SOUS-GROUPES COMMUTATIFS ET TORSION DES GROUPES DE LIE COMPACTS CONNEXES

ARMAND BOREL

(Received October 15, 1960)

Ce travail apporte quelques renseignements sur la torsion du groupe de cohomologie entière d'un groupe de Lie compact connexe G, que nous appellerons, suivant l'usage, la torsion de G, sur les sous-groupes commutatifs de G, et met ces deux questions en relation. Nous nous intéresserons en particulier aux rapports qui existent entre la p-torsion (p nombre premier) et les sous-groupes commutatifs de type $(p, \ldots\ldots, p)$, que nous appellerons ici les $[p]$-sous-groupes. Ce travail a été résumé dans une Note au Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), pp. 285-288.

En nous appuyant sur quelques remarques concernant les H-espaces dont la cohomologie entière est de type fini, faites dans le §1, et sur le Théorème V de [14], on verra que le groupe simplement connexe exceptionnel $\mathbf{E}_i$ n'a pas de p-torsion lorsque $p = 5$, $i = 6, 7$ et $p = 7$, $i = 7, 8$, et l'on déterminera aussi $H^*(\mathbf{E}_6; \mathbf{Z}_3)$, $H^*(\mathbf{E}_8; \mathbf{Z}_5)$, (Théor. 2.2, 2.3). Compte tenu de résultats connus [5, 8, 14], on pourra alors indiquer les nombres premiers intervenant dans les coefficients de torsion de tous les groupes simples et simplement connexes (2.5) et l'on *vérifiera* (2.6) le théorème suivant, conjecturé dans [7]:

THÉORÈME A. *Supposons G, simple et simplement connexe, et soit p un nombre premier ne divisant pas les coefficients de la plus grande racine de G, exprimée comme somme de racines simples. Alors G n'a pas de p-torsion.*

Dans un groupe de Lie compact connexe G il existe des $[p]$-sous-groupes évidents, les éléments d'ordre p d'un tore maximal, mais il peut y en avoir d'autres, (pour $p = 2$, les matrices diagonales de $\mathbf{SO}(n)$, $(n \geqq 3)$ par exemple). Cependant, d'après [9, XII, 5,3, 5.4], si G n'a pas de p-torsion, tout $[p]$-sous-groupe H fait partie d'un tore, ce qui précise un résultat de [11] affirmant que, sous l'hypothèse faite, le rang de H est au plus égal à la dimension des tores maximaux de G. Cette dernière condition est évidemment nécessaire pour que H fasse partie d'un tore de G, mais elle n'est pas suffisante en général. En effet, on démontrera:

(i) *Pour que le groupe fondamental $\pi_1(G)$ de G soit sans p-torsion, il faut et il suffit que tout $[p]$-sous-groupe de rang deux soit contenu dans un* *tore de G*[1].

(ii) *Pour que G soit sans p-torsion, il faut et il suffit que tout* $[p]$*-sous-groupe de rang* $\leqq 3$ *soit contenu dans un tore.*

(*Voir* 3.12, 4.5.) On verra par construction d'exemples que ces conditions sont suffisantes; la nécessité de la condition de (i) (en fait, un énoncé plus général, cf. 3.9) résultera principalement de ce que *si* $\pi_1(G)$ *est sans torsion, le centralisateur de tout élément de G est connexe* (3.5)[2]; celle de la condition de (ii) est conséquence du théor. 5. 3 de [9, XII].

Finalement, on aura prouvé, en partie par des raisonnements a priori, en partie par des vérifications utilisant la classification, le

THÉORÈME B. *Soit p un nombre premier et soit G un groupe de Lie compact connexe. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) *G n'a pas de p-torsion.*

(2) *L'espace classifiant* B_G *de G n'a pas de p-torsion.*

(3) *Tout* $[p]$*-sous-groupe est contenu dans un tore.*

(4) *Tout* $[p]$*-sous-groupe de rang* $\leqq 3$ *est contenu dans un tore.*

Dans le §5, le théorème 5.3 de [9, XIII] déjà cité sera généralisé par le:

THÉORÈME C. *Soient H un sous-groupe compact commutatif de G, et* H_0 *la composante connexe de l'élément neutre de H. Si G n'a pas de p-torsion pour tout diviseur premier de l'ordre de* H/H_0*, alors H est contenu dans un tore.*

Pour l'établir, on s'appuiera en particulier sur le fait que si G est sans p-torsion, alors un sous-groupe connexe de rang maximum U et l'espace homogène correspondant G/U sont sans p-torsion (5.1).

Dans les démonstrations des résultats précédents, on se ramènera fréquemment au cas des groupes semi-simples grâce au fait qu'un groupe de Lie compact connexe est homéomorphe au produit d'un tore par sa partie semi-simple (3.2).

Le Théor. 6.2 montre que, si $G = \mathbf{F}_4$, **Spin** (n) $(n = 7,8,9)$, les $[2]$-sous-groupes maximaux de G sont conjugués par automorphismes intérieurs et l'analogie de [4] entre $[2]$-sous-groupes maximaux en cohomologie mod 2 et tores maximaux en cohomologie réelle subsiste. Nous ne savons pas si l'on peut en général mettre directement en relations la cohomologie mod p de G ou de B_G

1) Ce résultat a été suggéré par des discussions avec J. Wolf, à qui je dois aussi l'énoncé et une partie de la vérification du lemme 3. 11.

2) Pour démontrer 3. 5, on se ramène tout de suite au cas où G est semi-simple et simplement connexe. On verra alors que plus généralement l'ensemble des points fixes d'un automorphisme σ de G est connexe (3. 4), théorème d'abord prouvé par R. Bott (non publié), de manière entièrement différente. Lorsque σ est involutif, ce résultat, dû à E. Cartan, est aussi établi dans [14, IV, Prop. 3. 1].

avec les $[p]$-sous-groupes maximaux. Des exemples (voir 6.3-6.5) montrent que ces derniers peuvent former plus d'une classe de conjugaison.

Enfin, le § 7 apporte des compléments au § 4 de [9, XII], concernant les [3]-groupes opérant sur le plan des octaves.

Les résultats établis dans les §§ 1,2 avaient été communiqués antérieurement à S.Araki, qui les a complétés en décrivant notamment la cohomologie mod 3 de $\mathbf{E}_7$, $\mathbf{E}_8$ (voir [1]). Dans cet ordre d'idées, il reste donc en premier lieu à déterminer $H^*(\mathbf{E}_i; \mathbf{Z}_2)$, $(i = 6, 7, 8)$.

Les résultats de cet article mettent ainsi en évidence quelques liens entre la structure de groupe d'un groupe de Lie et sa topologie. Cependant, l'auteur regrette vivement d'en avoir été réduit à établir plusieurs propositions d'énoncé général à l'aide de vérifications utilisant la classification.

"You have a low shopkeeping mind. You think of things that would never come into a gentleman's head."
"That's the Swiss national character, dear lady."

(B. Shaw)

0. Rappel et notations.

Dans tout ce travail, G désigne un groupe de Lie compact connexe.

0.1. Tors. H est le sous-groupe de torsion d'un groupe commutatif H, ord H est l'ordre d'un groupe fini H; si A est un sous-ensemble du groupe H, on note $Z(A)$ le centralisateur de A dans H. Un $[p]$-groupe est un groupe commutatif de type $(p, \ldots\ldots, p)$; son rang est le nombre de facteurs cycliques.

$\mathbf{Q}$ est le corps des rationnels, $\mathbf{R}$ celui des réels, $\mathbf{Z}_p$ (p premier) le corps des entiers mod p, ou le groupe cyclique d'ordre p.

$E\ (m_1, \ldots\ldots, m_k)$ dénote l'algèbre extérieure d'un module libre gradué sur un anneau A, avec r générateurs de degrés respectifs $m_1, \ldots\ldots, m_k$ (impairs si la caractéristique de A est $\neq 2$), $P(a, b)$ désigne une algèbre de polynomes tronquée, $A\,[x]\,/\,(x^b)$ engendrée par un élément x de degré a, de hauteur b.

La série de Poincaré d'un module M libre sur A, gradué par des sous-modules M^i $(i \geqq 0)$ de type fini, est

$$P(M, t) = \sum_{i \geqq 0} (\text{rang } M^i) \cdot t^i,$$

et si X est un espace topologique, on pose

$$P_p(X, t) = P(H^*(X; \mathbf{Z}_p), t), \quad P_0(X, t) = P(H^*(X; \mathbf{Q}), t).$$

0.2. La composante connexe de l'élément neutre d'un groupe de Lie H, que l'on appellera la *composante neutre de* H, sera notée H_0. On rappelle que si H est compact connexe, on a $H = Z(H)_0 \cdot H_{ss}$ avec $Z(H)_0 \cap H_{ss}$ fini, H_{ss} désignant le plus grand groupe semi-simple de H.

Soient G' un revêtement fini de $G, f: G' \to G$ la projection canonique, et N le noyau de f; le sous-groupe N est central, donc contenu dans tous les tores maximaux de G'. Par conséquent, si U est un sous-groupe connexe de rang maximum de G, $f^{-1}(U)$ est connexe. En particulier si T (resp. T') est un tore maximal de G (resp. G'), $f^{-1}(T)$ (resp. $f(T')$) est un tore maximal de G' (resp. G). Si $G = G_1 \cdot G_2$ (G_1, G_2 invariants connexes fermés d'intersection finie) alors $U = (G_1 \cap U) \cdot (G_2 \cap U)$ (cf. [12]). On déduit de cela que G/U s'identifie au quotient du revêtement universel de G_{ss} par un sous-groupe connexe, donc que G/U est simplement connexe.

0. 3. Tout élément $g \in G$ est sur un sous-groupe à un paramètre, donc $g \in Z(g)_0$. Les tores maximaux de G sont conjugués par automorphismes intérieurs, et leur intersection est le centre de G. Etant donnés un tore $S \subset G$ et un élément $g \in Z(S)$, il existe un tore T contenant g et S, donc le centralisateur $Z(S)$ d'un tore S est connexe, et un tore maximal est son propre centralisateur (pour tout cela, *voir* par exemple Sém. S. Lie, Paris (1954-55), Exp. 23). L'espace homogène $G/Z(S)$, où S est un tore de G, est sans torsion et ses nombres de Betti en dimensions impaires sont nuls [6, 13].

0. 4. On convient de noter ici $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ les représentants *simplement connexes* des structures simples exceptionnelles. Leurs centres sont donc d'ordres respectifs 1, 1, 3, 2, 1. Les représentants simplement connexes des structures simples classiques sont les groupes unitaires unimodulaires complexes et quaternioniens $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$ et les groupes de spineurs $\mathbf{Spin}(n)$ $(n \neq 2,4)$. Le centre de $\mathbf{SU}(n)$ (resp. $\mathbf{Sp}(n)$, resp. $\mathbf{Spin}(2m+1)$, resp. $\mathbf{Spin}(4m+2)$) est cyclique d'ordre n (resp, 2, 2, 4), celui de $\mathbf{Spin}(4m)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}_2)^2$.

