

ZUM AUFBAU EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER
MINIMALFLÄCHEN
—BESONDERS ÜBER IHRE INSTABILITÄT
UND HÄUFUNG—

Herrn Professor Dr. Tadashi Kuroda anlässlich des 60. Geburtstags gewidmet

KEIICHI SHIBATA

(Eingegangen am Oktober 16, 1985)

0. Einleitung. Unter einer verallgemeinerten Minimalfläche (oder, kurz Minimalfläche) verstehen wir hiermit ein parametrisiertes berandetes Flächenstück in $\mathbf{R}^3$, welches sich im Innern seines Parameterbereichs in bezug auf dem isothermen Parameter harmonisch verhält. Die Minimalfläche heißt, eine Jordankurve γ zu spannen, wenn ihre Einschränkung auf den Parametergebietsrand bis auf irgendeinen Parameterwechsel von Kurve mit γ übereinstimmt. Bezeichnet man die Gesamtheit aller eine bestimmte Jordankurve γ spannender kreisförmiger verallgemeinerter Minimalflächen mit $\mathfrak{M}[\gamma]$, so läßt sich das Hauptresultat der vorliegenden Untersuchung folgendermaßen aussagen:

HAUPTSATZ. *Es gibt eine gewisse rektifizierbare Jordankurve γ_0 in $\mathbf{R}^3$ derart, daß die Menge $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ wenigstens eine instabile Minimalfläche S_0 zuläßt, und überdies, daß jede Umgebung von S_0 in der natürlichen Topologie des umgebenden Raumes eine andere Minimalfläche $S \in \mathfrak{M}[\gamma_0]$ als S_0 enthält.*

Der Kernpunkt unseres Verfahrens besteht darin, einen passenden nicht-analytischen Rahmen γ_0 anzuschaffen und viele Elemente von $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ wirklich zu konstruieren, welche nicht einmal vom minimalen Typus sind.

1. Vorbereitung. Durch die vorliegenden Untersuchung hindurch weisen alle Kurven und Flächen auf den komplexen Parameter hin, der mit den Bezeichnungen $w = u + \sqrt{-1}v = re^{\sqrt{-1}\theta}$, $\zeta = t + \sqrt{-1}\nu$ usw. geschrieben werden soll ($u, v, r, \theta, t, \nu \in \mathbf{R}$). Weiter wird man auf die nachstehenden Bezeichnungen und Definitionen ohne die jedesmaligen Erwähnungen öftest Bezug nehmen:

$I = [0, 2\pi] = \{t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ (das reelle abgeschlossene Intervall);

$B = \{w \mid |w| \leq 1\}$ (die abgeschlossene Einheitskreisscheibe);

$\text{Int } B = \{w \mid |w| < 1\}$ (das Innere von B);

$R = \{w \mid |1 - |w|| < q\}$, wo q eine Konstante kleiner als 1, die ein für allemal fest gelassen wird. (ein offener konzentrischer Kreisring);

$B(r) = \{w \mid |w| \leq r\}$, insbesondere $B(1) = B$.

$\text{Lip}(I, \cdot)$: eine Klasse von Funktionen oder Abbildungen, die auf dem Intervalle I definiert und der Lipschitzschen Bedingung unterworfen sind.

Die untenbenannte Proposition wird kaum des Beweises bedürfen:

HILFSSATZ 1. *Ist $\phi(t)$ von der Klasse $\text{Lip}(I, \mathbb{R}^n)$, so gehört $\phi \circ \tau(t)$ wieder zu derselben Klasse $\text{Lip}(I, \mathbb{R}^n)$ für beliebiges Element $\tau(t)$ von $\text{Lip}(I, I)$.*

$\mathcal{S}$ ist die Gesamtheit biholomorpher Abbildung $z = f(w)$ von R auf ein in der z -Ebene liegendes zweifach zusammenhängendes Gebiet, welche den inneren Rand $|w| = 1 - q$ zur Einheitskreisperipherie $|z| = 1$ vollzieht. Übrigens soll das Symbol $\partial^{-1} \circ f(\partial B)$ als dasjenige Jordangebiet deuten, das von der analytischen geschlossenen Kurve $f(\partial B)$ berandet ist.

