

UEBER KÄHLERSCHE UND SYMPLEKTISCHE DIFFERENTIALALGEBREN

HEINRICH GUGGENHEIMER

(Received May 6, 1952)

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung der Homologie-Eigenschaften gewisser fastkomplexer und komplexer Mannigfaltigkeiten. Um die Betrachtung ganz im Rahmen der Theorie der *Differential-Algebren* [3] [14] durchzuführen, stellen wir nicht, die Eigenschaften von Vektor-Transformationen, sondern solche von Differentialformen in den Mittelpunkt unserer Betrachtung. Ein besonders kräftiges Hilfsmittel ist dabei der Begriff der *Filtration* [14].

Den Uebergang von der fastkomplexen zur komplexen Struktur gewinnen wir durch ein sehr leicht zu handhabendes Kriterium dafür, dass eine fastkomplexe Struktur integrierbar ist. Als Anwendung ergibt sich, dass gewisse vom Verfasser ([8] § 7, Fall B_{2k}^{2k}) und A. Lichnerowicz [17] betrachtete Strukturen mit der kählerschen (§ 3, [8]) identisch sind.

Ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit wurde in einer Vervielfältigung des topologischen Kolloquiums Strassbourg [9] angekündigt (die Behauptungen auf Seite 13 dieser Publikation und der Note in C.R. 232, 1951, p. 1398-1400 sind nicht bewiesen). Den Mitgliedern dieses Kolloquiums danke ich für viele anregende Diskussionen über das Thema dieser Arbeit.

§ 1. *E*-Algebren

1. Unter "Algebra" verstehen wir im Folgenden immer eine Algebra von alternierenden Differentialformen über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^{2n} der Dimension $2n$, mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Wenn nichts anderes erwähnt ist, setzen wir zweimalige Differenzierbarkeit voraus.

Bezeichnet $\mathfrak{A}$ die Algebra, $\mathfrak{A}^p$ den Vektorraum der Formen f^p vom Grade p , so ist $\mathfrak{A}$ die direkte Summe

$$(1.1) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 + \mathfrak{A}^1 + \dots + \mathfrak{A}^{2n}.$$

DEFINITION 1. $\mathfrak{A}$ heisst *E-Algebra*, wenn es ein $e \in \mathfrak{A}^2$ gibt, sodass überall $\wedge^n e \neq 0^{(1)}$ ist.

Die Mannigfaltigkeit heisst *fastkomplex*, wenn es auf ihr einen stetigen Automorphismus $C^{(2)}$ von $\mathfrak{A}^1$ gibt, mit

$$(1.2) \quad CCf^1 = -f^1$$

1) $\wedge$ ist das Symbol der Grassmann-Multiplikation nach [2b].

2) C ist als Transformation von Formen kontragredient zu der sonst auf fastkomplexen Mannigfaltigkeiten betrachteten Vektortransformation J mit $JJ = -1$.

([6], [7]). C definiert eine *fastkomplexe Struktur* ([6]) auf M^{2n} . Ch. Ehresmann hat gezeigt ([6], No.8), dass eine Mannigfaltigkeit dann und nur dann fastkomplex ist, wenn ihre Algebra eine E -Algebra ist.

Wir betrachten bis auf weiteres nur noch Algebren über dem Körper der komplexen Zahlen. Eine *fasthermitesche Struktur* ([6], No.8) zu einer gegebenen fastkomplexen wird durch eine hermitesche Form Φ definiert, welche in folgendem Sinn mit e vertauschbar ist : Über jeder Umgebung von M^{2n} lässt sich eine Basis $f_{[1]}^1, \bar{f}_{[1]}^1, \dots, f_{[n]}^1, \bar{f}_{[n]}^1$ von $\mathfrak{U}^1$ bezüglich Koeffizienten aus $\mathfrak{U}^0$ finden, sodass

$$e = i \sum_{k=1}^n f_{[k]}^1 \wedge \bar{f}_{[k]}^1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

und die hermitesche Form

$$(1.3) \quad \Phi = \sum_{k=1}^n f_{[k]}^1 \bar{f}_{[k]}^1$$

wird. Eine fasthermitesche Struktur existiert immer zu einer fastkomplexen. Die Beziehungen zwischen E -Algebra, fastkomplexer Struktur und fasthermitescher Struktur sind *nicht* eindeutig. Da die hermitesche Form positiv definit ist, können wir durch sie eine Riemannsche Metrik auf M^{2n} definieren. Für das Weitere setzen wir voraus, dass wir auf M^{2n} eine fastkomplexe Struktur und zu dieser eine fasthermitesche Struktur festlegen und uns immer auf diese beziehen. Ebenso denken wir uns über jeder Umgebung eine Basis von $\mathfrak{U}^1$ in der soeben beschriebenen Art festgelegt.

Eine solche Basis liefert uns lokal eine Formel für C .

$$f^1 = \sum_{k=1}^n \left\{ a_{[k]} f_{[k]}^1 + b_{[k]} \bar{f}_{[k]}^1 \right\}$$

sei eine beliebige lineare Form mit Koeffizienten aus $\mathfrak{U}^0$, dann ist

$$(1.4) \quad Cf^1 = i \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{a}_{[k]} \bar{f}_{[k]}^1 - \bar{b}_{[k]} f_{[k]}^1 \right\}.$$

C lässt sich eindeutig erweitern zu einem Automorphismus von $\mathfrak{U}^p$ mit

$$(1.5) \quad CC f^p = (-1)^p f^p$$

durch folgende Vorschrift:

Eine Form $f^{p,[k]}$ heisse vom *Typus* h (bezüglich der gegebenen Basis), wenn sie homogen vom Grade h in den $f_{[k]}^1$ ist, wobei die $\bar{f}_{[k]}^1$ nur als Parameter betrachtet werden. Jede Form f^p besitzt über dem Definitionsbereich der Basis eine eindeutige Zerlegung

$$(1.6) \quad f^p = \sum_{h=0}^p f^{p,[h]}.$$

Dann setzen wir

$$(1.7) \quad C f^p = i^p \sum_{h=0}^p (-1)^h \bar{f}^{p,[h]}.$$

In der nächsten No. werden wir diese lokale Definition dadurch rechtfertigen, dass wir zeigen, dass die so erweiterte Operation C global nur von der fasthermiteschen Struktur abhängt. Wir bemerken hier noch, dass e eine Eigenform von C ist

$$(1.8) \quad C e = e,$$

und dass

$$(1.9) \quad C(f^p \wedge g^q) = C f^p \wedge C g^q,$$

$$(1.10) \quad C(f^p + g^q) = C f^p + C g^q.$$

2. Zu jedè fasthermiteschen Struktur definieren wir einen Isomorphismus $*$ von $\mathfrak{U}^p$ auf $\mathfrak{U}^{2n-p}$ der für reelle Formen bis auf einen Faktor $2^{2(p-n)}$ mit dem Isomorphismus $*$ von Hodge-de Rham bezüglich der Riemannschen Metrik $ds^2 = \Phi$ ³⁾ übereinstimmt ([8] insbesondere (46); [10], [18], [19]). Bezüglich der in No. 1 eingeführten (lokalen) Basis von $\mathfrak{U}^1$ sei

$$f^p = \sum F_{k_1 \dots k_p l_1 \dots l_s} f_{[k_1]}^1 \wedge \dots \wedge f_{[k_p]}^1 \wedge \bar{f}_{[l_1]}^1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_{[l_s]}^1$$

eine beliebige p -Form. Die adjungierte Form $*f^p$ ist dann

$$(2.1) \quad *f^p = i^n \sum \delta_{1 \dots k_p n+1 \dots n+l_s k_p+1 \dots k_n+n l_s+1 \dots n+l_n} \bar{F}_{k_1 \dots l_s} f_{[k_r+1]}^1 \wedge \dots \wedge f_{[k_r]}^1 \wedge \bar{f}_{[l_s+1]}^1 \wedge \dots \wedge \bar{f}_{[l_n]}^1$$

Die Eigenschaften der Adjungierten

$$(2.2) \quad *(a_1 f_1^p + a_2 f_2^p) = \bar{a}_1 *f_1^p + \bar{a}_2 *f_2^p,$$

$$(2.3) \quad **f^p = (-1)^p f^p,$$

$$(2.4) \quad f_1^p \wedge *f_2^p = \overline{f_2^p \wedge *f_1^p},$$

$$(2.5) \quad f^p \wedge *f^p = F *1.$$

(F positiv definite hermitesche Form in den Koeffizienten von f^p) kann man leicht an der Definition verifizieren (vgl. [18] p. 8).

Nach P. Libermann [15] definieren wir eine zweite Adjungierte in der E -Algebra, ohne Bezugnahme auf eine fasthermitesche Struktur: $\mathfrak{U}_p$ sei der Vektorraum der tangentialen p -Vektoren an M^{2n} mit Koeffizienten aus $\mathfrak{U}^0$, $f_p \in \mathfrak{U}_p$. e vermittelt einen Isomorphismus α von $\mathfrak{U}_p$ auf $\mathfrak{U}^p$ durch

$$(2.6) \quad \alpha f_p = f_p \lrcorner \overset{p}{\wedge} \overset{4)}{e} \underset{p!}{}.$$

3) Es handelt sich hier um die Riemannsche Metrik in hermitescher Schreibweise, nicht um eine hermitesche Metrik.

4) $\lrcorner$ ist das Symbol des inneren Produkts in [2b].

Dann ist die *Liebermann*-sche Adjungierte gegeben durch

$$(2.7) \quad Sf^p = \alpha^{-1}(f^p) \lrcorner \frac{\bigwedge^n e}{n!}.$$

Berechnen wir S in einer fest gewählten Basis, so ergibt sich

$$(2.8) \quad *f^p = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} CSf^p.$$

Da $*$ und S global definiert sind, ist es nach (2.8) auch C .

Die Operation: alternierende Multiplikation mit e bezeichnen wir mit

L :

$$(2.9) \quad Lf^p = f^p \wedge e,$$

und die dazu duale mit Λ :

$$(2.10) \quad \Lambda f^p = (-1)^p *L*f^p.$$

Eine Form

$$f_k^p = L^k f_0^{p-2k}, \quad \Lambda f_0^{p-2k} = 0,$$

heisse von der Klasse k . Den Modul der p -Formen von der Klasse k bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}_k^p$.

$$\text{SATZ 1.} \quad *f_k^p = \frac{k!}{(n-p+k)!} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} + k} L^{n-p} C f_k^p \quad (p \leq n).$$

Dieser Satz wurde ausführlich in [8] p.282-286 bewiesen. Der Beweis ist dort für komplex-analytische Strukturen formuliert, man überzeugt sich aber leicht, dass er *ohne jede Änderung* für E -Algebren gilt. Statt $f_{[k]}^1$ steht in [8] ω_k .

Genau so wie in [8] loc.cit. folgt aus Satz 1 (oder unabhängig davon nach [8] No.4.6)

$$(2.11) \quad \Lambda L^k f_0^p = -k(n-p-k+1) L^{k-1} f_0^p,$$

und hieraus folgen wieder die Zerlegungssätze:

SATZ 2. Für $p \leq n-2$ ist ΛL ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}^p$ auf sich.

SATZ 3. Für $p \leq n$ ist $\mathfrak{A}^p$ die direkte Summe von $\mathfrak{A}_0^p$ und $L\mathfrak{A}^{p-2}$.

Diese beiden Sätze sind ausführlich in [8] [p.286 bewiesen. $\mathfrak{A}^p$ heisst dort Φ^p und (2.11) ist (97).

Nach Satz 3 gilt eine Formel für alle Formen, wenn sie für alle Formen der Klasse k , für jedes k , gilt. Satz 1 ergibt für Formen der Klasse k :

$$(2.12) \quad C* = *C.$$

5) Sf heisst f^{p*} in [15].

Dies ergibt mit (1.8)

$$(2.13) \quad C A = A C,$$

und beide Formeln gelten für *alle* Formen.