Tout groupe simple compact connexe et simplement connexe est isomorphe à l'un des groupes sus-mentionnés.

1. *H*-espaces dont la cohomologie à un nombre fini de générateurs.

1. 1. Dans ce paragraphe, X désigne un espace compact connexe, dont le groupe de cohomologie entière admet un nombre fini de générateurs, et qui est muni d'un produit de type (1, 1), par exemple avec élément neutre à gauche et à droite. D'après le théorème de Hopf:

$$(1) \qquad H^*(X; \mathbf{Q}) = E(m_1, \ldots\ldots, m_l), \qquad (m_i \text{ impair}; \ 1 \leqq i \leqq l).$$

1. 2. PROPOSITION. *Soit H le quotient de $H^*(X; \mathbf{Z})$ par son groupe de torsion. Alors H est l'algèbre extérieure d'un module libre à l générateurs de degrés $m_1, \ldots\ldots, m_l$.*

Soit $h: H^*(X; \mathbf{Z}) \to H^*(X \times X; \mathbf{Z})$ l'homomorphisme défini par le produit dans X. En utilisant la règle de Künneth, on voit que h induit un homomorphisme $h': H \to H \otimes H$ qui vérifie la condition imposée aux algèbres de Hopf, donc pour tout anneau $K, H \otimes K$ est une algèbre de Hopf sur K. Cela étant, on voit que la démonstration de la Prop. 7.3 de [3], (où l'on prouve 1.2 en supposant X sans torsion) est aussi valable pour H.

1.3. PROPOSITION. *Soit p un nombre premier. Alors $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ contient un sous-module gradué isomorphe à $E(m_1, \ldots\ldots, m_l)$, annulé par tous les opérateurs de Bockstein, et qui est une sous-algèbre isomorphe à $E(m_1, \ldots\ldots, m_l)$ si p est impair.*

Soit T le sous-groupe de torsion de $H^*(X; \mathbf{Z})$, et soient $y_i \in H^*(X; \mathbf{Z})$ des éléments de $H^*(X; \mathbf{Z})$ dont les images dans H forment un système minimal de générateurs. Vu 1.2, les monômes

$$y_{i_1} \cdots\cdots y_{i_t} \qquad (i_1 < \cdots\cdots < i_t;\ t = 1, \ldots\ldots, l)$$

forment une base d'un supplémentaire de T, et sont donc linéairement indépendants dans $H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes K$ pour tout corps K. Si $K = \mathbf{Z}_p$, ils sont annulés par les opérateurs de Bockstein, puisqu'ils proviennent de classes entières. Si de plus p est impair, les y_i sont de carré nul dans $H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_p$ et notre assertion résulte de ce que $H^*(X; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_p$ s'identifie à une sous-algèbre de $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$.

1.4. PROPOSITION. *Soient p impair et (u_i) un système de type (M) [3, §6] de générateurs de $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$. Alors (u_i) contient au moins l générateurs de degrés impairs.*

L'élément y_i considéré dans la démonstration de 1.3 s'écrit comme un polynome $P_i(u_1, \ldots\ldots, u_m)$. Comme y_i est de degré impair, chaque monôme de P_i doit contenir au moins un u_j de degré impair. Puisque $u_j \cdot u_j = 0$ si $d^0 u_j$ est impair, notre assertion résulte du fait que le produit $y_1, \ldots\ldots y_l$ est non nul d'après 1.3.

1.5. Une algèbre de Hopf H sur $\mathbf{Z}_p$ est dite être de type (p) si tout élément de H est de hauteur $\leqq p$ [1, §1]. Soit (u_i) un système de générateurs de type (M) de H, au sens de [3, § 6]. La sous-algèbre engendrée par 1 et u_i est donc égale à $E(d^0 u_i)$ si $d^0 u_i$ est impair, à $P(d^0 u_i; p)$ si $d^0 u_i$ est pair, et H est le produit tensoriel de ces sous-algèbres [3, Théor. 6.1]. On a alors la proposition suivante, due à S. Araki [1, Théorème 7]:

PROPOSITION. *Soit T le sous-groupe de torsion de $H^*(X; \mathbf{Z})$ et soit p un nombre premier impair. Si $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ est de type (p), il existe une suite finie d'algèbres de Hopf de type (p) $A_0 = (H^*(X; \mathbf{Z})/T) \otimes \mathbf{Z}_p$, $A_1, \ldots\ldots, A_m = H^*(X; \mathbf{Z}_p)$, telle que A_i s'obtienne à partir de A_{i-1} en remplaçant un facteur algèbre extérieure $E(m)$ par un produit $E(a) \otimes P(a+1; p)$ où $m = p \cdot a + p - 1$.*

Soit k le premier entier pour lequel la composante p-primaire $T_{k,p}$ de $H^k(X; \mathbf{Z})$ est non nulle. D'après la règle des coefficients universels, $H^k(X; \mathbf{Z}_p)$ et $H^{k-1}(X; \mathbf{Z}_p)$ contiennent des sous-espaces U_k, U_{k-1} isomorphes à $T_{k,p} \otimes \mathbf{Z}_p$ · Si X est simplement connexe, il résulte alors du théorème de structure des algèbres de Hopf que $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ possède un système de générateurs de type (M) contenant des bases de U_k, U_{k-1} et n'ayant en degrés $<k-1$ que des éléments de degré impair. On déduit alors immédiatement de la proposition précédente:

1. 6. COROLLAIRE. *Supposons X simplement connexe et $H^*(X; \mathbf{Z}_p)$ de type (p), p étant impair. Soit k le premier entier pour lequel la composante p-primaire de $H^k(X; \mathbf{Z})$ est non nulle. Alors $p \cdot k + p - 1 \leqq m_l$.*

Originellement, l'auteur avait déduit (2. 2), (2. 3) du Théor. V de [14], de (1. 3) et de l'inégalité

$$p \cdot k \leqq m_l + p - 1, \tag{1.7}$$

qui est un peu plus faible que 1. 6, mais dont il n'y a plus lieu de donner une démonstration directe, puisque le résultat de [1] est beaucoup plus précis. Dans la suite, nous n'utiliserons 1. 5 explicitement qu'à propos de $H^*(\mathbf{E}_8; \mathbf{Z}_5)$, où cela permet d'abréger les calculs.

2. Sur la torsion des groupes simplement connexes.

2. 1. Rappelons que l'on a

$$H^*(\mathbf{E}_i; \mathbf{Q}) = E(m_{i1} \ldots\ldots, m_{ii}) \qquad (i = 6, 7, 8)$$

et que les valeurs $(m_{i1}, \ldots\ldots, m_{ii})$ sont respectivement

$$(3, 9, 11, 15, 17, 23),\ (3, 11, 15, 19, 23, 27, 35),\ (3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59)$$

(voir par exemple [13]). D'après [14, Théor. V], on a

$$\pi_3(\mathbf{E}_i) \cong \pi_{m_{i2}}(\mathbf{E}_i) \cong \mathbf{Z}, \qquad \pi_j(\mathbf{E}_i) = 0 \ (j \leqq m_{i2},\ j \neq 3,\ m_{i2}\ ; i = 6, 7, 8).$$

Une application $f_i : \mathbf{E}_i \to K(\mathbf{Z}, 3)$ qui est un isomorphisme pour π_3 induit alors, d'après le théorème de J. H. C. Whitehead, [17, Chap III], un isomorphisme en cohomologie jusqu'au degré $m_{i2} - 1$ inclus.

2. 2. THÉORÈME. *Le groupe $\mathbf{E}_i$ n'a pas de p-torsion si $i = 6, 7$, $p = 5$ et $i = 7, 8$, $p = 7$.*

Prenons par exemple $i = 8$, $p = 7$. On a $H^j(\mathbf{E}_8; \mathbf{Z}_7) = H^j(K(\mathbf{Z}, 3); \mathbf{Z}_7)$ pour $j \leqq 14$. D'après H.Cartan [15, Exp.9], $H^*(K(\mathbf{Z}, 3); \mathbf{Z}_7) = E(3)$ jusqu'au degré 14, donc, si $\mathbf{E}_8$ a de la 7-torsion en dimension k, on doit avoir $k \geqq 16$; mais d'autre part, 1. 7 et 2. 1 donnent $7 \cdot k \leqq 65$, donc $\mathbf{E}_8$ n'a pas de 7-torsion.

On raisonne de même dans les trois autres cas.

2.3. THÉORÈME. *On a*

(1) $$H^*(\mathbf{E}_6;\mathbf{Z}_3)=\wedge(x_3,x_7,x_9,x_{11},x_{15},x_{17})\otimes\mathbf{Z}_3[x_8]/(x_8^3)$$

avec $d^0x_i=i$, $\beta_3(x_7)=x_8$, $\beta_3(x_i)=0$ $(i\neq 7)$

(2) $$H^*(\mathbf{E}_8;\mathbf{Z}_5)=\wedge(x_3,x_{11},x_{15},x_{23},x_{27},x_{35},x_{39},x_{47})\otimes\mathbf{Z}_5[x_{12}]/(x_{12}^5)$$

avec $d^0x_i=i$, $\beta_5(x_{11})=x_{12}$, $\beta_5(x_i)=0$ $(i\neq 11)$.

Ici β_p désigne le 1er opérateur de Bockstein, c'est à dire l'homomorphisme cobord associé à la suite de coefficients $0\to\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}_p\to 0$, suivi de la réduction mod p.

D'après [15] et (2.1), $H^*(\mathbf{E}_6;\mathbf{Z}_3)$ est isomorphe jusqu'au degré 8 inclus à

$$\wedge(x_3,x_7)\otimes\mathbf{Z}_3[x_8]\qquad(\beta(x_3)=\beta_3(x_8)=0;\ \beta_3(x_7)=x_8).$$

Le théorème 6.1 de [3] donne alors

$$H^*(\mathbf{E}_6;\mathbf{Z}_3)=\wedge(x_3,x_7)\otimes\mathbf{Z}_3[x_8]/(x_8{}^{3^c})\otimes E(a_1,\ldots\ldots,a_r)\otimes P(b_1,3^{c_1})\otimes\ldots\ldots\otimes P(b_s,3^{c_s}).$$

Vu 1.4 et ce qui vient d'être dit, on doit avoir

(3) $$r\geqq 4,\ a_i\geqq 9\ (i=1,\ldots,r);\ b_i\geqq 10 \text{ si } c_i\geqq 1.$$

Le produit des trois premiers facteurs du deuxième membre est donc non nul en un degré $t\geqq 46+(3^c-1)\cdot 8$. et $P(b,3^c)$ est non nul en dimension $(3^c-1)\cdot b$. On a donc

$$46+(3^c-1)\cdot 8+\sum_i(3^{c_i}-1)\cdot b_i\leqq\dim\mathbf{E}_6=78$$

d'où $c=1$, $c_i=0$, et le théorème résulte aussitôt de 1.3 et 2.1.