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Kollektiv aller orientierungstreuer Homöomorphismen $\tau = \tau(w)$ von ∂B , die ein Tripel Punkte $e^{2\pi\sqrt{-1}k/3}$ ($k = 1, 2, 3$) fest lassen. Mit der Operator von Transformationszusammensetzungen macht es nicht bloß eine Gruppe für sich selbst aus, sondern auch enthält eine wichtige Untergruppe $\mathfrak{A}$, dessen Element die Kreisperipherie ∂B biholomorph auf sich in folgender Art abbildet: Wähle man ein Element $f(w)$ von $\mathcal{S}$ aus und bilde das Jordangebiet $\partial^{-1} \circ f(\partial B)$ konform auf $\text{Int } B$ wieder ab durch eine biholomorphe Funktion, sei g , so daß die zusammengesetzte Abbildung $g \circ f$ die drei Punkte $e^{2\pi\sqrt{-1}k/3}$ ($k = 1, 2, 3$) invariant läßt. Ein klassischer Satz aus der Funktionentheorie lehrt, daß $g \circ f$ ($e^{\sqrt{-1}\theta}$) ein biholomorpher Automorphismus von ∂B ist, die Gesamtheit derer sich eine Untergruppe von $\mathfrak{X}$ herausstellt.

Ist nun ein Paar Elemente τ_i ($i = 1, 2$) von $\mathfrak{X}$ durch die Relation $\tau_2 = \tau_1 \circ \alpha$ mittels einer gewissen $\alpha \in \mathfrak{A}$ miteinander verbunden, so spricht man davon, daß τ_1 zu τ_2 modulo $\mathfrak{A}$ äquivalent ist, indem man symbolisch $\tau_1 \sim \tau_2 \pmod{\mathfrak{A}}$ schreibt. Die Beziehung genügt selbstverständlich den Äquivalenzgesetzen: Identität, Reflexion, und Transitivität.

HILFSSATZ 2. *Die Familie $\mathcal{S}$ ist normal auf R und kompakt in der Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf einem beliebigen kompakten Teilbereich von R .*

HILFSSATZ 3 (s. Shibata [5], Proposition 3). *Es sei $\{f_n(w)\}_{n=1,2,\dots}$ eine zu $\mathcal{S}$ gehörige Folge, welche gegen eine Grenze $f_\infty(w) \in \mathcal{S}$ in der obenbenannten Topologie konvergiert. Für ein beliebig vorgeschriebenes kompaktes Teilgebiet κ von $f_\infty(w)$ gibt es ein Nummer $n_0 \in \mathbb{Z}^+$, so daß*

$\{f_n^{-1}(z)\}_{n=n_0, n_0+1, \dots}$ gegen $f_\infty^{-1}(z)$ gleichmäßig auf κ konvergiert.

Das Dirichletsche Integral innerhalb B ist von Natur ein uneigentliches Integral, welches gewöhnlich als ein nicht-negativer, endlicher oder unendlicher Grenzwert desjenigen abgegrenzten Integrals über dem konzentrischen Kreisring $B(r)$ beim Übergang $r \rightarrow 1$ eingeführt wurde. Und dennoch gilt das folgende Endlichkeitstheorem:

HILFSSATZ 4. *Es sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ eine auf dem Intervalle I integrierbare reell-wertige Funktion mit der Fourierschen Entwicklung*

$$\mathfrak{x}(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Gehört sie ferner zur Klasse $\text{Lip}(I, R)$, so bleibt das Dirichletsche Integral

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

der harmonischen Funktion

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

über $\text{Int } B$ endlich.

BEWEIS. Die Voraussetzung der Lipschitzheit ergibt die Endlichkeit nicht bloß von der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ sondern auch von der Schwankung des Wertes $\mathfrak{x}(t)$ über I , deren letztere die Beschränktheit der Größen $n(|a_n| + |b_n|)$ ($n = 1, 2, \dots$) lehrt (vgl. Zygmund [4], S. 48 u. S. 241). Zusammenfassend sehen wir die Endlichkeit der fraglichen Reihe (1) ein.
w.z.b.w.

2. Die Klassen rektifizierbarer und analytischer Jordankurven in R^3 . Die im Raum R^3 befindliche Jordankurve γ wird zuerst als ein topologisches Bild von ∂B in R^3 eingeführt, die man durch eine Gleichung $\gamma = \gamma(t)$ ($t \in I$) ausdrücken möge, da man den Parameter $e^{\sqrt{-1}t}$ auf ∂B mit demjenigen $t \in I$ oft gleichzusetzen pflegt, ohne Mißverständnisse zu fürchten. Eliminiert man daraus den Parameter t , so bleibt ihre *Bahn* nach, symbolisch wie Bhn γ geschrieben werden sollte, die nicht mehr als eine in R^3 enthaltene Punktmenge ist. Gegenüber jeder Transformation τ ($\neq \text{Id.}$) von $\mathfrak{X}$ gestaltet sich $\gamma \circ \tau(t)$ immer noch eine andere Parametrisierung für eine und dieselbe Jordankurve. Im modernen Wortlaut ist eine Jordankurve also die durch derartige Identifizierung aller derjenigen vorkommende Äquivalenzklasse.

