ÜBER EINE VEREINIGUNG DER SÄTZE VON H. HOPF UND N. BRUSCHLINSKY

HIDEKAZU WADA

(Received January 20, 1952)

1. Sei Y_n ($n \geqq 2$) ein zusammenhängender topologischer Raum, sei $y_0 \in Y_n$ der Basispunkt der Homotopiegruppen von Y_n, sei $\pi_1(Y_n)$ Abelsch, und sei die abgeschlossense Hülle Δ der Menge der geschlosseneWege, welche die Erzeugenden von $\pi_1(Y_n)$ representieren, ein 1-dimensionaler Komplex (nicht immer lokal endlich). Dabei, setzen wir es voraus, dass Δ so gewählt werden kann, dass die natürliche Korrespondenz

$$\pi_1(\Delta) \to \pi_1(Y_n) \tag{1}$$

ein Isomorphismus ist, und dass Y_n n-einfach relativ zu Δ [1] ist. Ferner für $n > 2$ setzen wir überdies es voraus, dass

$$\pi_k(Y_n) \approx 0 \qquad (2 \leqq k < n).$$

Dann gewinnen wir leicht die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \pi_k(Y_n,\ \Delta) &\approx \pi_n(Y_n) \qquad &(2 \leqq k = n) \\ &\approx 0 \qquad &(2 \leqq k < n) \end{aligned}$$

2. Sei B ($\subset \Delta$) ein Baum, welcher alle Eckpunkte von Δ enthält. Sei e eine 1-dimensionale Zelle von $\Delta - B$. Dann ist der geschlossene Weg, welcher auf B von y_0 nach dem ersten Eckpunkte von e geht, und nach dem zweiten auf e geht, und demnach zu y_0 auf B kehrt, das Erzeugende von $\pi_1(\Delta)$ [4, II]. Weil (1) ein Isomorphismus ist, und $\pi_1(Y_n)$ Abelsch ist, müssen die Zahlen der Erzeugenden der freien Gruppe $\pi_1(\Delta)$ eins oder null. Im ersten Falle, enthält $\Delta - B$ nur eine einzige 1-dimensionale Zelle, und $\pi_1(Y_n)$ ist isomorph zu der zyklischen Gruppe unendlicher Ordnung. Im zweiten Falle, $\Delta = B$ entsteht, und Y_n muss einfach zusammenhängend sein.

3. Nun sei K ein n-dimensionaler, lokal-endlicher, und simplizialer Komplex; und sei L sein Unterkomplex. Dann für jede Abbildung

$$\varphi \in Y_n^K(L,\ y_0) \qquad (\text{d. h. } \varphi(K) \subset Y_n, \varphi(L) = y_0)$$

gibt es eine *normierte Abbildung* φ' folgendermassen:

$$\varphi' \simeq \varphi \text{ rel. } L, \ (\text{d. h. homotop relativ zu } L)$$

$$\varphi' \in Y_n^K(K^{n-1} \cup L, \Delta),\ \ \varphi'(K^0) = y_0,$$

wo wir mit K^k das k-dimensionale Gerüst von K bezeichnet haben. Nun, für jede 1- und n-dimensionalen Simplexe T^1 und T^n von K, und für die normierte Abbildung $\varphi \in Y_n^K(L,\ y_0)$, bezeichnen wir mit $C_\varphi^1(T^1)$ und $C_\varphi^n(T^n)$ die Elemente von $\pi_1(Y_n)$ und $\pi_n(Y_n, \Delta)$ welche durch $\varphi(T^1)$ und $\varphi(T^n)$ dargestellt werden. Dann, können wir es leicht einsehen, dass C_φ^1 und C_φ^n die Cozyklen mit der Koeffizientenbereiche $\pi_1(Y_n)$ und $\pi_n(Y_n, \Delta)$ sind. Unter dieser Beschaffenheit, induziert die Korrespondenz

$$(2) \qquad \varphi \to (C^1_\varphi,\ C^n_\varphi)$$

eine umkehrbare eindeutige Zuordnung

$$(3) \qquad \mathfrak{G}_n(K,\ L) \to \mathfrak{H}^1(K-L,\ \pi_1(Y_n)) \oplus \mathfrak{H}^n(K-L,\ \pi_n(Y_n,\ \Delta))$$

wobei die linke Seite die Menge der Abbildungsklassen relativ zu L von Y^K_n $(L,\ y_0)$ ist, und die rechte Seite die direkte Summe der 1- und n-dimensionalen Cohomologiegruppen von $K-L$ mit der Koeffizientenbereiche $\pi_1(Y_n)$ und $\pi_n(Y_n,\ \Delta)$ ist.

4. Jetzt, wollen wir alle Eckpunkte von K ordnen: $(a_1,\ a_2,\ \cdots)$, und sei $(x_1, x_2,\ \cdots)$ ihre baryzentrischen Koordinaten. Wenn ein Punkt $x \in K$ auf einem k-dimensionalen Simplexe T^k mit der Eckpunkte $a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ $(i_0 < \cdots < i_k)$ liegt, und wenn x_{i_λ} die i_λ-ten Koordinaten von x ist, bezeichnen wir einfachheitshalber als

$$(x) = (x_{i_0|i_0},\ \cdots,\ x_{i_k|i_k}),$$

wo die zweiten Indizes die Nummern der Koordinatenaxen darstellen.