On voit de même que

$$H^*(\mathbf{E}_8;\mathbf{Z}_5)=\wedge(x_3,x_{11})\otimes\mathbf{Z}_5[x_{12}]/(x_{12}^{5^c})\otimes E(a_1,\ldots\ldots,a_r)\otimes P(b_1,5^{c_1})\otimes\ldots\ldots\otimes P(b_s,5^{c_s})$$

avec

$$\beta_5(x_3)=\beta_5(x_{12})=0,\quad\beta_5(x_{11})=x_{12},$$
$$r\geqq 6,\ a_i\geqq 15\ (i=1,\ldots,r);\ b_i\geqq 16 \text{ si } c_i\geqq 1.$$

On en tire

$$104+(5^c-1)\cdot 12+\sum_i(5^{c_i}-1)\cdot b_i\leqq\dim\mathbf{E}_8=248$$

d'où $c=1$, $c_i\leqq 1$; par suite $H^*(\mathbf{E}_8;\mathbf{Z}_5)$ est de type (5) et on peut appliquer (1.5). Vu (2.1), chacune des substitutions mentionnées dans la Prop. 1.5 fait apparaitre un générateur de degré $\leqq 11$. D'après qui a été dit plus haut, il ne peut y en avoir qu'une, celle qui remplace $E(59)$ par $E(11) \otimes P(12,5)$, et le théorème pour $\mathbf{E}_8$ est alors immédiat.

2.4. REMARQUE. Il est clair que l'algèbre d'homologie de $H^*(\mathbf{E}_6; \mathbf{Z}_3)$ par rapport à β_3 est isomorphe à $E(m_{61}, \cdots\cdots, m_{66})$, dans les notations de 2.1, c'est à dire au produit tensoriel par $\mathbf{Z}_3$ du quotient de $H^*(\mathbf{E}_6; \mathbf{Z})$ par son sous-groupe de torsion. On a une assertion analogue pour $\mathbf{E}_8$ et $p = 5$. Il s'ensuit donc, comme on sait, que les coefficients de torsion de $H^*(\mathbf{E}_6; \mathbf{Z})$ (resp. $H^*(\mathbf{E}_8; \mathbf{Z})$) ne sont pas divisibles par 9 (resp. 25). Un phénomène analogue a été observé par Araki [1] pour $\mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, $p = 3$. Joint aux résultats de [3, 5], cela vérifie l'assertion suivante:

Supposons G simple et simplement connexe. Alors aucun coefficient de torsion de $H^*(G; \mathbf{Z})$ n'est divisible par le carré d'un nombre premier p, sauf peut-être si $G = \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, $p = 2$.

Cela conduit évidemment à se demander s'il existe un H-espace à cohomologie entière de type fini, *simplement connexe*, ayant un coefficient de torsion divisible par un carré. L'auteur n'en connait pas d'exemple.

2.5. THÉORÊME *Supposons G simple et simplement connexe, et soit p un nombre premier. Alors G a de la p-torsion exactement dans les cas suivants: $p = 2$, $G = \mathbf{Spin}(n)$, $(n \geqq 7)$, $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$; $p = 3$, $G = \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$; $p = 5$, $G = \mathbf{E}_8$.*

Pour $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, cf.[3]; pour $\mathbf{Spin}(n)$, $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$, voir [5]. D'après (2.3) et [8], $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7$ n'ont pas de p-torsion pour $p \geqq 5$, et $\mathbf{E}_8$ est sans torsion pour $p \geqq 7$. D'autre part il résulte de (2.1) et des résultats de H.Cartan sur $K(\mathbf{Z}, 3)$ que les groupes $\mathbf{E}_i$ ont en fait de la p-torsion pour les valeurs indiquées dans 2.5, d'où le théorème[3)]

2.6. THÉORÈME. *Soient G simple et simplement connexe et p un nombre premier ne divisant pas les coefficients de la racine dominante, exprimée comme combinaison linéaire des racines simples. Alors G n'a pas de p-torsion.*

Les coefficients en question sont 1 pour $\mathbf{SU}(n)$, (1, 2) pour $\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{Spin}(n)$, (2, 3) pour $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$, (1, 2, 3) pour $\mathbf{E}_6$, (1, 2, 3, 4) pour $\mathbf{E}_7$ et (2, 3, 5, 6) pour $\mathbf{E}_8$ (voir par exemple J. de Siebenthal, Comm. Math. Helv. 25 (1951), pp. 210-256). 2.6 résulte donc de 2.5. On remarquera que la réciproque de 2.6 n'est en défaut que dans les cas $G = \mathbf{Sp}(n)$, $p = 2$, $G = \mathbf{G}_2$, $p = 3$.

---

3) L'existence de p-torsion dans les cas qu'énumère 2.5 résulte aussi de 4.4 et de [9, XII, 5.3]; pour les groupes exceptionnels, elle a également été vérifiée, de manière différente, par Oniščik, Mat. Sbornik 51 (1960), pp. 273-6

3. Sous-groupes commutatifs de G et torsion de $\pi_1(G)$.

3.1. PROPOSITION. *Soit $G = S\cdot H$ un groupe de Lie compact connexe engendré par un tore central S et par un sous-groupe invariant connexe fermé H. Alors G est homéomorphe au produit de H par un tore.*

En procédant par récurrence sur la dimension de S, on voit qu'il suffit de traiter le cas où S est un cercle. Il n'y a rien à démontrer si $S \subset H$. Sinon G est fibré principal de groupe structural H sur $G/H = S/S\cap H$ qui est aussi un cercle. Puisque le groupe structural est connexe, cette fibration est triviale, [19, Cor. 18. 6] et G est le produit de H par $S/S\cap H$.

3.2. COROLLAIRE. *Le groupe G est homéomorphe au produit de sa partie semi-simple G_{ss} par la composante neutre de son centre.*

Il résulte en particulier du corollaire que $\pi_1(G)$ ou $H^*(G;\mathbf{Z})$ est sans p-torsion si et seulement $\pi_1(G_{ss})$ ou $H^*(G_{ss};\ \mathbf{Z})$ est sans p-torsion.

3.3. LEMME. *Supposons G semi-simple. Soient G' un groupe de Lie compact connexe, $f: G'\to G$ un homomorphisme surjectif de noyau N fini, et p un nombre premier. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) $\pi_1(G)$ (*resp.* $H^*(G;\ \mathbf{Z})$) *est sans p-torsion.*

(b) (ord $N,p) = 1$ *et* $\pi_1(G')$ (*resp.* $H^*(G';\ \mathbf{Z})$) *est sans p-torsion.*

La suite d'homotopie de $G'/N = G$ donne la suite exacte de groupes commutatifs finis

$$0 \to \pi_1(G') \to \pi_1(G) \to \pi_0(N) \to 0,$$

d'où l'équivalence de (a) et (b) pour les groupes fondamentaux. Comme $\pi_1(G)$ est commutatif fini, on a

$$\text{Tors } \pi_1(G) = \text{Tors } H^2(G;\mathbf{Z})$$

et de même pour G'. D'autre part, si p ne divise pas l'ordre de N, G et G' sont simultanément avec ou sans p-torsion [5, Cor. 9. 3]; l'équivalence de (a) et (b) pour la cohomologie résulte immédiatement de là.

3.4. THÉORÈME. *Supposons G simplement connexe et soit σ un automorphisme de G. Alors l'ensemble F des points fixes de σ est connexe.*[4)]

Soient T un tore maximal de G, V son revêtement universel, $\pi: V\to T$ la projection canonique, $\Gamma = \pi^{-1}(e)$ et $D(G)$ le diagramme de G, c'est à dire

4) Par une démonstration assez semblable on peut montrer que l'ensemble des points fixes d'un automorphisme semi-simple d'un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe, est connexe. *Voir* une Note ultérieure de l'auteur.

l'image réciproque de l'ensemble des éléments de T qui sont singuliers dans G. Le diagramme est réunion d'un nombre fini de familles d'hyperplans parallèles. On sait que les adhérences des composantes connexes de $V - D(G)$ sont des polyèdres congruents, permutés, de manière simplement transitive, par le groupe $W^*(G)$ engendré par les symétries aux plans de $D(G)$. Le groupe $W^*(G)$ est engendré par le groupe de Weyl $W(G)$ de G et par les translations du réseau Γ, en particulier, chacun des polyèdres sus-mentionnés rencontre Γ en exactement un point. (Pour tout cela, *voir* par exemple [20].)

L'ensemble F est un sous-groupe fermé de G et nous devons montrer que $x \in F$ entraine $x \in F_0$. Supposons tout d'abord x *régulier* dans G, et soit T l'unique tore maximal le contenant. Il est clair, que, dans les notations précédentes, σ induit un automorphisme de V laissant $D(G)$ et Γ invariants, que nous noterons aussi σ. Soit Δ l'adhérence d'une composante connexe de $t - D(G)$ contenant l'origine et un point x^* de $\pi^{-1}(x)$; le point x étant régulier, x^* est intérieur à Δ; comme $\sigma(x) = x$, on a $\sigma(x^*) - x^* = \gamma \in \Gamma$; ce qui a été rappelé plus haut montre alors que $\Delta + \gamma = \sigma(\Delta)$; par conséquent $\sigma(\Delta)$ contient l'origine et γ, d'où $\gamma = 0$ et x^* est aussi fixe par σ. La droite joignant l'origine à x^* est alors laissée fixe point par point par σ, et son image par π est un groupe à un paramètre de F contenant x, donc $x \in F_0$.

Soit maintenant x singulier. La partie semi-simple de $Z(x)_0$ est alors $\neq (e)$, donc [18, Chap. II, §2], un tore maximal S de $Z(x) \cap F$ est de dimension $\geqq 1$. Soit U la composante neutre de $Z(S) \cap Z(x)$. Elle est invariante par σ. Comme x et S font partie d'un tore maximal (0. 3), U est de rang maximum et contient x et S dans son centre. Nous voulons maintenant montrer que U est un tore maximal de G. Si ce n'est pas le cas, alors la partie semi-simple U_{ss} de U est $\neq (e)$; elle est évidemment invariante par σ, donc [18, Chap. II, 2], $U_{ss} \cap F$ contient un tore S' de dimension $\geqq 1$; comme S est dans le centre de $U, S \cap S'$ est fini et $S \cdot S'$ est un tore de $Z(x) \cap F$, de dimension strictement plus grande que dim S, ce qui contredit l'hypothèse faite sur S.

Ainsi U est un tore maximal de G. Montrons que $x \cdot S$ contient un élément régulier de G. Nous écrivons T pour U et reprenons les notations du début de la démonstration. Soit M la composante neutre de $\pi^{-1}(S)$, et soit $x^* \in \pi^{-1}(x)$. Alors $x^* + M$ ne fait partie d'aucun plan de $D(G)$, car sinon, d'après la théorie des éléments singuliers $Z(x) \cap Z(S)$ serait de dimension au moins égale à dim $T + 2$, et U ne serait pas un tore. Il existe donc $s \in M$ tel que $y = x^* + s$ soit régulier. Alors $\pi(y) = x \cdot \pi(s)$ est un élément de F qui est régulier dans G. D'après ce qui a déjà été démontré, on a donc $\pi(y) \in F_0$, d'où aussi $x \in F_0$.