Nun man soll es hiernach mit dem Inhalt berandeter Flächen zu tun

haben, so hält man sich mit Grund ausschließlich an die Klasse rektifizierbarer Jordankurven: Denn auch im Falle des 2-dimensionalen umgebenden Raumes läßt sich an einem Beispiel zeigen, daß gewisse nicht-rektifizierbare Jordankurve ein endliches Gebiet ohne bestimmten Inhalt beranden kann.

Obwohl die rektifizierbarkeit einer Kurve sich ohne Hinweis auf die Parametrisierungen erklären läßt, es ist notwendig und hinreichend dafür, daß jede Koordinatenkomponente ihrer Parametrisierung auf ∂B von beschränkter Schwankung sei. Wenn einmal diese Bedingung bei irgendeiner Parametrisierung erfüllt wird, so ist es offenbar für alles: d. h. Rektifizierbarkeit bleibt invariant gegenüber allen den Elementen von $\mathfrak{X}$. Die Gesamtheit derartiger rektifizierbarer Jordankurven in R^3 bezeichnen wir mit Γ_{rek} . Besonders ist uns darüber wohlbekannt die folgende Erhöhung ihrer Parametrisierungsklasse:

HILFSSATZ 5. *Jede rektifizierbare Jordankurve γ läßt eine Parametrisierung von der Klasse $\text{Lip}(\partial B, \text{Bhn } \gamma)$ zu.*

BEWEIS. Sei die fragliche Kurve durch die vektorwertige Funktion $\gamma(\theta)$ ($\theta \in I$) parametrisiert. Zu beliebigem Teilintervall $[0, \theta]$ von I lassen wir den Teilbogen $\overline{\gamma(0), \gamma(\theta)}$ zuordnen, dessen Länge mit $s = s(\theta)$ geschrieben werde. Jede Komponente $\gamma^i(\theta)$ des Vektors $\gamma(\theta)$ genügt der Ungleichung

$$|\gamma^i(\theta) - \gamma^i(\theta')| \leq |s(\theta) - s(\theta')|, \quad i = 1, 2, 3$$

für alle die Werte $\theta, \theta' \in I$. Der neue Parameter $t = 2\pi s/L$ ($L = s(2\pi)$) besitzt die erwünschte Eigenschaft mit dem Lipschitzschen Koeffizienten $L/2\pi$.

Ein Element γ von Γ_{rek} heißt analytisch, wenn sein Parameterintervall I von der Vereinigung endlich vieler offener Teilintervalle $I_j = \{t \mid |t - t_j| < \delta_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) derart überdeckt ist, daß jede Punkt-Koordinate x^i ($i = 1, 2, 3$) von $\text{Bhn } \gamma$ sich zumindest auf einem I_j in diejenige Potenzreihe nach t entwickeln läßt, die innerhalb des Kreises $\{\zeta \mid |\zeta - t_j| < \delta_j\}$ kompakt-gleichmäßig konvergiert. Wird ferner die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^3 (dx^i/dt)^2 \neq 0$ erfüllt, so heißt es regulär-analytisch. Die Gesamtheit der analytischen Jordankurven in R^3 soll mit Γ_{ana} bezeichnet werden.

SATZ 1. $\Gamma_{\text{rek}} \setminus \Gamma_{\text{ana}} \neq \emptyset$.

BEWEIS. Nach Definition der beiden Kurvenklassen reicht es aus, das Vorhandensein einer vektorwertigen Funktion $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ von beschränkter Schwankung auf ∂B zu zeigen, so daß durch keine Element τ von $\mathfrak{X}$ die

zusammengesetzte Abbildung $\chi \circ \tau(t)$ analytisch sein kann. Zu diesem Zweck dient ein Paar Funktionen $\psi(w)$ und $p(t)$, jene von denen sich in einer Umgebung von ∂B biholomorph verhält und diese auf I von $p(0) = 0$ bis zu $p(2\pi) = 2\pi$ streng monoton wachsende singuläre Funktion ist. Setzt man

$$\begin{aligned} x^1 + \sqrt{-1}x^2 &= \psi(w) = \psi(re^{\sqrt{-1}t}), \\ x^3 &= \begin{cases} p(2t) & (0 \leq t \leq \pi), \\ p(4\pi - 2t) & (\pi \leq t \leq 2\pi), \end{cases} \end{aligned}$$

