exp((1 - \varepsilon)\varphi) d\mu < +\infty$.*

Démonstration. On peut évidemment se contenter de considérer l'intégrale ci-dessus sur $[m, +\infty[$ et le résultat annoncé découlera de l'existence d'une constante universelle $0 < c < +\infty$ telle que pour tout $x > m$,

$$\int_{[m, x[} \exp((1 - \varepsilon)\varphi) d\mu \leq \frac{\exp(c(1 - \varepsilon))}{\varepsilon} (\mu^\varepsilon([m, +\infty[) - \mu^\varepsilon([x, +\infty[)).$$

Par la formule de changement de variable dans l'intégrale de Stieltjes, il suffit pour cela de se convaincre que

$$\begin{aligned} \forall 0 < u < 1, \quad \exp((1 - \varepsilon)\Psi'(u)) &\leq \exp(c(1 - \varepsilon))u^{\varepsilon-1}, \\ \forall 0 < u < v < 1, \quad (v - u) \exp\left((1 - \varepsilon) \frac{\Psi(v) - \Psi(u)}{v - u}\right) &\leq \frac{\exp(c(1 - \varepsilon))}{\varepsilon} (v^\varepsilon - u^\varepsilon). \end{aligned}$$

En effet, la première (respectivement la seconde) inégalité permet de dominer la partie diffuse (respectivement à saut) de la mesure $\exp((1 - \varepsilon)\varphi) d\mu$ par celle de $-\exp(c(1 - \varepsilon)) d\mu^\varepsilon([x, +\infty[)$. On remarque qu'il suffirait de prouver la seconde inégalité, la première s'en suivant en considérant " u et v infiniment proches." Pourtant commençons par nous intéresser à la première, car elle sera utile pour la seconde. Elle revient à trouver une constante c finie telle que pour tout $0 < u < 1$, $\Psi'(u) \leq \ln(1/u) + c$. On calcule que

$$\forall 0 < u < 1, \quad \Psi'(u) = \ln\left(\frac{1}{u}\right) + R(u)$$

avec $\forall 0 < u < 1$, $R(u) := \frac{\sqrt{u}}{2(1-\sqrt{u})^2} \ln(\frac{1}{u}) - \frac{1}{1-\sqrt{u}}$. On a clairement $\lim_{u \rightarrow 0^+} R(u) = 0$ et un développement d'ordre 2 en 1_- montre que $\lim_{u \rightarrow 1^-} R(u) = 1/2$. Par continuité de R sur $]0, 1[$, on en conclut à la finitude de $c := \sup_{0 < u < 1} R(u)$. Traitons maintenant la seconde borne ci-dessus, en écrivant que pour tous $0 < u < v < 1$,

$$\begin{aligned} \exp\left((1 - \varepsilon) \frac{\Psi(v) - \Psi(u)}{v - u}\right) &= \exp\left(\frac{(1 - \varepsilon)}{v - u} \int_u^v \Psi'(s) ds\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{(1 - \varepsilon)}{v - u} \int_u^v c - \ln(s) ds\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp((1 - \varepsilon)c) \exp\left(\frac{1}{v - u} \int_u^v \ln(s^{\varepsilon-1}) \, ds\right) \\
 &\leq \exp((1 - \varepsilon)c) \frac{1}{v - u} \int_u^v s^{\varepsilon-1} \, ds \\
 &= \frac{\exp((1 - \varepsilon)c)}{\varepsilon} (v^\varepsilon - u^\varepsilon)
 \end{aligned}$$

où l'on a tenu compte de l'inégalité précédente et de celle de Jensen pour l'application exponentielle. \square

La preuve de l'inégalité (3) sous l'hypothèse du théorème 1 en M_μ^+ est maintenant assez simple.

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et toute fonction f mesurable et bornée sur \mathbb{R} , on écrit que

$$(1 - \varepsilon) \operatorname{Var}(f, \tilde{\mu}) \leq (1 - \varepsilon) \mu[\varphi f^2] \leq \operatorname{Ent}(f^2, \mu) + K_\varepsilon \mu[f^2]$$

avec $K_\varepsilon := \ln(\int \exp((1 - \varepsilon)\varphi) \, d\mu) < +\infty$. Pour $m \leq y < M_\mu^+$, notons $\mathcal{F}(y)$ l'ensemble des fonctions bornées de \mathcal{C} qui sont nulles sur $]-\infty, y]$, d'après les preuves de la proposition 5 et du lemme 8, on sait que

$$A(\tilde{\mu}, \nu) = \sup_{f \in \mathcal{F}(y)} \frac{\operatorname{Var}(f, \tilde{\mu})}{\nu[(f')^2]}.$$

Ainsi il apparaît que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et tout $m \leq y < M_\mu^+$,

$$(1 - \varepsilon)A(\tilde{\mu}, \nu) \leq C(\mu, \nu) + K_\varepsilon \sup_{f \in \mathcal{F}(y)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]}. \quad (4)$$