3. 5. COROLLAIRE. *Dans un groupe de Lie compact connexe dont le groupe fondamental est sans torsion, le centralisateur d'un élément quelconque* *est connexe.*

Un élément $x \in G$ peut s'écrire sous la forme $x = s \cdot h\,(s \in Z(G)_0;\ h \in G_{ss})$ et il est clair que $Z(x) = Z(G)_0 \cdot Z'(h)$, où $Z'(h)$ désigne le centralisateur de h dans G_{ss}. Vu 3. 2, G_{ss} est simplement connexe, donc, d'après 3. 4 appliqué à l'automorphisme intérieur défini par h, $Z'(h)$ est connexe, d'où le corollaire.

3. 6. LEMME. *Soient A, A' des groupes, $f: A' \to A$ un homomorphisme dont le noyau N est un sous-groupe fini du centre de A', H un sous-groupe commutatif fini de $f(A')$, d'ordre premier à* ord *N. Alors A' contient un sous-groupe H' que f applique isomorphiquement sur H.*

Soient p un diviseur premier de ord H, H_p la composante p-primaire de H et S_p un p-sous-groupe de Sylow de $f^{-1}(H_p)$. Comme ord N est premier à p, f applique S_p isomorphiquement sur H_p et $f^{-1}(H_p) = S_p \cdot N$. Il s'ensuit aussi que les p-sous-groupes de Sylow de $f^{-1}(H_p)$ sont conjugués par N. Mais ce dernier est central, donc S_p est invariant dans $f^{-1}(H_p)$, le groupe $f^{-1}(H_p)$ est commutatif et S_p en est la composante p-primaire. Comme H_p est central dans H, il en résulte aussi que S_p est central dans $f^{-1}(H)$. On prend alors pour H' le produit des groupes S_p, où p parcourt les diviseurs premiers de ord H.

3. 7. LEMME. *Soient K un groupe de Lie compact, $\pi: K \to K/K_0$ la projection canonique, et a un élément d'ordre une puissance d'un nombre premier p de K/K_0. Alors $\pi^{-1}(a)$ contient un élément dont l'ordre est une puissance (finie) de p.*

Soient $u \in \pi^{-1}(a)$ et U le plus petit sous-groupe fermé de K contenant u. Evidemment, $\pi(U) = U\,/\,(U \cap K_0)$ est engendré par a. Le groupe U est compact commutatif, donc est le produit direct d'un groupe fini M par U_0, et il est clair que $\pi^{-1}(a) \cap M$ contient un élément d'ordre une puissance de p.

3. 8. THÉORÈME. *Soit p un nombre premier ne divisant pas l'ordre de* Tors $\pi_1(G)$. *Alors*

(a) *Pour tout $g \in G$, l'ordre de $Z(g)\,/\,Z(g)_0$ est premier à p.*

(b) *Si G est semi-simple et si F est le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme de G, l'ordre de F/F_0 est premier à p.*

(a) On a $g = s \cdot h$, $(s \in S = Z(G)_0,\ h \in G_{ss})$, donc $Z(g) = S \cdot Z'(h)$, où $Z'(h)$ désigne le centralisateur de h dans G_{ss}. Evidemment, $Z(g)_0 = S \cdot Z'(h)_0$; comme $S \cap G_{ss}$ fait partie de $Z'(h)_0$, vu 0. 3, il s'ensuit que $Z(g)/Z(g)_0 \cong Z'(h)/Z'(h)_0$. Compte tenu de 3. 2, on voit que l'on est ramené à (b).

(b) Il suffit, vu 3. 7, de faire voir que si x est un élément de F dont l'ordre m est une puissance de p, alors $x \in F_0$.

Soient G' le revêtement universel de $G, \pi: G' \to G$ la projection canonique et N le noyau de π. L'automorphisme σ induit un automorphisme σ' de G', dont l'ensemble des points fixes sera noté F', et l'on a $\pi\circ\sigma' = \sigma\circ\pi$. Comme p est premier à l'ordre de $\pi_1(G)$, il ne divise pas l'ordre de N (3. 3) donc (3. 6), $\pi^{-1}(x)$ contient un élément x' d'ordre m. On a

$$\sigma'(x') = x'\cdot y \qquad (y \in N)$$

d'où, si q est l'ordre de y, $\sigma(x'^q) = x'^q$. Par conséquent, x'^q est dans F'; mais F' est connexe d'après 3.4, donc $x^q \in F_0$; comme q est premier à m, il s'ensuit que $x \in F_0$.

3. 9. COROLLAIRE. *Soit H un sous-groupe compact commutatif de G, tel que l'ordre de H/H_0 soit premier à l'ordre de* Tors $\pi_1(G)$. *Alors H fait partie d'un tore de G dans chacun des deux cas suivants*: (a) *H contient un élément régulier de G,* (b) *H/H_0 est engendré par deux éléments.*

Soient dans le cas (a), x un élément de H régulier dans G et, dans le cas (b), x, y des éléments de H dont les images dans H/H_0 engendrent ce groupe. $Z(x)$ contient H, et $H/(Z(x)_0 \cap H)$ est un quotient de H/H_0, donc est d'ordre premier à l'ordre de Tors $\pi_1(G)$. Mais un nombre premier p ne peut diviser l'ordre de $Z(x)/Z(x)_0$ que si $\pi_1(G)$ a de la p-torsion d'après 3. 8, donc $H \subset Z(x)_0$. Dans le cas (a), $Z(x)_0$ est un tore; dans le cas (b), on a $y, H_0 \in Z(x)_0$, et y centralise H_0. D'après 0. 3, $Z(x)_0$ possède un tore maximal T qui contient y, H_0 et x. Alors $T \supset H$.

3. 10. LEMME. (a) *Soient G' un groupe de Lie compact connexe, $\pi: G' \rightarrow G$ un homomorphisme surjectif de noyau N fini, et H (resp. H') un sous-groupe de G (resp. G'). Si H (resp. H') n'est pas contenu dans un tore de G (resp. G'), alors $\pi^{-1}(H)$ (resp. $\pi(H')$) n'est pas contenu dans un tore de G' (resp. G).*

(b) *Soient G_1, G_2 des sous-groupes invariants connexes fermés de G, d'intersection finie, tels que $G = G_1 \cdot G_2$, et soit H_1 un sous-groupe de G_1. Si H_1 ne fait pas partie d'un tore de G_1, il n'est contenu dans aucun tore de G.*

L'assertion (a) est conséquence de (0. 2).

Dans le cas (b), il suffit de remarquer que si T est un tore maximal de G, alors $T = (T \cap G_1)\cdot(T \cap G_2)$ et $T \cap G_i$ est un tore maximal de $G_i\,(i = 1,2)$ [12].

3. 11. LEMME. *Supposons G semi-simple, simplement connexe. Soient p un nombre premier, z un élément d'ordre p du centre de G. Alors il existe des éléments u, $v \in G$ tels que $u\cdot v\cdot u^{-1}\cdot v^{-1} = z$ et qui sont d'ordre p si p est impair, de carré égal à z si $p = 2$.*

Soient $G_1,\ldots\ldots,G_s$ les facteurs simples de G. Si le lemme est vrai pour les

G_i il l'est pour G. En effet, si l'on pose $z = (z_1, \ldots\ldots, z_s)$, alors z_i est un élément d'ordre p du centre de G_i ou l'identité. On prend $u_i, v_i \in G_i$ vérifiant le lemme dans le premier cas, égaux à l'identité dans le second cas, et alors $u = (u_1, \ldots\ldots, u_s)$, $v = (v_1, \ldots\ldots, v_s)$ vérifient le lemme pour G et z. Nous pouvons donc supposer G simple. D'après la classification (0.4) on a les possibilités suivantes

(a) p impair : $G = \mathbf{SU}(p.q)$, et en outre, pour $p = 3$, $G = \mathbf{E}_6$

(b) $p = 2 : G = \mathbf{SU}(2 \cdot q)$, $\mathbf{Spin}(n)$, $\mathbf{Sp}(n)$, $\mathbf{E}_7$.

Soit p impair, $G = \mathbf{SU}(p \cdot q)$. Alors $z = \sigma \cdot \mathrm{Id}$ où σ est une racine p-ième de l'unité et il suffit évidemment de considérer le cas où $q = 1$. Si $e_1, \ldots\ldots, e_p$ est la base canonique de $\mathbf{C}^p$, on prend pour u et v les transformations linéaires définies par

$$u : e_i \to \sigma^i e_i, \qquad v : e_1 \to e_2 \to \ldots \to e_p \to e_1. \tag{1}$$

Soit $p = 3$, $G = \mathbf{E}_6$. Le centre de G est d'ordre 3. Il résulte de [12, p. 219 et Remarque II, p. 220] que G contient un sous-groupe $H = H^*/N$ avec $H^* = \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3)$, $N = \mathbf{Z}_3$. Le centre de H^* est isomorphe à $\mathbf{Z}_3^3$, et son image dans $\mathbf{E}_6$ contient le centre de $\mathbf{E}_6$. Le lemme dans ce cas résulte donc de ce qui a été démontré plus haut.

Dorénavant $p = 2$. Si $G = \mathbf{SU}(2n)$, alors $z = -\mathrm{Id}$, on peut se borner au cas $n = 1$, dans lequel on prend

$$u = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $G = \mathbf{Sp}(n)$, on a encore $z = -\mathrm{Id}$, et l'on se ramène au cas précédent en considérant l'inclusion évidente de $\mathbf{Sp}(1) \times \ldots\ldots \times \mathbf{Sp}(1)$ (n facteurs) dans $\mathbf{Sp}(n)$.

Soit $G = \mathbf{E}_7$. Alors G contient un sous-groupe $H = H'/N$, avec $N = \mathbf{Z}_3$, $H' = \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(6)$, [12, p. 219, et Rem. II, p. 220]. Le centre de H' est isomorphe à $\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_6$ et son élément d'ordre deux s'envoie sur l'élément d'ordre deux du centre de G. On est donc ramené aux cas déjà traités.

Il reste à considérer $G = \mathbf{Spin}(n)$, $(n \geqq 3)$. Soit C_n l'algèbre de Clifford de $\mathbf{R}^n$, muni de la forme quadratique unité, et soit $e_1, \ldots\ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. On a donc

$$e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = 2 \cdot \delta_{ij},$$

le produit étant celui de C_n. Le groupe $\mathbf{Spin}(n)$ s'identifie au groupe des éléments pairs inversibles $x \in C_n$ pour lesquels $x \cdot \mathbf{R}^n \cdot x^{-1} = \mathbf{R}^n$. Il contient en particulier ± 1, et les produits $e_i \cdot e_j$ $(1 \leqq i,j \leqq n)$ (cf. par exemple [16, Chap.II]).