so sind alle $x^i(t) = x^i(e^{\sqrt{-1}t})$ von beschränkter Schwankung, erfüllen die Bedingung $x^i(0) = x^i(2\pi)$ ($i = 1, 2, 3$). Überdies geht es hervor, daß $0 < t_1 \neq t_2 < 2\pi$ notwendigerweise $x^i(t_1) \neq x^i(t_2)$ für zumindest einen der Indizes $i = 1, 2, 3$ bedeutet. Somit stellt sich der 3-Vektor $\chi(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) eine Parametrisierung gewisser rektifizierbarer Jordankurve γ_0 in $\mathbf{R}^3$ heraus. Und wenn anders ein Element τ von $\mathfrak{X}$ die Kurve $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{rek}}$ zu $\gamma_0 \circ \tau(t) \in \Gamma_{\text{ana}}$ verwandelte, so müßte die Analytizitätsannahme für die Komponenten x^1, x^2 einerseits $\tau \in \mathfrak{A}$ bedürfen aber andererseits durch keine solche τ könnte x^3 sich analytisch gestalten. Es ist absurd. Zusammenfassend haben wir bewiesen, daß γ_0 zu $\Gamma_{\text{rek}} \setminus \Gamma_{\text{ana}}$ angehört.

3. Das Dirichletsche Randwertproblem und Minimumprinzip von Energieintegralen. Es sei $\gamma \circ \tau(t)$ ein beliebiger Repräsentant von einer zu Γ_{rek} gehörenden Kurve γ . Das Kollektiv aller derjenigen Parameterwechsel $\tau(t)$ wird in ganz natureller Art zu einem topologischen Raum, indem man ihm die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf I verleiht. Unter den mannigfaltigen Parametern im Raum $\mathfrak{X}$, die der fraglichen Kurve ihre äquivalenten Darstellungen anbieten, sondert man den normalisierten Bogenlängeparameter $t = (2\pi/L)s$ aus und hält ihn fürs Einselement $Id.$ in $\mathfrak{X}$. Hiernach soll die Ausdrucksweise $\gamma(t)$ speziell als die dadurch parametrisierte Kurve γ deuten, d.h. $\gamma(t) = \gamma \circ Id.(t)$. Man darf ohne Einschränkung der allgemeinheit annehmen, daß dieses $Id.$ das Einselement auch für die Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{X}$ ausmacht. Die Menge $\{\gamma \circ \tau(t) | t \in I, \tau \in \mathfrak{X}\}$ schöpft alle die Parametrisierungen von γ aus.

ANMERKUNG 1. Sei τ_0 aus $\mathfrak{X}$ nach Willkür. Zufolge der Isomorphie zwischen den Gruppen $\mathfrak{X}$ und $\tau_0^{-1} \circ \mathfrak{X}$ schöpft die Menge $\{\gamma \circ \tau(t) | \tau \in \tau_0^{-1} \circ \mathfrak{X}\}$ auch die sämtliche Parametrisierungen derselben Kurve. Insofern es sich um eine einzige Parametrisierung der Kurve von Γ_{rek} handelt, darf man sie dafür halten, vom normalisierten Bogenlängeparameter $t = (2\pi/L)s$ parametrisiert sei.

HILFSSATZ 6. $(\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}) \cap \text{Lip}(I, I)$ ist überall dicht in $\mathfrak{X}$.

BEWEIS. Man nehme ein willkürliches Element τ aus $\mathfrak{X}$. Nach obigem darf man τ für $Id.$ halten ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Eine beliebige ε -Umgebung der graphischen Darstellung von $Id.$ in der $\zeta = t + \sqrt{-1}\nu$ -Ebene schließt zumindest einen gebrochenen Streckenzug ein, welcher ein Paar Punkte $(0, 0)$ und $(1, 1)$ innerhalb des Quadrats $I \times I$ mit überall beschränkten Steigungen verbindet, und dessen orthogonale Projektion auf die Seiten injektiv sei. Das durch diesen Polygonzug graphisch dargestellte Element von $\mathfrak{X}$ ist nie regulär-analytisch, somit gehört zu $\mathfrak{A}$ nicht an. w.z.b.w.

Man mag immer die Parametrisierungsfragen einer Kurve beiseitslegen, doch der Raum $\mathfrak{X}$ befindet sich gerade deshalb mangelhaft zu sein, da er nicht einmal in seiner naturellen Topologie kompakt war. Setzt man $\mathfrak{B} = \{\sigma(t): I \mapsto I\}$ mit allen monoton nicht-abnehmenden die Dreipunktebedingung erfüllenden Funktionen $\sigma(t)$, so wird $\mathfrak{B}$ eine kompakte Erweiterung des Raumes $\mathfrak{X}$.

Wir wollen nun $\{\gamma \circ \tau(t) | \tau \in \mathfrak{B}\}$ Randwertmenge von γ nennen, die offenbar mit den sämtlichen Parametrisierungen von γ übereinstimmt, sobald $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{X}$ ersetzt wird. Für einzelnes Element τ von $\mathfrak{B}$ stellt der Randwert $\gamma \circ \tau(t)$ einen innerhalb B harmonischen Vektor eindeutig fest als Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe, die man simpel mit dem Symbol $(\gamma \circ \tau)(w)$ ausdrücken möge.