Cependant les inégalités de Hardy présentées par Muckenhoupt [7] montrent que

$$\sup_{f \in \mathcal{F}(y)} \frac{\mu[f^2]}{\nu[(f')^2]} \leq 4 \sup_{y < x < M_\mu^+} \int_y^x \frac{1}{\nu} \, d\lambda \mu([x, M_\mu^+])$$

expression qui tend vers 0 quand y s'approche de M_μ^+ par valeurs inférieures, du moins sous l'hypothèse que $D(\mu, \nu, m) < +\infty$. Mais si $D(\mu, \nu, m) = +\infty$, (3) est une égalité qui découle directement du lemme 8, d'ailleurs dans cette situation le théorème 1 est valable sans condition de type asymptotique, comme on peut le voir à partir des estimées de Bobkov et Götze [2] ou de Barthe et Roberto [1] rappelées dans l'introduction. Pour la fin de cette section, plaçons-nous donc de plus sous la condition que $D(\mu, \nu, m) < +\infty$, qui implique, en passant à la limite dans (4) quand y tend vers $(M_\mu^+)_-$, que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ on est assuré de $(1 - \varepsilon)A(\tilde{\mu}, \nu) \leq C(\mu, \nu)$. Le résultat annoncé s'obtient ensuite en faisant tendre ε vers 0_+ .

5. Situation discrète

Elle correspond aux processus de vie et de mort sur \mathbb{Z} . On se donne une probabilité $\tilde{\mu}$ sur \mathbb{Z} et une mesure $\tilde{\nu}$ sur l'ensemble de ses arêtes (non orientées) aux plus proches voisins. Si f est une fonction définie sur \mathbb{Z} , sa "dérivée" f' est construite sur l'ensemble de ses arêtes par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f'(\{n, n + 1\}) := f(n + 1) - f(n).$$

Avec ces notations, on cherche à estimer

$$\tilde{C}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = \sup_{f \in \mathbb{L}^2(\tilde{\mu})} \frac{\operatorname{Ent}(f^2, \tilde{\mu})}{\tilde{\nu}[(f')^2]}.$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ donné, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}, \quad \begin{cases} d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^-(n) := \sum_{n \leq p < m} \frac{1}{\tilde{\nu}([p, p+1])} \sum_{q \leq n} \tilde{\mu}(q) \Phi\left(\frac{1}{\sum_{q \leq n} \tilde{\mu}(q)}\right), & \text{si } n < m, \\ d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^+(n) := \sum_{m \leq p < n} \frac{1}{\tilde{\nu}([p, p+1])} \sum_{q \geq n} \tilde{\mu}(q) \Phi\left(\frac{1}{\sum_{q \geq n} \tilde{\mu}(q)}\right), & \text{si } n > m, \end{cases}$$

puis $\tilde{D}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m) := \max(\sup_{n < m} d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^-(n), \sup_{n > m} d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^+(n))$. On dispose alors de l'analogue discret du théorème 1.

Proposition 10. *Supposons, pour un $m \in \mathbb{Z}$ donné, soit que le support de $\tilde{\mu}$ n'est pas borné inférieurement et que $\tilde{D}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m) = \lim_{n \rightarrow -\infty} d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^-(n)$ soit que le support de $\tilde{\mu}$ n'est pas borné supérieurement et que $\tilde{D}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m}^+(n)$ on a alors $\tilde{C}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = 4\tilde{D}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m)$.*

Ce résultat se déduit en fait directement du théorème 1, en considérant $\mu := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\mu}(n) \delta_n$ et $\nu := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\nu}(\{n, n+1\}) \lambda_{]n, n+1[}$, où $\lambda_{]n, n+1[}$ est la restriction de la mesure de Lebesgue à $]n, n+1[$. En effet, on vérifie sans difficulté que $\tilde{C}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = C(\mu, \nu)$ et que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\tilde{D}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, m) = D(\mu, \nu, m)$.

Bibliographie

- [1] F. Barthe et C. Roberto. Sobolev inequalities for probability measures on the real line. *Studia Math.* **159** (2003) 481–497. [MR2052235](#)
- [2] S. G. Bobkov et F. Götze. Exponential integrability and transportation cost related to logarithmic Sobolev inequalities. *J. Funct. Anal.* **163** (1999) 1–28. [MR1682772](#)
- [3] C. Dellacherie et P.-A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*. Hermann, Paris, revised edition. Théorie des martingales, 1980. [Martingale theory.] [MR0566768](#)
- [4] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. Math.* **97** (1975) 1061–1083. [MR0420249](#)
- [5] L. Miclo. Quand est-ce que des bornes de Hardy permettent de calculer une constante de Poincaré exacte sur la droite ? Préprint, consultable sur <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00017875>, 2005.
- [6] L. Miclo. Une condition asymptotique pour le calcul de constantes de Sobolev logarithmiques sur la droite. Préprint de la première version, consultable sur <http://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00097577>, 2006.
- [7] B. Muckenhoupt. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.* **44** (1972) 31–38. [MR0311856](#)