Soit tout d'abord $n = 2m + 1$ (resp. $n = 4m + 2$). Le centre de G est alors isomorphe à $\mathbf{Z}_2$ (resp. $\mathbf{Z}_4$) et l'on a nécessairement $z = -1$. On pose alors

$$u = e_1 \cdot e_2, \qquad v = e_2 \cdot e_3.$$

Soit $n = 4m$. Le centre de G est isomorphe à $(\mathbf{Z}_2)^2$ et est formé des éléments $\pm 1, \pm(e_1 \cdot e_2 \cdot \ldots \cdot e_n)$. Si $m = 1$, alors $G \cong \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2)$, cas déjà traité. Le cas $m \geqq 1$ s'y ramène si l'on remarque que la répartition des vecteurs e_i en blocs de quatre $(e_{4k+1}, e_{4k+2}, e_{4k+3}, e_{4k+4})$ $(k = 0, \ldots\ldots, m-1)$ donne lieu à un homomorphisme de $\mathbf{Spin}(4) \times \ldots\ldots \times \mathbf{Spin}(4)$ (m facteurs) dans $\mathbf{Spin}(4m)$, appliquant le centre sur un sous-groupe contenant le centre.

3.12. THÉORÈME. *Soit p un nombre premier. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*:
(a) *$\pi_1(G)$ n'a pas de p-torsion,*
(b) *tout sous-groupe H isomorphe à $\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_p$ de G est contenu dans un tore.*

L'implication (a) $\rightarrow$ (b) est un cas particulier de 3.9. Il reste donc à montrer que si $\pi_1(G)$ a de la p-torsion, alors G possède un sous-groupe $H \cong \mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_p$ qui ne fait partie d'aucun tore de G: vu (3.2) et (3.10(b)), il suffit de le faire lorsque G est semi-simple. Soient G' le revêtement universel de G et N le noyau de la projection canonique π: $G' \rightarrow G$. Le groupe N est isomorphe à $\pi_1(G)$, donc contient un sous-groupe $M \cong \mathbf{Z}_p$. Vu 3.10 (a), il suffit de considérer le cas $G = G'/M$. Supposons donc que $N \cong \mathbf{Z}_p$. Soit z un générateur de N. Alors (3.11) il existe $u, v \in G'$ tels que $u \cdot v \cdot u^{-1} \cdot v^{-1} = z$, et que $u^p = v^p = e$ si p est impair, $u^p = v^p = z$ si $p = 2$. Les éléments u, v engendrent un sous-groupe H' d'ordre p^3 de G' contenant N, et dont l'image $H = H'/N$ dans G est isomorphe à $\mathbf{Z}_p + \mathbf{Z}_p$. Le sous-groupe H' n'est pas commutatif, donc ne peut faire partie d'un tore de G'. Par conséquent, (3.10 (a)) H n'est pas contenu dans un tore de G.

4. $[p]$-sous-groupes et p-torsion de G.

4.1. Soient U un sous-groupe fermé de G, A un anneau de coefficients. Par définition, $H^*(G/U; A)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique si G/U est totalement non homologue à zéro, relativement à A, dans la fibration universelle $(B_U, B_G, G/U)$. Dans ce cas, G/U est totalement non homologue à zéro, relativement à A, dans toute fibration $(E/U, B, G/U, \pi)$ ou (E, B, G, π) est une fibration principale, de groupe structural G [3, Cor. à la Prop. 18.3].

4.2. PROPOSITION. *Soient T un tore maximal de G et p un nombre premier. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *B_G est sans p-torsion,*

(*b*) *$H^*(G/T; \mathbf{Z}_p)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique.*

G/T est sans torsion et ses nombres de Betti en dimensions impaires sont nuls (0.3). Si B_G est sans p-torsion, alors $H^i(B_G; \mathbf{Z}_p)$ est aussi nul pour i impair

[3, Théor. 19. 1], donc la suite spectrale de $(B_T, B_G, G/T)$ a son terme E_2 nul en degrés impairs, et est triviale, ce qui montre que (a) $\to$ (b). Réciproquement, si (b) est vraie, cette suite spectrale est triviale, et $\rho(T, G)^* : H^*(B_G; \mathbf{Z}_p) \to H^*(B_T; \mathbf{Z}_p)$ est injectif, donc $H^*(B_G; \mathbf{Z}_p)$ est nul en dimensions impaires et B_G n'a pas de p-torsion.

REMARQUE. Si G est simplement connexe, ces deux conditions sont aussi équivalentes à la suivante [8, Prop. 5. 5]:

(c) $H^*(G/T; \mathbf{Z}_p)$ est engendrée, comme algèbre, par 1 et $H^2(G/T; \mathbf{Z}_p)$.

4. 3. LEMME. *Soient U un sous-groupe fermé connexe de G qui soit la composante neutre du centralisateur d'un élément $a \in G$, et H un sous-groupe de U qui ne fasse partie d'aucun tore de U. Alors le sous-groupe engendré par a et H n'est pas contenu dans un tore de G.*

En effet, un tore contenant a et H ferait partie de la composante neutre du centralisateur de a.

4. 4. PROPOSITION. *Supposons G simple et simplement connexe et soit p un nombre premier. Alors G possède un sous-groupe $H \cong (\mathbf{Z}_p)^3$ ne faisant partie d'aucun tore de G dans chacun des cas suivants*: $p = 2$, $G = \mathbf{Spin}(n)$ $(n \geqq 7)$, $\mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$; $p = 3$, $G = \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$; $p = 5$, $G = \mathbf{E}_8$.

Soit $G = \mathbf{Spin}(n)$, $(n \geqq 7)$, $p = 2$. On reprend les notations de la démonstration de 3. 11 dans le cas de $\mathbf{Spin}(n)$. Soit H le sous-groupe de G engendré par les produits $(e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4)$, $(e_1 \cdot e_2 \cdot e_5 \cdot e_6)$ et $(e_1 \cdot e_3 \cdot e_5 \cdot e_7)$. Il est visiblement isomorphe à $(\mathbf{Z}_2)^3$.

L'image de e_i dans le groupe orthogonal *complet* $\mathbf{O}(n)$ (par la représentation χ de [16]) est la symétrie au plan $x_i = 0$. On en déduit immédiatement que le centralisateur connexe de l'image $\chi(H)$ de H dans $\mathbf{SO}(n)$ par la représentation canonique $\chi : \mathbf{Spin}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ s'identifie à $\mathbf{SO}(n-7)$. Comme le rang de $\mathbf{SO}(n-7)$ est strictement plus petit que celui de $\mathbf{SO}(n)$, cela montre que $\chi(H)$ n'est pas contenu dans un tore maximal de $\mathbf{SO}(n)$, donc (3. 10 (a)), H ne fait pas partie d'un tore de G.

Soit $p = 2$, $G = \mathbf{G}_2$. D'après [12, p. 219, Rem. II. p. 220], $\mathbf{G}_2$ contient un sous-groupe $U \cong (\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(2))/N$ qui est le centralisateur d'un élément a d'ordre deux. Il s'ensuit que N est d'ordre deux, donc (3. 11) que U contient un sous-groupe $H' = (\mathbf{Z}_2)^2$ ne faisant partie d'aucun tore de U. Vu (0. 3), $a \notin H'$, donc a et H' engendrent un sous-groupe $H \cong (\mathbf{Z}_2)^3$ qui (4.3) n'est pas contenu dans un tore de G; (pour une autre description d'un tel sous-groupe, voir [10, §17; 11]).

On voit de même, à l'aide des inclusions $(\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{Sp}(3))/N \subset \mathbf{F}_4$, $(\mathbf{Spin}(16)/N) \subset \mathbf{E}_8$ et $(\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(6))/N \subset \mathbf{E}_6$ que $\mathbf{F}_4, \mathbf{E}_8$ et le quotient Ad $\mathbf{E}_6$

de $\mathbf{E}_6$ par son centre contiennent un sous-groupe $H \cong (\mathbf{Z}_2)^3$ ne faisant partie d'aucun tore. Comme le centre de $\mathbf{E}_6$ est d'ordre trois, il en est alors de même pour $\mathbf{E}_6$ vu 3. 10, 3. 6.

$\mathbf{E}_7$ contient un sous-groupe $U \cong (\mathbf{E}_6 \times T^1)/N$, et U est le centralisateur dans $\mathbf{E}_7$ de la composante neutre S de son centre, qui est de dimension 1. Soit H un sous-groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}_2)^3$ de sa partie semi-simple U_{ss}, non contenu dans un tore de cette dernière, dont l'existence vient d'être démontrée. H ne fait partie d'aucun tore de G. Sinon en effet, $Z(H)_0$ contiendrait H dans son centre, et S, donc (0. 3), S et H feraient partie d'un même tore T; on aurait alors $T \subset Z(S) = U$, ce qui contredirait 3.10 (b).

Dans les cas $p = 3$, $G = \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, $p = 5$, $G = \mathbf{E}_8$, on raisonne comme plus haut à partir des inclusions [12, p. 219]:

$$(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3))/N \subset \mathbf{F}_4, \ (\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(6))/N \subset \mathbf{E}_7, (\mathrm{SU}(3) \times \mathbf{E}_6)/N \subset \mathbf{E}_8,$$
$$(\mathrm{SU}(5) \times \mathrm{SU}(5))/N \subset \mathbf{E}_8.$$

Soit enfin $p=3$, $G=\mathbf{E}_6$. Alors G contient $U \cong (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/N$ et $N = \mathbf{Z}_3$, $Z(U) = (\mathbf{Z}_3)^2$ [12, p. 219, Rem. II, p. 220]. D'après (3. 12), U possède un sous-groupe $H' = (\mathbf{Z}_3)^2$ non contenu dans un tore de U, par suite, vu (0.3), $H' \cap Z(U) = (e)$. Soit $a \in Z(U)$, $a \notin Z(G)$, ce qui existe puisque le centre de G est d'ordre 3. Alors a et H' engendrent un sous-groupe $H = (\mathbf{Z}_3)^3$. D'autre part, comme U est un sous-groupe connexe maximal [12], $U = Z(a)_0$, donc, (4. 3), H ne fait partie d'aucun tore de G.

4. 5. THÉORÈME. *Soit p un nombre premier. Alors les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:
(1) *G est sans p-torsion*;
(2) *B_G est sans p-torsion*;
(3) *tout $[p]$-sous-groupe est contenu dans un tore*;
(4) *tout $[p]$-sous-groupe de rang $\leqq 3$ est contenu dans un tore.*

(1) → (2) d'après [8, 5. 1]. (2) → (3) d'après [9, XII, 5. 4] et (4.2). (3) entraine évidemment (4).