DEFINITION.

(a) $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}[\gamma] = \{(\gamma \circ \tau)(w) | \tau \in \mathfrak{B}\}$: die Gesamtheit der vom Randwert $\gamma \circ \tau(t)$ bestimmten harmonischen Fläche;

(b) $\mathfrak{M}[\gamma]$: die Gesamtheit der von γ berandeten Minimalflächen: Wenn ein Element $(\gamma \circ \tau)(w)$ ($\tau \in \mathfrak{X}$) von $\mathfrak{S}[\gamma]$ mittels eines isothermen Parameter w dargestellt ist, so sagt man, daß es zu $\mathfrak{M}[\gamma]$ gehört.

HILFSSATZ 7. *Jedes Element von $\mathfrak{S}$ wird mittels seines Randwertes vollständig ausgezeichnet: mit anderen Worten, läßt jenes von denjenigen mit diesem identifizieren. Es ist stetig und kompakt als ein auf dem Raum $\mathfrak{B}$ definiertes Funktional in τ .*

BEWEIS. Die Behauptung ist fast selbst-verständlich nach dem Maximumprinzip für die harmonische Funktion.

In Absicht der späteren Nützlichkeit merke man ein Tripel Punkte $x^{(j)} = \gamma(2j\pi/3)$ ($j = 1, 2, 3$), die auf Bhn γ in gleicher Entfernung voneinander sitzen.

Wenn man sich einmal dafür entschieden hat, zur Konstruierung der vom gegebenen Rahmen γ berandeten Minimalflächen den funktionen-

theoretischen Weg einzuschlagen, so müßte mit der Problemstellung folgender Art angefangen werden:

PROBLEM C. *Man finde eine Transformation τ_∞ irgendwo in $\mathfrak{X}$, so daß der harmonische Vektor $(\gamma \circ \tau_\infty)(w)$ eine Minimalfläche definiere.*

Der Douglas-Courantsche Aspekt darüber wohlbekanntlich ging dahin, die Frage selbst zu anderem Extremumproblem betreffs Dirichletschen Integrale der harmonischen Vektor $(\gamma \circ \tau)(w)$ ($\tau \in \mathfrak{B}$) zu transformieren. Unserer vorhandenen Absicht nach, die Beweisführungen hauptsächlich längs ihrer leitenden Ideen anzustellen, kommen natürlich die Dirichletschen Integrale mehrerer harmonischer Vektor oft in Betracht im Laufe der nachherigen Auseinandersetzungen hindurch: wir möchten daher mit Grund die Dirichletschen Energieintegrale verschiedenartiger Lösungsvektor von unserer Randwertaufgabe mit etwas gemeinsamem und möglichst einfachem Symbol ausdrücken. Zuzufolge des Sachverhalts, daß sowohl das Problem für sich als auch die fraglichen Integrale gegenüber allen konformen Transformationen des Parameterbereichs invariant bleibt, wird es sich empfehlen, es kurz wie $\|\cdot\|^2$ zu bezeichnen, wo $\cdot$ von verschiedenen harmonischen Lösungsvektor bezüglich Randwertaufgaben gemäß ersetzt werden soll, z. B. wie $\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2$, falls es von $(\gamma \circ \tau)(w)$ ($\tau \in \mathfrak{X}$) auf B die Rede ist: oder, $\|(\gamma \circ f^{-1})(z)\|^2$, falls es sich um $(\gamma \circ f^{-1})(z)$ ($f \in \mathcal{F}$) im Gebiet $\partial^{-1} \circ f(\partial B)$ handelt, usw. Dabei hat man die explizite Beschreibung ihrer Integrationsbereiche weggelassen, da kein Irrtum zu fürchten ist. Glücklicherweise bestätigt uns Rektifizierbarkeitsannahme der fraglichen Kontur die Bedeutungsvolligkeit unseres Variationsproblems (Hilfssätze 4 u. 6):

SATZ 2. *Ist es $\gamma \in \Gamma_{\text{rek}}$, so existiert eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$, derart daß jedes ihrer Elemente τ dem Erfordernis $\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2 < +\infty$ befriedigt.*

Von nun an sollen alle die Elemente $(\gamma \circ \tau)(w)$ von $\mathfrak{G}[\gamma]$ auch ohne die besonderen Erwähnungen der Dreipunktebedingung $(\gamma \circ \tau)(2j\pi/3) = x^{(j)}$ ($j = 1, 2, 3$) genügen.