Eine weitere Folge von Satz 1 ist

$$(2.14) \quad * \mathfrak{U}_k^p = \mathfrak{U}_{n-p+k}^{2n-p}.$$

Nennen wir eine Form $f^{p,k} \in \mathfrak{U}^{p,k}$ von der Coklasse k , wenn $f^{p,k} = A f^{p+2k,0}$, $L f^{p+2k,0} = 0$, so haben wir auch

$$(2.15) \quad \mathfrak{U}_k^p = \mathfrak{U}^{p,n-p+k}.$$

Diese Aussage ist äquivalent mit [13]

$$(2.16) \quad \begin{aligned} L^{n-p} \mathfrak{U} &\cong * \mathfrak{U}^p \\ L^{n-p+1} \mathfrak{U}^p &= \phi. \end{aligned}$$

Die Aussage von Satz 3

$$\mathfrak{U}^p = \mathfrak{U}_0^p + \mathfrak{U}_1^p + \dots + \mathfrak{U}_q^p, \quad q = \left[\frac{p}{2} \right], \quad p \leq n$$

hat nach (2.15) ihr Gegenstück in

$$\mathfrak{U}^p = \mathfrak{U}^{p,0} + \mathfrak{U}^{p,1} + \dots + \mathfrak{U}^{p,q}, \quad q = \left[\frac{p}{2} \right], \quad p \geq n.$$

Für $p \leq n-1$ ist die Coklasse immer > 0 , d.h. keine Form vom Grade $p < n$ gehört zum Kern von L , wie sich schon aus Satz 2 ergibt. Umgekehrt ist für $p > n$ die Klasse immer > 0 , für $p > n$ ist also immer mit $f^p \neq 0$ auch $A f^p \neq 0$.

Aus (2.13) folgt noch

$$(2.17) \quad C \mathfrak{U}_k^p = \mathfrak{U}_k^p$$

und, wegen (1.8)

$$A = (-1)^p * L * = (-1)^p C S L S C = S L S,$$

daher

SATZ 4 (Libermann [15]). *Die Klasse einer Form hängt nur von e ab, nicht aber von der fasthermiteschen Struktur.*

3. Wir definieren als skalares Produkt zweier Formen f^p und g^p gleichen Grades:

$$(3.1) \quad P(f^p, g^p) = * (f^p \wedge * g^p)$$

$P(f^p, g^p)$ ist eine skalare Funktion auf M^{2n} mit den Eigenschaften

$$(3.2) \quad P(f^p, g^p) = \overline{P(g^p, f^p)}$$

$$(3.3) \quad P(a f^p + b g^p, h^p) = \bar{a} P(f^p, h^p) + \bar{b} P(g^p, h^p)$$

$$(3.4) \quad P(f^p, f^p) \neq 0 \text{ für } f^p \neq 0.$$

SATZ 5. a) $P(f^{p,[h]}, f^{p,[h]}) = 0$ für $h \neq k$.

b) $P(f_h^p, f_k^p) = 0$ für $h \neq k$.

Zum Beweis setzen wir $h > k$ voraus. Dann enthält $f^{p,[h]} \wedge * f^{p,[k]} n + h - k > n$ Linearfaktoren $f_{[1]}^1$, d. h. mindestens einen doppelt und das Schiefprodukt ist Null. Der zweite Teil des Satzes folgt aus dem

LEMMA. $P(Lf_p, g^{p+2}) = P(f^p, Ag^{p+2})$.

BEWEIS. $(f^p \wedge e) \wedge * g^{p+2} = f^p \wedge * (*[g^{p+2} \wedge e])$.

Allgemeiner ist überhaupt

$$(3.5) \quad Lf^p \wedge * g^{p+2} = f^p \wedge * Ag^{p+2}.$$

Die Orthogonalitätsrelation des Satzes 5b gibt nach Satz 4 eine Eigenschaft der E -Algebra, die des Satzes 5a gibt eine Eigenschaft der lokalen Basis der ausgewählten fasthermiteschen Struktur.

Das Skalarprodukt von *de Rham* [18] ist

$$(3.6) \quad (f^p, g^p) = \int_M * P(f^p, g^p).$$

§ 2. Symplektische Algebren

4. DEFINITION 2. Eine E -Algebra heisst *symplektisch*, wenn $de = 0$.

Wenn nichts besonderes bemerkt ist, seien alle von jetzt an betrachteten Algebren symplektisch.

SATZ 6. $d\mathfrak{A}_k^p \subset \mathfrak{A}_k^{p+1} + \mathfrak{A}_{k+1}^{p+1}$.

BEWEIS⁶⁾. Ist $f_k^p = f_0^{p-2k} \wedge (\wedge^k e)$, so ist $df_k^p = df_0^{p-2k} \wedge (\wedge^k e)$ sicher nicht von kleinerer Klasse als k . Andererseits ist nach (2.16) $f_0^{p-2k} \wedge (\wedge^{n-p+2k+1} e) = 0$, also auch $df_0^{p-2k} \wedge (\wedge^{n-p+2k+1} e) = 0$, daher kann die Klasse der in df_0^{p-2k} enthaltenen Formen nicht grösser als 1 sein.

5. Eine Form $f_{(k)}^p$ sei von der *Filterklasse* k , wenn ihre Zerlegung nach Satz 3 keine Formen von kleinerer Klasse als k enthält:

$$(5.1) \quad f_{(k)}^p = \sum_{h \geq k} f_h^p.$$

Der Modul der p -Formen von der Filterklasse k sei $\mathfrak{A}_{(k)}^p$. Dadurch haben wir eine Filtration [14] von $\mathfrak{A}$ definiert. Die Axiome der Filtration, [14] p. 12, sind leicht zu verifizieren: $\mathfrak{A}_{(k)} = \sum_{p=0}^{2n} \mathfrak{A}_{(k)}^p$

$\mathfrak{A}_{(k)}$ ist eine additive Gruppe

$\mathfrak{A}_{(k+1)} \subset \mathfrak{A}_{(k)}$

$\mathfrak{A}_{(0)} = \mathfrak{A}$.

Es gibt einen kanonischen *Isomorphismus* K von $\mathfrak{A}_{(k)}^p$ auf $\mathfrak{A}_{(k)}^p / \mathfrak{A}_{(k+1)}^p$, mit der

6) Mein ursprünglicherer Beweis [9] p. 7-8 war sehr viel länger. Die Idee dieses Beweises verdanke ich Herrn G. Reeb.