Pour terminer, il suffira de prouver que (4) → (1) et pour cela de faire voir: (*) Si G a de la p-torsion, alors G contient un $[p]$-groupe de rang $\leqq 3$ ne faisant partie d'aucun tore. Vu (3. 2) et (3. 10(b)), on peut supposer G semi-simple. Si $\pi_1(G)$ a de la p-torsion, (*) résulte de 3. 12. Supposons donc $(\mathrm{ord}\, \pi_1(G), p) = 1$ et soit G' le revêtement universel de G. Alors, (3. 3), G' a de la p-torsion, et vu 3. 10, il suffit de montrer (*) pour G'. On peut donc se borner à G simplement connexe, donc aussi (3. 10) à G simple et simplement connexe. Notre assertion résulte alors de (2. 5) et (4. 4).

4. 6. REMARQUE. Les implications (1) → (2) → (3) ont été établies ici par des raisonnements *a priori*. C'est la démonstration de (4) $\rightarrow$ (1) qui repose sur des vérifications. Nous ne savons pas non plus démontrer (3) $\rightarrow$ (1) ou (2) $\rightarrow$ (1) sans passer par ces vérifications. Nous avons aussi utilisé les $[p]$-sous-groupes pour voir que $H^*(B_G; \mathbf{Z})$ a de la p-torsion lorsque $p = 2, 3$, $G = \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$, $p = 5$, $G = \mathbf{E}_8$. Pour $p = 3$, cela résulte également de la détermination partielle de $H^*(B_G; \mathbf{Z}_3)$ $(G = \mathbf{F}_4, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8)$ faite par Araki, "On the non-commutativity of Pontrjagin rings mod 3 of some compact exceptional groups", (à paraître).

5. Sous-groupes commutatifs et p-torsion de G.

5.1. PROPOSITION. *Soit U un sous-groupe fermé connexe de rang maximum de G, et soit p un nombre premier. Si G est sans p-torsion, alors U et G/U sont sans p-torsion.*

Si U est sans p-torsion, il en est de même pour G/U ([3, Prop. 30. 1], compte tenu du fait que G/T et U/T sont sans torsion [6, 13]). Supposons maintenant G et G/U sans p-torsion. Alors B_G est sans p-torsion [8, Prop. 5.1], donc la fibre et la base de la fibration universelle $(B_U, B_G, G/U)$ ont des nombres de Betti mod p nuls en dimensions impaires; il en est alors de même pour B_U, donc B_U est sans p-torsion et (4.5) U est sans p-torsion.

Il suffira donc de prouver que si G est sans p-torsion, alors U ou G/U est sans p-torsion. On procède par récurrence sur $\dim G$. Le sous-groupe U contient $Z(G)_0$, on a $G/U = G_{ss}/(U \cap G_{ss})$ et $U \cap G_{ss}$ a même rang que G_{ss} (0. 3); compte tenu de (3. 2), on peut donc supposer G semi-simple. Soient G' son revêtement universel et U' l'image réciproque de U dans G'. On a $G'/U' = G/U$, le sous-groupe U' est connexe (0. 3) et G' est sans p-torsion (3. 3). Comme U' est le produit de ses intersections avec les facteurs simples de G' [12] on est ramené au cas où G est simple, simplement connexe.

Supposons de plus U connexe maximal. S'il n'est pas semi-simple, il est nécessairement égal au centralisateur de la composante neutre de son centre, et G/U est sans torsion (0. 3). Soit donc U semi-simple. Toutes les inclusions de ce type sont énumérées dans [12, p. 219]. De plus, (0. 4) et la remarque II de [12, p. 220] permettent de calculer $\pi_1(U)$. On vérifie alors, à l'aide de (2. 5) et (3 .3) que U est sans p-torsion si G est sans p-torsion.

Supposons enfin que U ne soit pas connexe maximal dans G et soit V un sous-groupe propre connexe maximal le contenant. Alors V est sans p-torsion, d'après ce qui vient d'être dit, et U est sans p-torsion d'après l'hypothèse d'induction appliquée à l'inclusion $U \subset V$.

5.2. THÉORÈME. *Soit H un sous-groupe compact commutatif de G. Sup-*

posons que pour tout diviseur premier p de $ord(H/H_0)$, le groupe G soit sans p-torsion. Alors H est contenu dans un tore de G.

Démonstration par récurrence sur $\dim G$. Si H est central, il fait partie de tout tore maximal de G (0. 3). Supposons donc que $H \not\subset Z(G)$ et soit x un élément de H non contenu dans le centre de G. On a $H \subset Z(x)$ et $H/(Z(x)_0 \cap H)$ est un quotient de H/H_0. Vu l'hypothèse, l'ordre de $H/(Z(x)_0 \cap H)$ est donc premier à celui de Tors $\pi_1(G)$, et 3. 8 montre que $H \subset Z(x)_0$. Le sous-groupe $Z(x)_0$ est de rang maximum (0. 3). Vu 5.1 et l'hypothèse d'induction, H fait partie d'un tore de $Z(x)$.

REMARQUE. La démonstration précédente n'utilise pas le Théor. 5. 3 de [9,XII] affirmant que si G est sans p-torsion, tout $[p]$-sous-groupe est contenu dans un tore, qu'elle établit donc à nouveau. Cependant, elle a l'inconvénient de s'appuyer sur 5. 1, qui a été vérifié à l'aide de la classification.

6. Les $[p]$-sous-groupes maximaux de quelques groupes de Lie.

Dans ce paragraphe, nous considérons exclusivement la cohomologie mod 2, *et omettons les coefficients.* $\mathbf{P}_n$ *désigne l'espace projectif réel de dimension* n, S_n *la sphère de dimension* n.

6. 1. Rappelons que si $G = \mathbf{G}_2, \mathbf{F}_4$, $\mathbf{Spin}(n)$, $(n = 7, 8, 9)$, alors $H^*(B_G)$ est une algèbre de polynomes à générateurs de degrés respectifs

$$(4, 6, 7),\ (4, 6, 7, 16, 24),\ (4, 6, 7, 8),\ (4, 6, 7, 8. 8),\ (4, 6, 7, 8, 16)$$

(voir [5]). Si $G = \mathbf{G}_2$, les [2]-sous-groupes maximaux sont de rang 3, conjugués par automorphismes intérieurs [10, §17], et si Q est l'un d'eux, $H^*(G/Q)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique [4, §13]. Le théorème 6.2 montrera qu'il en est de même dans les autres cas. Si l'on tient compte des résultats de [3, 4], on voit que (6. 2) vaut dans tous les cas connus où $H^*(B_G)$ est une algèbre de polynomes. Dans ces cas, on a donc la "formule de Hirsch mod 2" (6. 2(1)) et l'analogie de [4] entre tores maximaux en cohomologie réelle et [2]-sous-groupes maximaux en cohomologie mod 2.

6. 2. THÉORÈME. *Soit* $G = \mathbf{Spin}(n)$ $(n = 7, 8, 9)$, $\mathbf{F}_4$. *Alors les* [2]*-sous-groupes maximaux de G sont conjugués par automorphismes intérieurs et sont de rangs respectifs* 4, 5, 5, 5. *Si Q est l'un deux, $H^*(G/Q)$ est égale à son algèbre caractéristique, par conséquent* [2, §4]: $\rho(Q,G)^*: H^*(B_G) \to H^*(B_Q)$ *est injectif, $H^*(G/Q)$ s'identifie au quotient de $H^*(B_Q)$ par l'idéal engendré par les éléments de degré > 0 de l'image de $\rho(Q, G)^*$ et*

(1) $$P_2(G/Q,t) = (1-t)^{-r}/P_2(B_G,t) \qquad (r = \text{rang de } Q).$$

On a la fibration $\mathbf{Spin}(7)/\mathbf{G}_2 = \mathrm{S}_7$ (voir [2]). Le centre M de $\mathbf{Spin}(7)$ est d'ordre deux, non contenu dans $\mathbf{G}_2$, donc $\mathbf{Spin}(n)$ contient un sous-groupe $V \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{G}_2$. La fibration $\mathbf{Spin}(7)/\mathbf{G}_2 = \mathrm{S}_7$ est définie par l'intermédiaire de la représentation des spineurs [2], donc l'élément $z \neq e$ de M agit par l'involution antipodique sur S_7, et $\mathbf{Spin}(7)/V = \mathrm{S}_7/M = \mathbf{P}_7$ On peut évidemment identifier B_V au produit $B_M \times B_{G_2}$, donc

$$P_2(B_V,t) = P_2(B_{\mathbf{G}_2},t)\cdot(1-t)^{-1}.$$

Comme $P_2(\mathbf{P}_7,t) = (1-t^8)\cdot(1-t)^{-1}$, on déduit de (6. 1) que

$$P_2(B_V,t) = P_2(\mathbf{P}_7,t)\cdot P_2(B_{\mathbf{Spin}(7)},t),$$

par conséquent [4, Prop. 2. 1], $\mathbf{P}_7$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration universelle $(B_V, B_{\mathbf{Spin}(7)}, \mathbf{P}_7)$. Le théor. 5. 2 de [9, XII] montre alors que tout [2]-sous-groupe de $\mathbf{Spin}(7)$ est conjugué à un sous-groupe de V. Mais $V = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{G}_2$ donc, vu (6. 1), ses [2]-sous-groupes maximaux sont de rang 4, et conjugués par automorphismes intérieurs. Il en est alors de même dans $\mathbf{Spin}(7)$.

Soit Q un [2]-sous-groupe maximal de $\mathbf{Spin}(7)$, contenu dans V. On a $Q = M \times Q'$, où Q' est un [2]-sous-groupe maximal de $\mathbf{G}_2$. Comme $\mathbf{G}_2/Q'$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration $(B_{Q'}, B_{\mathbf{G}_2}, \mathbf{G}_2/Q')$, il est immédiat que $(\mathbf{G}_2 \times M)/Q = \mathbf{G}_2/Q'$ est aussi totalement non homologue à zéro dans la fibration $(B_Q, B_V, V/Q)$; par suite (4. 1), V/Q est aussi totalement non homologue à zéro dans la fibration $(\mathbf{Spin}(7)/Q, \mathbf{P}_7, V/Q)$, d'où

$$P_2(\mathbf{Spin}(7)/Q,t) = P_2(\mathbf{P}_7,t)\cdot \mathbf{P}_2(\mathbf{G}_2/Q',t);$$

mais on a [4, §13]:

$$P_2(\mathbf{G}_2/Q',t) = (1-t^4)\cdot(1-t^6)\cdot(1-t^7)\cdot(1-t)^{-3}$$

d'où, vu (6. 1),

$$P_2(B_Q,t) = P_2(B_{\mathbf{Spin}(7)},t)\cdot P_2(\mathbf{Spin}(7)/Q,t)$$

ce qui, compte tenu de [4, Prop. 2. 1], entraine finalement que $\mathbf{Spin}(7)/Q$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration $(B_Q, B_{\mathbf{Spin}(7)}, \mathbf{Spin}(7)/Q)$, autrement dit que $H^*(\mathbf{Spin}(7)/Q)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique.