Der obige Satz 2 erlaubt uns eine Menge von Energiewerte

$$\mathcal{E} = \{\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2 \mid \tau \in \mathfrak{B}\}$$

einzuführen, indem er einen Umkehr von der eigentlichen Randwertaufgabe C zum Variationsproblem in bezug auf dem Funktional $\mathcal{E}$ im Raum $\mathfrak{B}$ andeutet. Hier schicken wir eine Proposition voraus, die eine grundlegende Rolle bezüglich des Dirichletschen Integrals von Elementen in $\mathfrak{G}[\gamma]$:

HILFSSATZ 8. *Das Funktional $\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2$ in τ verhält sich stetig*

und kompakt auf jedem Unterraum von $\mathfrak{B}$, wo es endlich bleibt.

BEWEIS. Die Behauptung wird in Hinweis auf das Harnackschen Prinzip und das Fatouschen Lemma sofort versichert.

Fürs Auflösen des Problem C reichte es aus—aber ist nur hinreichend —, wie Douglas und Courant beobachteten, das Funktional $\mathcal{E} = \mathcal{E}[\tau]$ innerhalb $\mathfrak{X}$ möglichst zu vermindern. Vielleicht hätte die Gleichgewichtszustände beim berühmten Seifenhäutchenexperiment die Mathematiker davon überzeugt. Folgen wir eine Weile ihren Gedankengang nach:

Plan I. Mittels der Erreichbarkeit des Wertes

$$\underline{E} = \inf \mathcal{E}$$

durch angemessenes Element τ_∞ in $\mathfrak{X}$, eine Minimalfläche von $\mathfrak{M}[\gamma]$ zu suchen.

Obwohl dieses typische Extremumproblem in der Variationsrechnung ermöglicht uns auf die übliche Weise eine Minimalfolge harmonischer Vektor zu bilden, deren Energieintegrale gegen die größte untere Grenze $\underline{E}$ zustrebt, es stellt sich heraus, daß der Plan an sich gewisser technischer Modifikation bedürfte, hauptsächlich auf Grund des Sachverhalts, das $\mathfrak{X}$ in seiner naturellen Topologie nicht kompakt war. Man ersetzt hierauf sowohl $\mathcal{E}$ als $\underline{E}$ durch

$$\mathcal{E}' = \{ \|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2 \mid \tau \in \mathfrak{B} \}$$

und

$$\underline{E}' = \inf \mathcal{E}'$$

beziehungsweise, indem man $\mathfrak{B}$ anstatt $\mathfrak{X}$ vor Augen hat. Gleichmäßige Konvergenz der Minimalfolge stützt sich gründlich auf dem Fundamentalsatz im Dirichletschen Prinzip (s. Courant [2], S. 101–104):

HILFSSATZ 9. Eine Teilmenge der Randwertmenge $\{\gamma \circ \tau(t) \mid \tau \in \mathfrak{B}\}$ von $\mathfrak{Q}[\gamma]$, für welche $\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2 < +\infty$ gilt, ist gleichgradig stetig auf dem Intervall I unter Mitwirkung der Dreipunktebedingung.

Bildet man nun eine Minimalfolge $\{(\gamma \circ \tau_n)(w)\}_{n=1,2,\dots}$ für den Plan I mit geeigneten $\tau_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) aus $\mathfrak{B}$, so lehrt der Hilfssatz 9, daß sie gewisse auf I gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält, welche man der Kürze wegen mit einer und derselben Bezeichnung ausdrücken möge. Es existiert ein Element $\tau_\infty(t)$ von $\mathfrak{B}$ derart, daß

$$(\gamma \circ \tau_n)(w) \rightrightarrows (\gamma \circ \tau_\infty)(w), \quad w \in B, \quad n \rightarrow \infty$$

nach dem Hilfssatz 7. Somit liefert der Hilfssatz 8 schließlich, daß

$$\|(\gamma \circ \tau_\infty)(w)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\gamma \circ \tau_n)(w)\|^2 = \underline{E}'.$$

Setzt man die erste Variation des im Raum $\mathfrak{S}$ definierten Funktionals $\|(\gamma \circ \tau)(w)\|^2$ für $\tau = \tau_\infty$ gleich Null auf Grund des oben gewonnenen Resultats, daß es sich im Punkte τ_∞ stationär verhält, so folgt die Isothermität des Parameters w in bezug auf die harmonische Fläche $(\gamma \circ \tau_\infty)(w)$. Merkwürdigerweise haben wir doch den

HILFSSATZ 10. *Wenn ein Element $\mathfrak{x}(w)$ von $\mathfrak{S}[\gamma]$ überhaupt in seinem isothermen Parameter w dargestellt ist, so bezieht es kein Paar Punkte auf ∂B in einen einzigen Punkt von $\text{Bhn } \gamma$.*