Multiplikationsregel (vgl. [14], p. 12),

$$(5.2) \quad Kf_k^p \circ Kf_l^q = K(f_k^p \wedge f_l^q \pmod{\mathfrak{A}_{(k+l+1)}^{p+q}}).$$

Daher repräsentiert die Zerlegung in Klassen nach Satz 3 die zur Filtration gehörende bewertete Algebra ([14], § 6)

$$(5.3) \quad G\mathfrak{A} = \sum_{k=0}^n \mathfrak{A}_{(k)} / \mathfrak{A}_{(k+1)}.$$

Satz 6 bedeutet für die Filtration:

$$(5.4) \quad d\mathfrak{A}_{(k)}^p \subset \mathfrak{A}_{(k)}^{p+1}$$

d. h. die äussere Ableitung ist mit der Filtration verträglich.

Die Filtration von $\mathfrak{A}$ induziert eine Filtration der zugehörigen Cohomologie-Algebra, der *de Rham*-schen Algebra

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 + \dots + \mathfrak{H}^m$$

mit

$$(5.5) \quad \mathfrak{H}^p = \{df^p = 0\} / \{f^p = df^{p-1}\}.$$

Eine Cohomologieklassse $\mathfrak{h}_{(k)}^p$ sei von der Filterklasse k , wenn k das *Maximum* der Filtrierungen der in $\mathfrak{h}_{(k)}^p$ enthaltenen Formen ist (vgl. [14], § 8). $\mathfrak{H}_{(k)}^p$ sei der Modul der Cohomologieklassen vom Grade p und der Filterklasse k . Da die Filtration nach oben und unten beschränkt ist (ihr Minimum ist Null, ihr Maximum n), so gilt ([14], § 10)

$$(5.6) \quad \mathfrak{H}^p = \sum_{k=0}^{[p/2]} \mathfrak{H}_{(k)}^p / \mathfrak{H}_{(k+1)}^p.$$

Zur genaueren Bestimmung dieser Gruppen betrachten wir den durch L in $\mathfrak{H}_{(k)}^p / \mathfrak{H}_{(k+1)}^p$ induzierten linearen Operator. Nach der in Definition 2 enthaltenen Voraussetzung ist L und d vertauschbar, L induziert somit einen Homomorphismus von $\mathfrak{H}_{(k)}^p / \mathfrak{H}_{(k+1)}^p$ auf $\mathfrak{H}_{(k+1)}^{p+2} / \mathfrak{H}_{(k+2)}^{p+2}$.

SATZ 7. *Der Kern von L in $\mathfrak{H}_{(k)}^p$ ist enthalten in den Homologieklassen, welche eine geschlossene Form von der Klasse 0 enthalten, und in denen, auf Mannigfaltigkeiten, auf welchen der Existenzsatz über harmonische Formen gilt, die harmonische Form von der Filterklasse 0 ist und eine Form der Klasse k enthält.*

Dieser Satz ist eine direkte Konsequenz des Satzes 6, denn man überzeugt sich leicht, dass $Lf_{(k)}^p$ nur dann eine Ableitung sein kann, wenn $f_{(k)}^p$ einer Form f_0^p mit $Lf_0^p = dg_0^{p+1}$ cohomolog ist. Der zweite Teil des Satzes folgt aus Satz 5b) und den Formeln von *de Rham* über skalare Produkte [18], p. 137. Für eine zu f_0^p cohomologe harmonische Form $h_{(l)}^p$, $l > 0$, wäre nämlich z. B.

$$(h_{(l)}^p, h_{(l)}^p) = (f_0^p, h_{(l)}^p) + (dg_0^{p-1}, h_{(l)}^p) = 0$$

im Widerspruch zu (3.4).

b_p sei der Rang von $\mathfrak{H}^p$, $b_{p,0}$ der von $\mathfrak{H}_{(0)}^p/\mathfrak{H}_{(1)}^p$, b_p^* der Rang der in Satz 7 beschriebenen linearen Gruppe H_p^* für alle k . Dann gilt:

SATZ 8. $b_{p+2} = b_p + b_{p,0} - b_p^*$.

BEMERKUNG. Die Sätze dieser No. gelten für alle *de-Rham*-schen Algebren, welche zu symplektischen Algebren gehören. *Im Folgenden beschränken wir und dagegen durchwegs auf Formen, welche ausserhalb einer (für jede Form wieder verschiedenen) kompakten Teilmenge von M^{2n} verschwinden, und die dazu gehörigen Cohomologiegruppen.*

6. Wir führen vier weitere Differentialoperatoren ein, die alle von der fasthermiteschen Struktur abhängen:

$$\begin{aligned} \bar{d} &= CdC, \\ \delta &= - * d *, \\ \bar{\delta} &= C \delta C = - * \bar{d} *, \\ \Delta &= d\delta + \delta d. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Die Formen f^p , für die $\Delta f^p = 0$, heissen *harmonische* Formen. Θ^p sei der Vektorraum der harmonischen p -Formen. Für offene oder geschlossene Mannigfaltigkeiten ist [19]

$$\Theta^p \cong \mathfrak{H}^p.$$

Wir setzen noch $\Theta_k^p = \Theta^p \cap \mathfrak{H}_k^p$.

Aus Satz 6 folgt für die neu eingeführten Operatoren

$$\begin{aligned} \bar{d}\mathfrak{H}_k^p &\subset \mathfrak{H}_k^{p+1} + \mathfrak{H}_{k+1}^{p+1}, \\ \delta\mathfrak{H}_k^p &\subset \mathfrak{H}_k^{p-1} + \mathfrak{H}_{k-1}^{p-1}, \\ \bar{\delta}\mathfrak{H}_k^p &\subset \mathfrak{H}_k^{p-1} + \mathfrak{H}_{k-1}^{p-1}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Von diesen Formeln bedarf wegen (2.17) nur noch die zweite einer Begründung. Nach (2.14) ist

$$d*\mathfrak{H}_k^p \subset \mathfrak{H}_{n-p+k}^{2n-p+1} + \mathfrak{H}_{n-p+k+1}^{2n-p+1} = \mathfrak{H}_{n-(p-1)+k-1}^{2n-(p-1)} + \mathfrak{H}_{n-(p-1)+k}^{2n-(p-1)}$$

daher ist, wieder nach (2.14)

$$\delta\mathfrak{H}_k^p \subset \mathfrak{H}_{k-1}^{p-1} + \mathfrak{H}_k^{p-1}.$$