Nun, sei D^k_1 und D^k_2 die Untermenge von $T^k = T^k\ (a_{i_0}, \cdots, a_{i_k})$, $(i_0 < \cdots < i_k)$, welche mit der folgenden Ungleichungen dargestellt werden:

$$x_{i_0} \geqq \sum_{\lambda=1}^{k} x_{i_\lambda}, \qquad \sum_{\lambda=0}^{k-1} x_{i_\lambda} \leqq x_{i_k}.$$

Ferner sei D die Summe von D^k_1 und D^k_2 für alle Simplexe T^k von K.

Nun, sei $\varphi,\ \psi \in Y^K_n(L,\ y_0)$ zwei normierte Abbildungen. Dann können wir eine Abbildung $\varphi \times \psi \in Y^{DUL}_n(L, y_0)$ folgendermassen konstruieren:

$$\begin{aligned} \varphi \times \psi(x) &= \varphi\left(\left(x_{i_0} - \sum_{\lambda=1}^{k} x_{i_\lambda}\right)_{|i_0},\ 2x_{i_1|i_1},\ \cdots, 2x_{i_k|i_k}\right) \quad \text{für } x \in D^k_1 \\ &= \psi\left(2x_{i_0|i_0}, \cdots, 2x_{i_{k-1}|i_{k-1}},\ \left(x_{i_k} - \sum_{\lambda=0}^{k-1} x_{i_\lambda}\right)_{|i_k}\right) \text{für } x \in D^k_2 \\ &= y_0 \text{ für } x \in L. \end{aligned}$$

Dann, können wir es leicht einsehen, dass $\varphi \times \psi$ von $\overline{K-D}$ auf Δ erweitert wird. Solche erweiterte Abbidung $\varphi \times \psi$ also ist das Element von $Y^K_n(L,\ y_0)$, und ist bereits normiert.

5. Wir können beweisen, dass die Verknüpfung $\varphi \times \psi$ die Gruppenoperation von $\mathfrak{G}_n(K,\ L)$ induziert. Denn nach der Konstruktion ist es klar dass die folgenden Relationen gelten:

$$C^1_{\varphi\times\psi} = C^1_\varphi + C^1_\psi,\quad C^n_{\varphi\times\psi} = C^n_\varphi + C^n_\psi.$$

Folglich, mittels der Korrespondenz (2) können wir es gleichzeitig beweisen dass $\mathfrak{G}_n(K,\ L)$ eine Abelsche Gruppe ist, und dass (3) ein Isomorphismus ist.

SATZ 1. *Die Korrespondenz* (2) *induziert einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{G}_n(K,\ L) \approx \mathfrak{H}^1(K-L,\ \pi_1(Y_n)) \oplus \mathfrak{H}^n(K-L,\ \pi_n(Y_n)).$$

6. Nun sei X ein kompakter normaler Raum mit $\dim X \leqq n$ und sei Y_n ein absoluter Umgebungsretrakt. Dann können wir eine Gruppenoperation in $\mathfrak{G}_n(X)$ (= die Abbildungaklassen von X auf Y_n) einführen, mittels der S.-T. Huschen "Bridge" Theorie [2]. Für eine Abbildung $\varphi \in Y_n^X$ gibt es einen Nerv K der offenen Überdeckung von X, für welche es eine normierte Abbildung $F \in Y_n^K(K^{n-1}, \Delta)$ mit der Eigenschaft $F\rho \simeq \varphi$ gibt, wobei wir mit $\rho \in K^X$ eine beliebige kanonische Abbildung bezeichnet haben. Ferner, können wir es voraussetzen, dass für die andere Abbildung $\psi \in Y_n^X$, die gemeinsame Überdeckung angenommen werden kann, für welche es eine normierte Abbildung $G \in Y_n^K(K^{n-1}, \Delta)$ gibt und $G\rho \simeq \psi$ gilt. Wir definieren die Verknüpfung in $\mathfrak{G}_n(X)$ mittels $\rho(F \times G)$, dann gewinnen wir den folgenden Satz:

SATZ 2. *Die Korrespondenz* (2) *induziert den folgenden Isomorphismus*:

$$\mathfrak{G}_n(X) \approx \mathfrak{H}^1(X, \pi_1(Y_n)) \oplus \mathfrak{H}^n(X, \pi_n(Y_n)),$$

wobei die Cohomologiegruppen der rechten Seite die Čechschen Gruppen sind.

Der analoge Beweis befinet sich in [3].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] S.-T. HU, An exposition of the relative homotopy theory, Duke Math. J., 14(1947) 991-1049.

[2] S.-T. HU, Mappings of a normal space into an absolute neighborhood retract, Trans. Amer. Math. Soc., 64(1948) 336-358.

[3] H. UEHARA, On a Hopf homotopy classification theorem, Nagoya Math. J., 3(1951) 49-54.

[4] J. H. C. WHITEHEAD, Combinatorial homotopy, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), I:215-245; II:453-496.

MATHEMATISCHES INSTITUT, TÔHOKU UNIVERSITÄT.