La fibration classique $\mathrm{SO}(8)/\mathrm{SO}(7) = \mathrm{S}_7$ donne lieu à la fibration $\mathbf{Spin}(8)/\mathbf{Spin}(7) = \mathrm{S}_7$. Le centre de $\mathbf{Spin}(8)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}_2)^2$; il contient un élément z induisant l'involution antipodique de S_7, et z ne fait évidemment pas partie de $\mathbf{Spin}(7)$, qui a un point fixe sur S_7. Le groupe $\mathbf{Spin}(8)$ contient donc un sous-groupe $V = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Spin}(7)$ tel que $\mathbf{Spin}(8)/V = \mathbf{P}_7$.

D'après [2], on a une fibration $\mathbf{Spin}(9)/\mathbf{Spin}(7) = \mathrm{S}_{15}$, définie par la représentation des spineurs. Le centre de $\mathbf{Spin}(9)$ contient alors un élément z induisant l'involution antipodique, donc ne faisant pas partie de $\mathbf{Spin}(7)$, d'où une inclusion $V \subset \mathbf{Spin}(9)$, avec $V \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Spin}(7)$ et $\mathbf{Spin}(9)/V = \mathbf{P}_{15}$.

Cela étant, la démonstration de (6. 2) pour $G = \mathbf{Spin}(8)$, $\mathbf{Spin}(9)$ est tout à fait analogue à celle donnée pour $G = \mathbf{Spin}(7)$, et est laissée au lecteur.

Dans le cas où $G = \mathbf{F}_4$, nous partons de la fibration $\mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9) = \mathbf{W}$, où $\mathbf{W}$ est le plan projectif des octaves [2]. D'après [9, XII, 4. 2], tout [2]-groupe d'homéomorphismes de $\mathbf{W}$ admet un point fixe; cela entraine en particulier que tout [2]-sous-groupe de $\mathbf{F}_4$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathbf{Spin}(9)$, d'où la première assertion de (6.2) pour $\mathbf{F}_4$.

Soit alors Q un [2]-sous-groupe maximal de $\mathbf{F}_4$ contenu dans $\mathbf{Spin}(9)$. D'après ce qui a été dit plus haut, $H^*(\mathbf{Spin}(9)/Q)$ est égale à sa sous-algèbre caractéristique donc, (4. 1), $\mathbf{Spin}(9)/Q$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration $(\mathbf{F}_4/Q, \mathbf{W}, \mathbf{Spin}(9)/Q)$ et l'on a

$$P_2(\mathbf{F}_4/Q, t) = P_2(\mathbf{W}, t) \cdot P_2(\mathbf{Spin}(9)/Q, t)$$

$$P_2(\mathbf{F}_4/Q, t) = (1 - t^{24})(1 - t^8)^{-1} \cdot (1-t)^{-5}/P_2(B_{\mathbf{Spin}(9)}, t),$$

ce qui, vu (6. 1), donne

$$(1 - t)^{-5} = P_2(B_{\mathbf{F}_4}, t) \cdot P_2(\mathbf{F}_4/Q, t).$$

Par conséquent [4, Prop. 2. 1], $\mathbf{F}_4/Q$ est totalement non homologue à zéro dans la fibration universelle $(B_Q, B_{\mathbf{F}_4}, \mathbf{F}_4/Q)$.

La suite de ce paragraphe est consacrée à quelques exemples de $[p]$-sous-groupes maximaux non conjugués.

6. 3. *Les [2]-sous-groupes de* $\mathbf{Spin}(10)$. Soit $Q(n)$ le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathbf{O}(n)$. On sait que les [2]-sous-groupes de $\mathbf{O}(n)$ et de $\mathbf{SO}(n)$ sont conjugués à des sous-groupes de $Q(n)$ et $SQ(n) = \mathbf{SO}(n) \cap \mathbf{Q}(n)$ respectivement. D'autre part le centralisateur d'un [2]-sous-groupe de $\mathbf{SO}(n)$ ou de $\mathbf{O}(n)$ est un produit de groupes orthogonaux et de groupes à deux éléments, donc ses [2]-sous-groupes maximaux sont aussi conjugués. Il s'ensuit aisément que si deux sous-groupes de $SQ(n)$ sont conjugués par un automorphisme intérieur de $\mathbf{SO}(n)$, ils sont aussi conjugués par un automorphisme intérieur laissant $SQ(n)$ invariant.

Soit $\pi : \mathbf{Spin}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ la projection canonique et soit $Q' = \pi^{-1}(SQ(n))$. Comme tout [2]-sous-groupe maximal de $\mathbf{Spin}(n)$ contient le noyau de π, les faits rappelés dans l'alinéa précédent entrainent évidemment que tout [2]-sous-groupe de $\mathbf{Spin}(n)$ est conjugué à un [2]-sous-groupe de Q' ,que les [2]-sous-groupes maximaux de Q' sont des [2]-sous-groupes maximaux de $\mathbf{Spin}(n)$ et enfin que deux [2]-sous-groupes maximaux de Q' conjugués dans $\mathbf{Spin}(n)$ sont aussi conjugués par un élément du normalisateur de Q'.

Dans les notations de la démonstration de 3.11, Q' est engendré par les produits $e_i \cdot e_j$; ses éléments d'ordre deux sont les produits de $4k$ ($k = 1, 2, \ldots\ldots$) facteurs e_j, deux à deux distincts avec ± 1.

Cela étant, il n'y a aucune difficulté à vérifier que les [2]-sous-groupes maximaux de $\mathbf{Spin}(10)$ sont de rang 5, et forment deux classes de conjugaison représentées par les sous-groupes H_1, H_2 de Q' engendrés respectivement par

$$-1, \quad e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4, \quad e_3 \cdot e_4 \cdot e_5 \cdot e_6, \quad e_5 \cdot e_6 \cdot e_7 \cdot e_8, \quad e_7 \cdot e_8 \cdot e_9 \cdot e_{10}$$

et par

$$-1, \quad e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdot e_4, \quad e_3 \cdot e_4 \cdot e_5 \cdot e_6, \quad e_5 \cdot e_6 \cdot e_7 \cdot e_8, \quad e_1 \cdot e_3 \cdot e_5 \cdot e_7.$$

H_1 est l'ensemble des éléments d'ordre deux d'un tore maximal, H_2 contient le sous-groupe H de 4.4, donc ne fait pas partie d'un tore.

6. 4. *Les $[p]$-sous-groupes de* $\mathbf{PSU}(p)$, (p premier impair). Soit $G = \mathbf{PSU}(p)$ le groupe projectif unitaire. On a donc $G = \mathbf{SU}(p)/\mathbf{Z}_p$. Nous voulons montrer que G possède deux classes de conjugaison de $[p]$-sous-groupes, représentées l'une par l'ensemble des éléments d'ordre p d'un tore maximal, l'autre par le sous-groupe de rang deux construit à l'aide de 3. 11. Le rang d'un $[p]$-sous-groupe maximal est donc égal à $(p-1)$ ou à deux.

Soient T' le tore maximal formé des matrices diagonales de $\mathbf{SU}(p)$ et T son image dans G. Soient v l'élément du normalisateur de T' défini par la permutation cyclique des coordonnées (cf. 3. 11(1)) et v^* son image dans G. Un calcul immédiat montre que $Z(v^*) \cap T$ est un groupe cyclique d'ordre p, engendré par l'image u^* de l'élément u de 3. 11(1). En particulier, l'automorphisme intérieur Int v^*: $x \to v^* \cdot x \cdot v^{*-1}$ n'a qu'un nombre fini de points fixes dans T donc $t \to v^* \cdot t \cdot v^{*-1} \cdot t^{-1}$ est un endomorphisme surjectif de T, ce qui entraine immédiatement que étant donnés $x, y \in T$, il existe $t \in T$ tel que Int $t(v^* \cdot y) = v^* \cdot x$.

Soit alors H un $[p]$-sous-groupe maximal de G. D'après [11, Théor. 1], on peut supposer $H \subset N$, où N désigne le normalisateur de T. Le seul cas à considérer est évidemment celui où $H \not\subset T$. Alors $H/(H \cap T)$ est un $[p]$-sous-groupe du groupe de Weyl $W(G) = N/T$. Ce dernier est le groupe des permutations de p objets : ses p-groupes de Sylow sont cycliques d'ordre p, l'un d'eux est engendré par l'image de v^*. Par conséquent, après conjugaison par un élément convenable de N, on peut supposer que $H \cap (v^* \cdot T) \neq \phi$. Mais on a remarqué plus haut que deux éléments de $v^* \cdot T$ sont conjugués par un élément de T; on peut donc supposer que $v^* \in H$. Alors H est engendré par v^* et par les éléments d'ordre p de $Z(v^*) \cap T$, donc, vu ce qui a été dit plus haut, par les images des éléments u, v de 3. 11 (1).

6. 5. On tire facilement de 6.4 que les $[p]$-sous-groupes maximaux de

$(\mathbf{SU}(p) \times \mathbf{SU}(p))/N$, $(N = \mathbf{Z}_p)$ sont de rang $\leqq 2(p-1)$ et forment au moins deux classes de conjugaison. Nous voulons en déduire que les [3]-sous-groupes maximaux de $\mathbf{F}_4$ sont de rangs $\leqq 4$ et se répartissent en au moins deux classes de conjugaison. Soit H un $[p]$-sous-groupe maximal. D'après [11, Théor. 1], il fait partie du normalisateur d'un tore maximal T, et $H/(H \cap T)$ est un p-groupe du groupe de Weyl $W(\mathbf{F}_4)$. Mais [12], $\mathbf{F}_4$ contient un sous-groupe $U = (\mathbf{SU}(3) \times \mathbf{SU}(3))/N$ $(N = \mathbf{Z}_3)$, et on peut supposer $U \supset T$. Les groupes de Weyl de $\mathbf{F}_4$ et U sont d'ordres respectifs $2^6 \cdot 3^2$ et 36, donc $W(U)$ contient un 3-groupe de Sylow de $W(\mathbf{F}_4)$; cela entraine qu'après automorphisme intérieur par un élément convenable du normalisateur de T, on peut supposer que $H \subset U$. D'autre part, tout [3]-sous-groupe maximal de U contient le centre de U, qui est cyclique d'ordre 3, donc (4. 3), si un tel sous-groupe ne fait pas partie d'un tore de U, il n'est pas non plus contenu dans un tore de $\mathbf{F}_4$; d'où notre assertion.

On voit que même, à l'aide de l'inclusion $(\mathbf{SU}(5) \times \mathbf{SU}(5))/N \subset \mathbf{E}_8$ que les [5]-sous-groupes maximaux de $\mathbf{E}_8$ sont de rang $\leqq 8$ et forment au moins deux classes de conjugaison.

7. Les [3]-groupes opérant sur le plan des octaves.

7.1. Soit $\mathbf{W}$ le plan projectif des octaves. On a donc $H^*(\mathbf{W}; \mathbf{Z}) = Z[x]/(x^3)$, avec x de degré 8. Le Théor. 4.2 de [9, XII] montre que, si $p \neq 3$, tout $[p]$-groupe opérant sur $\mathbf{W}$, ou sur un espace compact connexe ayant même cohomologie mod p que $\mathbf{W}$, a un point fixe au moins, (en fait que dim $H^*(F; \mathbf{Z}_p) = 3$, F étant l'ensemble des points fixes). Nous voulons ici justifier et compléter la remarque du §4 de [9, XII] concernant le cas où $p = 3$.