Die Bedeutung der überstrichenen Ableitungsoperatoren beruht darauf, dass sie die Vertauschung von $\mathfrak{L}$ und $\mathcal{A}$ mit $\bar{d}$ und δ zu berechnen gestatten:

$$\delta L - L \delta = -\bar{d}, \quad (6.3)$$

$$d\mathcal{A} - \mathcal{A}d = \bar{\delta}. \quad (6.4)$$

Diese beiden Formeln sind äquivalent, die eine geht aus der anderen Transformation mit $*$ hervor.

$$c_{p,k} = \frac{k!}{(n-p+k)!} (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}p(p+1) + k} \quad \text{sei der Koeffizient, der in Satz}$$

1 auftritt. Nach Satz 6 und (2.17) setzen wir $dCf_k^p = f_k^{p+1} + f_{k+1}^{p+1}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta Lf_k^p &= - * d * Lf_k^p = -c_{p+2, k+1} * (L^{n-p-1} f_k^{p+1} + L^{n-p-1} f_{k+1}^{p+1}) \\ &= - \frac{c_{p+1, k+1}}{c_{p+1, k}} C^{-1} f_k^{p+1} - \frac{c_{p+2, k+1}}{c_{p+1, k+1}} C^{-1} f_{k+1}^{p+1} \\ &= -(k+1) Cf_k^{p+1} + (n-p+k) Cf_{k+1}^{p+1} \\ L \delta f_k^p &= -L * d * f_k^p = -c_{p, k} L * (L^{n-p} f_k^{p+1} + L^{n-p} f_{k+1}^{p+1}) \\ &= - \frac{c_{p, k}}{c_{p-1, k-1}} C^{-1} f_k^{p+1} - \frac{c_{p, k}}{c_{p-1, k}} C^{-1} f_{k+1}^{p+1} \\ &= -k Cf_k^{p+1} + (n-p+k+1) Cf_{k+1}^{p+1}.\end{aligned}$$

So wird, wir behauptet

$$\delta L - L \delta = -CdC.$$

Nach Definition 2 ist natürlich

$$(6.5) \quad dL - Ld = 0,$$

$$(6.6) \quad \delta A - A\delta = 0.$$

(6.5) wurde implizite schon beim Beweis von Satz 7 benutzt.

(6.3) — (6.6) zusammen ergeben

$$(6.7) \quad \Delta L - L\Delta = -(d\bar{d} + d\bar{d}),$$

$$(6.8) \quad \Delta A - A\Delta = \delta\bar{\delta} + \bar{\delta}\delta = (-1)^{p+1} * (d\bar{d} + \bar{d}d) *.$$

Wir merken noch an ([18], [8]), dass $\Delta * = * \Delta$, d. h. mit f^p ist $*f^p$ eine harmonische Form.

7. Auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit sei B der kanonische Isomorphismus von $\mathfrak{H}^p$ auf Θ^p , der jeder Cohomologiekasse die in ihr enthaltene (eindeutig bestimmte) harmonische Differentialform zuordnet. $B^{-1} * B$ ist eine *eindeutige* Abbildung von $\mathfrak{H}^p$ auf $\mathfrak{H}^{2n-p}$. Nach dem "ersten Theorem von de Rham" wird durch die *Poincaré'sche* Dualität D jeder Cohomologiekasse aus $\mathfrak{H}^{2n-p}$ eine Homologiekasse h_p der Dimension p zugeordnet ([19], [20] p. 216). Die Abbildung $T = DB^{-1} * B$ ist eine *eindeutige* Abbildung von $\mathfrak{H}^p$ auf die p -te Homologiegruppe $\mathfrak{H}_p$. Für eine nicht verschwindende Cohomologiekasse $\mathfrak{h}^p$ ist der Wert von $\mathfrak{h}^p$ auf $T\mathfrak{h}^p$ stets positiv :

$$(7.1) \quad \mathfrak{h}^p(T\mathfrak{h}^p) = \int_{T\mathfrak{h}^p} B\mathfrak{h}^p = \int_M B\mathfrak{h}^p \wedge * B\mathfrak{h}^p = (B\mathfrak{h}^p, B\mathfrak{h}^p) > 0.$$

Wir definieren, für $p \leq n$, einen Automorphismus von H^p/H_p^* durch $R^p = B^{-1} * BL^{n-p}$. Die Folge

$$O \rightarrow \mathfrak{H}^p / H_p^* \xrightarrow{R^p} \mathfrak{H}^p / H_p^* \rightarrow O$$

ist *exakt*, denn nach (2.16) ist L^{n-p} eine *eindeutige* Abbildung von $\mathfrak{H}^p$ auf

$\mathfrak{H}^{2n-p}$. Wenn $L^{n-p}f^p = df^{2n-p-1} = dL^{n-p}f^{p-1}$ (vgl. (2.14)) eine abgeleitete Form ist, so ist auch $f^p = df^{p-1}$ nullhomolog, die Behauptung ergibt sich nun durch Uebergang zu den Cohomologiegruppen und Zusammensetzung mit $B^{-1} * B$.

R^p ist eine *antilinear*e Abbildung ([2a] p.120) mit

$$R^p(ah^p) = \bar{a}R_p h^p.$$

Ist G der Automorphismus von $\mathfrak{H}^p$, der darin besteht, dass man alle Koeffizienten durch ihre komplex konjugierten Werte ersetzt, so gehört zu R^p kanonisch eine *lineare* Abbildung R'_p mit ([2a], p.121)

$$(7.2) \quad R^p = GR'_p.$$

Der Rang von R'_p ist gleich der Dimension von $\mathfrak{H}^p/H_p^*$, d.h. gleich $b^p - b_p^*$.

SATZ 9. Der Rang von R'_{2k+1} ist gerade, $b_{2k+1} - b_{2k+1}^* \equiv 0 \pmod{2}$.

Wir beweisen Satz in der folgenden Form:

SATZ 9'. R'_{2k+1} hat keinen reellen Eigenwert.

Dieser Satz folgt aus dem

SATZ 9''. R_{2k+1} hat keinen Eigenwert.

Nach diesem Satz existiert keine komplexe Zahl a , sodass die Gleichung

$$(7.3) \quad R_{2k+1} h^{2k+1} = a h^{2k+1}$$

eine Lösung besitzt. Ein reeller Eigenwert von R'^{2k+1} wäre aber nach (7.2) ein Eigenwert von R^{2k+1} .