BEWEIS. Nehmen wir an, daß zwei Punkte $w_1, w_2 \in \partial B$ ($w_1 \neq w_2$) mittels $\mathfrak{x}(w)$ in einen Punkt $\mathfrak{x}(w_1) = \mathfrak{x}(w_2)$ überführt worden wäre. So müßte jede Komponente des Vektors auf dem Kreisbogen $\beta = \widehat{w_1, w_2}$ einen konstanten reellen Wert annehmen. Darum ließe sie sich harmonisch über denselben Bogen β fortsetzen nach dem Spiegelungsprinzip, woraus die Isothermität $|\partial \mathfrak{x} / \partial u|^2 - |\partial \mathfrak{x} / \partial v|^2 = (\partial \mathfrak{x} / \partial u)(\partial \mathfrak{x} / \partial v) = 0$ daselbst folgen würde. Es müßte aber bewirken, daß das Verschwinden der tangentialen Ableitung

$$\partial \mathfrak{x}(e^{\sqrt{-1}t}) / \partial t = (-\partial \mathfrak{x}(u, v) / \partial u) \sin t + (\partial \mathfrak{x}(u, v) / \partial v) \cos t$$

auf β sogar ja dasjenige vom holomorphen Vektor $(\partial \mathfrak{x} / \partial w)^2$ auf dem ganzen Bereich B vor sich ginge, was auf dasselbe hinausläuft, $\mathfrak{x}(w) = \text{const.}$ überall auf B . Es steht aber zu der Dreipunktebedingung in Widerspruch.

w.z.b.w.

Aus dem eben jetzt bewiesenen Hilfssatz 10 ist ersichtlich, daß τ_∞ nicht nur zu $\mathfrak{B}$ sondern auch zu $\mathfrak{X}$ angehört. Somit ist $(\gamma \circ \tau_\infty)(w)$ eine gewünschte Minimalfläche. Das Problem C ist also mittels des Plans I gelöst worden.

Dieser Erfolg besagt gleichzeitig, daß diejenige Minimalfläche $(\gamma \circ \tau_\infty)(w)$ unter allen den von $\text{Bhn } \gamma$ berandeten glatten Flächen vom kleinsten Inhalt ist, geschweige denn stabil.

Die obige Betrachtung ist folgendermaßen zu deuten: Die resultierende Fläche $(\gamma \circ \tau_\infty)(w)$ ist durch einen Parameterwechsel der gegebenen Randkurve von $\gamma \circ \text{Id.}(t)$ bis zu $\gamma \circ \tau_\infty(t)$ entstanden ebenso wie jedes Element von $\mathfrak{S}[\gamma]$ mit seinem Randwert gleichgesetzt wurde (Hilfssatz 7). Selten könnte die Unität in den Grenztransformationen $\tau_\infty(t)$ erwartet werden, deren Gesamtheit man mit $\mathfrak{X}[\gamma]$ schreiben möge.

Im Allgemeinen ist die zuletzt gewonnene Randparametrisierung $\gamma \circ \tau_\infty(t)$ —Grenzparametrisierung heißen sollte—von der Anfangsparametrisierung $\gamma \circ \text{Id.}(t)$ verschieden, wobei wir ihre Verschiedenheit auf Gehörigkeit der Grenztransformation $\tau_\infty(t) \in \mathfrak{X}$ prüfen wollen. Es trifft zwei Fälle ein:

Fall 1° $\tau_\infty \in \mathfrak{A}$;

Fall 2° $\tau_\infty \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}$.

Kommt der Fall 1° vor, so erfüllt ein willkürliches Element $\tau \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}$ die Beziehung $\tau \circ \tau_\infty^{-1} \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}$, während die Grenztransformation τ_∞ vom Wahl der Anfangstransformation unabhängig bleibt. Nimmt man also $\gamma \circ \tau(t)$ als Anfangsparametrisierung anstatt $\gamma(t)$ von neuem, so läßt sich der erste Fall zum zweiten allemal zurückführen. Bewiesen worden ist so der

HILFSSATZ 11. $\mathfrak{X}$ umfaßt eine dichte Teilmenge $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}^*[\gamma]$, alle deren Elemente keinem von $\underline{\mathfrak{X}}[\gamma]$ $\mathfrak{A}$ -äquivalent stehen.

4. Existenz einer Minimalfläche in $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ nicht vom kleinsten Inhalt. Was doch die Existenz der Minimalflächen vom nicht-minimalen Typus anbetrifft, erscheint unsere Kenntnis darüber kaum noch befriedigend zu sein. Unter Abgrenzung der in Betracht zu ziehenden Kontur zur Klasse von Jordankurven möchten wir davon etwas näher untersuchen.