7.2. PROPOSITION. (a) *Le plan projectif des octaves* $\mathbf{W}$ *possède un groupe de collinéations* $H \cong (\mathbf{Z}_3)^3$ *sans point fixe.*

(b) *Soit X un espace compact connexe tel que* $H^*(X; \mathbf{Z}_3) = \mathbf{Z}_3[x]/(x^3)$ $(d^0 x = 8)$. *Soient H un groupe isomorphe à $(\mathbf{Z}_3)^2$ opérant sur X, et F l'ensemble de ses points fixes. Alors* dim $H^*(F; \mathbf{Z}_3) = 3$. *En particulier, F n'est pas vide.*

Pour vérifier (a), on considère de nouveau la fibration $\mathbf{F}_4/\mathbf{Spin}(9) = \mathbf{W}$. Comme $\mathbf{Spin}(9)$ n'a pas de 3-torsion, tout [3]-sous-groupe de $\mathbf{Spin}(9)$ est contenu dans un tore, par conséquent, un sous-groupe $H \cong (\mathbf{Z}_3)^3$ de $\mathbf{F}_4$, ne faisant pas partie d'un tore, ce qui existe d'après 4.4, n'a pas de point fixe sur $\mathbf{W}$. Par ailleurs, on sait que $\mathbf{F}_4$ s'identifie à un sous-groupe (compact maximal) du groupe des collinéations de $\mathbf{W}$, d'où (a).

(b) Soit (E_r) la suite spectrale mod 3 de la fibration (X_H, B_H, X, π_2), [9, IV, 3]. Comme un 3-groupe agit trivialement sur $\mathbf{Z}_3$, H agit trivialement sur $H^*(X; \mathbf{Z}_3)$; pour établir (b), il suffit donc, vu [9, XII, 3. 5], de faire voir que

$E_2 = E_\infty$, donc que $d_9(x) = 0$. Or on a

$$H^*(B_H;\ \mathbf{Z}_3) = \wedge\,(a_1, a_2) \otimes \mathbf{Z}_3[b_1, b_2] \quad (d^0 a_i = 1,\ b_i = \beta_3(a_i),\ i = 1, 2)$$

(où β_3 est, comme dans 2.3, le premier opérateur de Bockstein); comme évidemment $E_2 = E_9$, on peut écrire

$$y = d_9(x) = a_1 \cdot Q_1(b_1, b_2) + a_2 \cdot Q_2(b_1, b_2)$$

où $Q_i(b_1, b_2)$ est un polynôme homogène de degré quatre en b_1, b_2. L'espace $H^*(X;\ \mathbf{Z}_3)$ étant nul en dimensions 9 et 12, on a

(1) $$\beta_3(x) = \mathscr{P}_3^1(x) = 0,$$

$\mathscr{P}_3^1$ désignant naturellement la première puissance réduite de Steenrod; β_3 et $\mathscr{P}_3^1$ commutent à la transgression, par conséquent

(2) $$\kappa_{10}^9(\beta_3 y) = \kappa_{13}^9(\mathscr{P}_3^1 y) = 0,$$

κ_j^9 étant, comme d'habitude, l'homomorphisme $H^i(B_H;\ \mathbf{Z}_3) = E_9^{i,0} \to E_j^{i,0}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$. Ici le noyau de κ_j^9 $(10 \leqq j \leqq 17)$ est visiblement l'intersection de $H^i(B_H;\ \mathbf{Z}_3)$ avec l'idéal (y) engendré par y. Il nous suffira donc de montrer que $\beta_3(y)$, $\mathscr{P}_3^1(y) \in (y)$ entrainent $y = 0$. Evidemment $(y) \cap H^{10}(B_H;\ \mathbf{Z}_3) \subset (a_1 \cdot a_2)$ et $\beta_3(y) \in \mathbf{Z}_3[b_1, b_2]$, donc $\beta_3(y) \in (y)$ équivaut à $\beta_3(y) = 0$. Nous devons donc prouver

(3) $$\beta_3(y) = 0, \text{ et } \mathscr{P}_3^1(y) \in (y) \text{ entrainent } y = 0.$$

Ecrivons y sous la forme

(4) $$y = a_1 \cdot \textstyle\sum_{0 \leqq i \leqq 4} u_i \cdot b_1^i \cdot b_2^{4-i} + a_2 \cdot \sum_{0 \leqq i \leqq 4} v_i \cdot b_1^i \cdot b_2^{4-i} \quad (u_i, v_i \in \mathbf{Z}_3).$$

On sait que $\mathscr{P}_3^1$ est une dérivation et que $\mathscr{P}_3^1(a_i) = 0$, $\mathscr{P}_3^1(b_i^s) = s \cdot b_i^{s+2}$; par conséquent $\mathscr{P}_3^1(y)$ est somme de

$$a_1 \cdot (u_4 \cdot b_1^6 + u_3 \cdot b_1^3 \cdot b_2^3 + u_2 \cdot 2 \cdot (b_1^4 \cdot b_2^2 + b_1^2 \cdot b_2^4) + u_1 \cdot b_1^3 \cdot b_2^3 + u_0 \cdot b_2^6)$$

et de

$$a_2 \cdot (v_4 \cdot b_1^6 + v_3 \cdot b_1^3 \cdot b_2^3 + v_2 \cdot 2 \cdot (b_1^2 \cdot b_2^4 + b_1^4 \cdot b_2^2) + v_1 \cdot b_1^3 \cdot b_2^3 + v_0 \cdot b_2^6),$$

mais $\mathscr{P}_3^1(y) \in (y)$ s'écrit:

$$\mathscr{P}_3^1(y) = (q \cdot b_1^2 + r \cdot b_1 \cdot b_2 + s \cdot b_2^2) \cdot y \quad (q, r, s \in \mathbf{Z}_3),$$

d'où, par comparaison de coefficients, le système d'équations

(5u) $$\begin{gathered} q \cdot u_4 = u_4;\ q \cdot u_3 + r \cdot u_4 = 0;\ q \cdot u_2 + r \cdot u_3 + s \cdot u_4 = 2 \cdot u_2; \\ q \cdot u_1 + r \cdot u_2 + s \cdot u_3 = u_3 + u_1;\ q \cdot u_0 + r \cdot u_1 + s \cdot u_2 = 2 \cdot u_2; \\ r \cdot u_0 + s \cdot u_1 = 0;\ s \cdot u_0 = u_0, \end{gathered}$$

et un système similaire, où v_i remplace u_i, que nous désignerons par (5v). β_3 est une antidérivation, annulant b_i et appliquant a_i sur b_i ($i = 1, 2$). La condition $\beta_3(y) = 0$ entraine alors

$$u_4 = u_3 + v_4 = u_2 + v_3 = u_1 + v_2 = u_0 + v_1 = v_0 = 0. \tag{6}$$

Supposons $q \neq 0$. Comme $u_4 = 0$, on tire de (5u) que $u_3 = 0$, donc, vu (6) $v_4 = 0$, puis, vu (5v), $v_3 = 0$ et, vu (6), $u_2 = 0$. On obtient alors le système

$$u_1 + v_2 = 0; \quad q \cdot v_2 = 2 \cdot v_2; \quad q \cdot u_1 = u_1$$

qui entraine $u_1 = v_2 = 0$, d'où finalement, en utilisant à nouveau (5u), (6), $u_0 = v_1 = 0$. Par conséquent, $q \neq 0$ entraine $y = 0$. De même, $s \neq 0$ entraine $y = 0$. Enfin, on voit de la même manière, en utilisant alternativement (5u), (5v), et (6) que $q = s = 0$ entraine $y = 0$, ce qui démontre (3).

7.3. REMARQUE. Nous profitons de cette occasion pour signaler une erreur dans la démonstration du Théor 3.6 de [9, XII]. L'égalité $\beta(c) = 0$ n'implique pas, a priori, que $\beta(d_3(c)) = 0$ mais seulement que $\beta(d_3(c))$ appartient à l'idéal M engendré par $d_3(H^2(X))$. Cependant, on a $\beta(d_3(c)) = 0$ *si tout* $c \in H^2(X)$ *est la restriction d'une classe entière transgressive*, ce qui a lieu en particulier quand la cohomologie entière de X est de type fini. La démonstration du texte vaut sans changement sous cette condition supplémentaire. Le théorème 3.6 lui-même vaut au moins si p est impair. En effet, le raisonnement du texte montre que $d_3(c)$ est somme de monômes de la forme $a_i \cdot a_j \cdot a_k$ ($i < j < k$); il est alors immédiat que $\beta(d_3(c)) \in M$ équivaut à $d_3(c) = 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ARAKI, A theorem of differential Hopf algebras and the cohomology mod 3 of the compact exceptional groups E_7 and E_8, to appear.

[2] A. BOREL, Le plan projectif des octaves et les sphères comme espaces homogènes, C. R. Acad. Sci., Paris 230 (1950), 1378-1380.

[3] __________, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Annals of Math. 57 (1953), 115-207.

[4] __________, La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, Comm. Math. Helv. 27 (1953), 165-197.

[5] __________, Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. Jour. Math. 76 (1954), 273-342.

[6] __________, Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 40 (1954), 1147-1151.

[7] __________, Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), 397-432.

[8] __________, Sur la torsion des groupes de Lie, Jour. Math. pur. appl. (9) 35 (1956), 127-139.

[9] __________, Seminar on transformation groups, Annals of Math. Studies, No. 46, Princeton, 1960.

[10] A. BOREL AND F. HIRZEBRUCH, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math. LXXX (1958), 458-538.
[11] A. BOREL AND J-P. SERRE, Sur certains sous-groupes des groupes de Lie compacts, Comm. Math. Helv. 27 (1953), 128-139.
[12] A. BOREL ET J. DE SIEBENTHAL, Les sous-groupes fermés connexes de rang maximum des groupes de Lie clos, ibid. 23 (1949-50), 200-221.
[13] R. BOTT, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 251-282.
[14] R. BOTT AND H. SAMELSON, Application of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math. LXXX (1958), 964-1029.
[15] H. CARTAN, Seminaire E. N. S, Paris, 1954-55.
[16] C. CHEVALLEY, The algebraic theory of spinors, Columbia University Press, New York, 1954.
[17] J. P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abêliens, Annals of Math. 58 (1953), 258-294.
[18] J. DE SIEBENTHAL, Sur les groupes de Lie compacts non connexes, Comm. Math. Helv. 31 (1956), 41-89.
[19] N. STEENROD, Topology of fibre bundles, Princeton, 1951.
[20] E. STIEFEL, Ueber eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und, ··· Comm. Math. Helv. 14 (1941-42), 350-380.

THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY, PRINCETON, N. J., U. S. A.