BEWEIS DES SATZES 9''. Bei den Cohomologieklassen und bei R lassen wir der Einfachheit halber den Dimensionsindex $2k+1$ weg. Nach (2.4) ist

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \overline{R h}(Th) &= \int_M \overline{*BL^{n-p}h} \wedge *Bh = - \int_M BL^{n-p}h \wedge Bh \\ &= \int_{D^*h} L^{n-p}Bh = - \int_M L^{n-p}Bh \wedge Bh = 0, \end{aligned}$$

denn das äussere Quadrat einer alternierenden Form von ungeradem Grad ist stets Null, ferner sind $BL^{n-p}h$ und $L^{n-p}Bh$ cohomologe Formen, d.h. für einen beliebigen Zyklus z_{2n-p} ist

$$(7.5) \quad L^{n-p}h(z_{2n-p}) = \int_{z_{2n-p}} BL^{n-p}h = \int_{z_{2n-p}} L^{n-p}Bh.$$

Wenn es ein a und h gäbe, mit $Rh = ah$, so wäre nach (7.4) $ah(Th) = 0$ im Widerspruch zu (7.1) (es wäre $a \neq 0$, da der Kern von R 0 ist).

§ 3. Kählersche Algebren

8. DEFINITION. Eine symplektische Algebra heisst *kählersch*, wenn für

alle Formen $dd + \bar{d}d = 0$.

(6.7) und (6.8) ergeben

SATZ 10. *In einer Kählerschen Algebra sind mit f^p auch Lf^p und Af^p harmonische Formen.*

Jetzt können wir die Überlegungen von [8] p. 286 auf *harmonische* Formen anwenden und erhalten den

SATZ 11. a) $\Theta_k^p = L^k \Theta_0^{p-2k}$.

b) AL ist ein Automorphismus von Θ^p ($p \leq n-2$).

c) H^p ist die direkte Summe von H_0^p und LH^{p-2} ($p \leq n$).

d) $b_{p+2} = b_{p+2,0} + b_p \geq b_p$.

Auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit kählerscher Algebra wird das Verhältnis von Klasse und Filterklasse besonders einfach, sodass der Begriff der Klasse den der Filterklasse vollständig ersetzen kann.

SATZ 12. *In einer kählerschen Algebra über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit induziert der kanonische Isomorphismus B einen Isomorphismus $\mathfrak{H}_{(k)}^p / \mathfrak{H}_{(k+1)}^p \cong \Theta_k^p$.*

Wir wollen beweisen: Jede Klasse aus $\mathfrak{H}_{(k)}^p / \mathfrak{H}_{(k+1)}^p$ enthält eine Cohomologieklass $\mathfrak{h}_{(k)}^p$ mit $B\mathfrak{h}_{(k)}^p = f_k^p$. Nach den Sätzen 7 und 10a genügt es, zum Beweis $\mathfrak{H}_{(0)}^p / \mathfrak{H}_{(1)}^p$ zu betrachten. Die Cohomologieklass $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{(0)}^p$, $\mathfrak{h} \in \mathfrak{H}_{(1)}^p$ enthalte die harmonische Form

$$B\mathfrak{h} = f_0^p + f_1^p + \dots + f_q^p, \quad f_0^p \neq 0.$$

f_0^p ist nach Satz 5 und (3.6) orthogonal auf allen Formen der Filterklasse ≥ 1 , daher ist $B^{-1}f_0^p \in \mathfrak{H}_{(0)}^p$, $B^{-1}f_0^p \in \mathfrak{H}_{(1)}^p$. Denn wäre $f_0^p = f_{(k)}^p - df^{p-1}$, so folgt (vgl. [18], (3)) für $k \geq 1$ $(f_0^p, f_0^p) = (f_{(k)}^p, f_0^p) + (df^{p-1}, f_0^p) = (f^{p-1}, \delta f_0^p) = 0$ entgegen (2.5). Es ist auch offenbar $\mathfrak{h} \equiv B^{-1}f_0^p \pmod{\mathfrak{H}_{(1)}^p}$.

9. Wir zeigen jetzt, dass diejenigen reell-analytischen Mannigfaltigkeiten, die eine kählersche Algebra tragen können, die *komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten mit kählerscher Metrik* [8] sind. Dadurch wird die Definition 3 gerechtfertigt.

Eine Mannigfaltigkeit heisst komplex-analytisch, wenn sie eine Überdeckung besitzt, von der jede Umgebung dem komplexen kartesischen Raum $R^{(n)}$ homöomorph ist, sodass im Durchschnitt je zweier Umgebungen der Übergang von den einen komplexen Koordinaten zu den anderen durch eine komplex-analytische Transformation gegeben ist. Die Gesamtheit aller Koordinatensysteme auf der Mannigfaltigkeit, die nach dieser Definition zulässig sind, heisst die *komplexe Struktur* der Mannigfaltigkeit. ([8] 1).

Die komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten mit kählerscher Metrik sind komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, die eine symplektische Algebra tragen. Unsere Behauptung folgt daher aus dem

SATZ 13. *Jede E-Algebra auf einer reell-analytischen Mannigfaltigkeit, in der eine fasthermitesche Struktur ausgewählt werden kann, sodass $dd + \bar{d}d = 0$, bestimmt eindeutig eine komplexe Struktur.*

Für eine Basis $dx^1, \dots, dx^{2n}$ von $\mathfrak{A}^1$ über einer Umgebung mit den reellen Koordinaten $x^1, \dots, x^{2n}$ sei der Tensor a_k^i die Restriktion von C auf $\mathfrak{A}^1$. Setzt man

$$a_k^i = \frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^i}{\partial x^k}, \quad t_{kl}^i = \sum_p (a_{pk}^i a_l^p - a_{pl}^i a_k^p),$$

so besagt ein Satz von *Eckmann* und *Frölicher* [5] dass auf einer reell-analytischen Mannigfaltigkeit a_k^i dann und nur dann eine komplexe Struktur bestimmt, wenn der Tensor t_{kl}^i verschwindet. Wenn sie existiert, ist die komplexe Struktur eindeutig definiert.

Für eine reelle Funktion f ist $Cf = f$, es ist also $(d\bar{d} + \bar{d}d)f = 0$, wenn $dCdf = -CdCdf$. Die Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} dCdf &= a_k^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge dx^k + \frac{\partial a_k^i}{\partial x^l} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^l \wedge dx^k, \\ CdCdf &= -a_k^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} dx^i \wedge dx^k + a_r^i a_s^k \frac{\partial a_k^i}{\partial x^r} \frac{\partial f}{\partial x^s} dx^r \wedge dx^s. \end{aligned}$$

Wir wählen jetzt das Koordinatensystem speziell so, dass in einem Punkt $a_k^i = \delta_{n+k}^i$, wobei $dx^{2n+k} = -dx^k$ gesetzt wird. Dann ergibt sich als Bedingung für $(dCd + CdC)f = 0$ bei beliebigem f :

$$a_{kl}^i = -a_{n+k, n+l}^i$$

und dies in t_{kl}^i eingesetzt ergibt $t_{kl}^i = 0$. Da t_{kl}^i nach [5] ein Tensor ist, gilt dies allgemein und die Bedingung von *Eckmann* und *Frölicher* ist erfüllt⁷⁾⁸⁾.

Umgekehrt gilt $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ in jeder Differentialalgebra über einer komplexen Mannigfaltigkeit: Eine Basis von $\mathfrak{A}^1$ kann dann immer in der Gestalt $dz^1, \dots, dz^n, \bar{d}z^1, \dots, \bar{d}z^n$ gefunden werden, wo die z^i komplexe Funktionen auf der Mannigfaltigkeit sind. Der Typus einer Form (No.1) ist dann eine Invariante der komplexen Struktur und hängt nicht von der Auswahl der Basis ab ([8] p.272). f^{r+q} sei eine $r+q$ -Form von Typus q

$$f^{r+q} = \sum P_{k_1 \dots k_r, l_1 \dots l_q} dz_{k_1} \wedge \dots \wedge dz_{k_r} \wedge \bar{d}z_{l_1} \wedge \dots \wedge \bar{d}z_{l_q}$$

dann wird

7) Natürlich könnten wir überall statt des Kriterium von *Eckmann-Frölicher* das von *de Rham-Ehresmann* ([16]p.743) verwenden.

8) Wir haben eigentlich folgendes bewiesen: Wenn $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ für alle 0-Formen, so ist $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ für alle Formen und $t_{k^s}^i = 0$. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn *W. V. D. Hodge* genügt es, $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ für alle Formen einer beliebigen Dimension zu fordern.

$$d\bar{d}f^{r+q} = 2i(-1)^{r+q} \sum \frac{\partial^2 P_{k_1 \dots lq}}{\partial \bar{z}_l \partial z_k} dz_k \wedge d\bar{z}_l \wedge dz_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{lq},$$

$$\bar{d}df^{r+q} = 2i(-1)^{r+q} \sum \frac{\partial^2 P_{k_1 \dots lq}}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} d\bar{z}_l \wedge dz_k \wedge dz_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{lq},$$

d. h. $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$. Diese Bedingung ist also auch *notwendig* für die Existenz einer komplexen Struktur :

SATZ 13'. $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$ ist dem Kriterium von Eckmann und Frölicher äquivalent.

10. Eine Anwendung unseres Kriteriums ist :

SATZ 14. Wenn es auf einer Mannigfaltigkeit M^{2n} mit symplektischer Algebra eine Riemannsche Metrik gibt, in der alle Koeffizienten von e verschwindende Covariante Ableitungen haben, so ist die Algebra kählersch.

Dieser Satz bedeutet, dass z. B. die in [8] § 7 (Fall B_{2k}^{2k}), [17] betrachteten Strukturen kählersch sind.

Der in [8] § 7 verwendete Operator Δ ist bis auf einen Faktor $1/4$ mit dem in (6.7) auftretenden identisch ([8] p. 269). Wenn die Voraussetzung von Satz 14 erfüllt ist, so gilt ([8] p. 294) $\Delta L - L\Delta = 0$, also nach (6.7) $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$.

11. Die in [8] für kählersche Algebren auf komplex-analytischen Mannigfaltigkeiten bewiesenen Sätze, soweit sie über die Aussagen über symplektische Algebren hinausgehen, beruhen alle auf folgendem Satz von E. Kähler :

Auf einer Mannigfaltigkeit mit komplex-analytischer Struktur sei

$$ds^2 = \sum g_{i\bar{k}} d\bar{z}_i dz_k$$

eine kählersche Metrik [8] p. 263 zu

$$e = i \sum g_{i\bar{k}} dz_i \wedge d\bar{z}_k, \quad de = 0.$$

Dann gibt es lokal eine Funktion $U(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ sodass

$$g_{i\bar{k}} = \frac{\partial^2 U}{\partial z_i \partial \bar{z}_k}$$

Die Voraussetzung der Analytizität ist hierbei überflüssig. Wir setzen also voraus, dass unsere Mannigfaltigkeit eine Überdeckung besitzt, von der jede Umgebung dem komplexen kartesischen Raum $R^{(n)}$ homöomorph ist, sodass im Durchschnitt je zweier Umgebungen der Übergang von den einen komplexen Koordinaten $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ zu den anderen $z'_1, \dots, z'_n, \bar{z}'_1, \dots, \bar{z}'_n$ durch dreimal differenzierbare Transformationen

$$z'_i = f_i(z_1, \dots, z_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

gegeben ist, und dass die Mannigfaltigkeit mindestens dreimal stetig

differenzierbar sei.

Wegen $de = 0$ ist lokal (vgl. No. 1) $e = d(f^{[0]} + f^{[1]})$. Es ist dann $df^{[0]} = f^{[2]}$, $df^{[1]} = f^{[2]}$, also $d(f^{[0]} + f^{[1]}) = 0$, daher ist lokal $f^{[0]} + f^{[1]} = \bar{d}f^0$, $e = d\bar{d}f^0$, d. h. $g_{i\bar{k}} = \partial^2 f^0 / \partial z_i \partial \bar{z}_k$, w. z. b. w.

Insbesondere sind alle Aussagen, die sich auf die spezielle Gestalt des Krümmungstensors einer kählerschen Metrik beziehen ([8] p. 264, [1]) von der Voraussetzung der Analytizität unabhängig. Z. B. ist $\Delta C = C\Delta$ ([8] § 3) und für Satz 9 kann R durch C ersetzt werden. Dies ist wesentlich für das Theorem 4 von [11].

§ 4. Homologietheorie

12. Zum Abschluss übertragen wir die Sätze von *Eckmann* [4] über kählersche Mannigfaltigkeiten auf Mannigfaltigkeiten mit symplektischer Algebra. Da der Beweis von [4] hierfür etwas abgeändert werden muss, beweisen wir die Sätze ausführlich.

$\mathfrak{H}_p$ sei die p -te Homologiegruppe von M^{2n} bezüglich komplexer Koeffizienten, M der Grundzyklus von M^{2n} . Eine Cohomologieklassse $\mathfrak{h}_{(k)}^p$ der Filterklasse k repräsentieren wir immer durch eine geschlossene Form $f(\mathfrak{h}_{(k)}^p)$ aus $\mathfrak{h}_{(k)}^p$ von *maximaler Filterklasse*, $\cap$ sei das Cap-Produkt eines Cozyklus mit einem Zyklus, $\cup$ des Cup-Produkt zweier Cozyklen, $\otimes$ der Durchschnitt zweier Zyklen. Der Dualitätsoperator D , $Df^p = f^p \cap M \in \mathfrak{H}_{2n-p}$ bewirkt einen Isomorphismus von $\mathfrak{H}^p$ auf $\mathfrak{H}_{2n-p}$ (vgl. No. 7), wir setzen $De = Z \in \mathfrak{H}_{2n-2}$. Z heiße die *ausgezeichnete* Homologieklassse von M^{2n} , die Schnitte von Z mit sich bezeichnen wir durch Indizes in eckigen Klammern:

$$\begin{aligned} Z_{[1]} &= Z &= De &\in \mathfrak{H}_{2n-2} \\ Z_{[2]} &= Z \otimes Z &= D \overset{2}{\wedge} e &\in \mathfrak{H}_{2n-4} \\ Z_{[3]} &= Z \otimes Z \otimes Z &= D \overset{3}{\wedge} e &\in \mathfrak{H}_{2n-6} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Eine Homologieklassse $z_{p(k)} \in \mathfrak{H}_p$ heiße von der Filterklasse k , wenn sie als $D\mathfrak{h}_{(n-p+k)}^{2n-p}$ dargestellt werden kann (d. h. als $D * R\mathfrak{h}_{(k)}^p$). Wir sagen, ein Zyklus *liege auf* $Z_{[k]}$, wenn er dem Schnitt eines Zyklus mit $Z_{[k]}$ homolog ist.

SATZ 15. *Jeder p -Zyklus von M^{2n} ist einem Zyklus auf $Z_{[n-p]}$ homolog; ist er von der Filterklasse k , so ist er sogar einem Zyklus auf $Z_{[n-p-k]}$ homolog.*

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} Z_{p(k)} &= Df_{(n-p+k)}^{2n-p} = (f_{(0)}^{p-2k} \cup \overset{n-p+k}{\wedge} e) \cap M \\ &= f_{(0)}^{p-2k} \cap (\overset{n-p+k}{\wedge} e \cap M) = f_{(0)}^{p-2k} \cap Z_{[n-p+k]} \\ &= Df_{(0)}^{p-2k} \otimes Z_{[n-p+k]}. \end{aligned}$$

V^{2m} sei eine geschlossene symplektische Untermannigfaltigkeit von M^{2n} , V ihr Grundzyklus, und i die identische Abbildung von V^{2m} in M^{2n} . Dann

ist $\int_V \wedge (i^* e) \neq 0$, d. h.

SATZ 16. *Eine geschlossene symplektische Untermannigfaltigkeit V^{2m} einer symplektischen Mannigfaltigkeit M^{2n} ist nicht homolog Null in M^{2n} .*

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. BOCHNER, Curvature in Hermitian Metric, Bull. Amer. Math. Soc., 53(1947), 179-195.
- [2] N. BOURBAKI, a. Algèbre Linéaire, Paris, 1947.
b. Algèbre multiplinéaire, Paris, 1948.
- [3] H. CARTAN, Notions d'Algèbre différentielle, Coll. de Topologie C. B. R. M. Bruxelles, 1950, Liège et Paris, 1951.
- [4] B. ECKMANN, Quelques propriétés globales des variétés kählériennes, C. R., 229(1949), 557-559.
- [5] B. ECKMANN ET A. FRÖLICHER, Sur l'intégrabilité des structures presque complexes, C. R., 232(1951), 2284-2286.
- [6] C. EHRESMANN, Sur la théorie des espaces fibrés, Coll. Top. Alg. C. N. R. S., Paris, 1947.
- [7] C. EHRESMANN, Sur les variétés presque complexes, Proc. Int. Cong. Math. Harvard, 1950.
- [8] H. GUGGENHEIMER, Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit kählerscher Metrik, Comm. Math. Helv., 25(1951), 257-297.
- [9] H. GUGGENHEIMER, Variétés symplectiques, Coll. Top. Strasbourg, Janvier, 1951.
- [10] W. V. D. HODGE, The theory and applications of Harmonic Integrals, Cambridge, 1941.
- [11] W. V. D. HODGE, A special type of Kähler manifold. Proc. London Math. Soc., (3) 1, 1951, 104-117.
- [12] K. KODAIRA, Harmonic Forms in Riemannian Manifolds, Ann. of Math., 50(1949), 587-665.
- [13] TH. H. LEPAGE, Sur les matrices symétriques et les modules des formes alternées, Bull. Acad. Roy. Belgique, 1949, 325-345.
- [14] J. LERAY, L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, J. Math. pur. appl. 29(1950), 1-139.
- [15] P. LIBERMANN, Formes différentielles sur une variété symplectique, C. R. 234(1952), 395-397.
- [16] P. LIBERMANN, Problemes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe sur une variété à quatre dimensions, Bull. Acad. Roy. Belgique, 1959, 742-755.
- [17] A. LICHTNEROWICZ, Généralisations de la géométrie globale, Colloque de géométrie différentielle C. B. R. M., 1951.
- [18] G. DE RHAM ET P. BIDAL, Les formes différentielles harmoniques. Comm. Math. Helv., 19(1946), 1-49.
- [19] G. DE RHAM-K. KODAIRA, Harmonic Integrals, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, Princeton, 1950.
- [20] G. DE RHAM, Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples, Ens. Math., 35(1936), 213-228.

BASEL, SWITZERLAND.