Sei $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{rek}} \setminus \Gamma_{\text{ana}}$ willkürlich. Auch in diesem Abschnitte halten wir immer noch Interesse am Problem C im § 3 aber versuchen hier gewisse Änderung des Plans I, der sich zu streng herausstellt nur um die kritischen Stellen des Dirichletschen Integrals zu erfinden. Hierfür fassen wir die Untergruppe $\mathfrak{A}$ — nicht $\mathfrak{X}$ an sich — der Parameterwechsel in den Ränderzuordnungen ins Auge, indem wir die Douglas-Courantschen Ideen als Ganzes beibehalten.

Vermöge ihrer Invarianz gegenüber konformen Transformationen des Parameterbereichs läßt sich die Dirichletsche Randwertaufgabe hierbei hinsichtlich nicht bloß des Kreises B selbst sondern auch aller der ihm bis auf die Abschließen biholomorph äquivalenten Bezugsgebiete behandeln.

Man erweitert besser dafür den Definitionsbereich einer gegebenen Kontur γ_0 vorher, indem man durch eine positive Zahl $q' < q$ die Bezeichnungen $R' = \{w | 1 - |w| < q'\}$ und $B' = B \cup R'$ einführt, wie folgt: Gehört w zu R' , so sei $\gamma_0(w) = \gamma_0(re^{\sqrt{-1}t}) = \gamma_0(e^{\sqrt{-1}t})$.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen daß das Element $Id.$ von $\mathfrak{X}$ zu $\mathfrak{X}^*[\gamma_0]$ gehört, und das $\|(\gamma_0 \circ Id.)(w)\|^2 < +\infty$ (Anmerkung I, Hilfssätze 6 u. 11). Unter Benutzung der vormaligen ähnlichen Bezeichnungen

$$\mathcal{E}_0 = \{\|(\gamma_0 \circ \tau)(w)\|^2 | \tau \in \mathfrak{A}\}$$

und

$$E_0 = \inf \mathcal{E}_0,$$

stellen wir das folgende in Ansicht:

Plan II. Ein Element $\tilde{\tau}_0$ in $\mathfrak{A}$ zu finden, so daß

$$\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)\|^2 = E_0.$$

Wählt man eine f aus $\mathcal{F}$ nach Willkür, so vollzieht die biholomorphe Transformation $z = f(w)$ eine konforme Abbildung vom konzentrischen Kreisring R in der w -Ebene auf ein zweifach zusammenhängendes Gebiet $f(R)$ in der z -Ebene. Wenn ein Aufpunkt z sich über die Kurve $f(\partial B)$ in entgegengesetzter Uhrzeigerrichtung bewegt, so dreht der Bildpunkt $\gamma_0 \circ f^{-1}(z)$ genau einmal um Bhn γ_0 . Daher läßt sich der Ausdruck $\gamma_0 \circ f^{-1}(z)$ als eine auf dem Bereich $f(R')$ erklärte Parametrisierung von γ_0 , oder einen Vorschrift unserer Randwertaufgabe mit ihrem Bezugsgebiet $\partial^{-1} \circ f(\partial B)$ ansehen. Unter Verwendung dieser engeren Parameterwechsel vom Rande wird nun der Plan II folgendermaßen durchgeführt:

HILFSSATZ 12. *Die Unterklasse $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{T}$ enthält wenigstens ein Element $\tilde{\tau}_0$, so daß*

$$\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)\|^2 = E_0.$$

BEWEIS. Es sei $\{(\gamma_0 \circ \tau_n)(w)\}_{n=1,2,\dots}$ eine Minimalfolge für den Plan II mit geeigneten Elementen $\tau_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) aus $\mathfrak{A}$. Nach Definition von τ_n gibt es die entsprechende Folge $\{(\gamma_0 \circ f_n^{-1})(z)\}_{n=1,2,\dots}$ ($f_n \in \mathcal{F}$), die der Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\gamma_0 \circ f_n^{-1})(z)\|^2 = E_0$$

genügt. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, voraussetzen daß hiermit die ursprüngliche Folge $\{f_n(w)\}_{n=1,2,\dots}$ selbst gleichmäßig innerhalb R gegen eine daselbst holomorphe Funktion $f_\infty(w)$ konvergiert (Hilfssatz 2): $f_\infty(R)$ ist wieder ein schlichtes Ringgebiet in der z -Ebene nach dem Hurwitzschen Satze, das die Bildbereiche $f_n(R')$ für alle Nummer n von einer gewissen $N \in \mathbb{Z}^+$ ab umfaßt. Daher

$$\gamma_0 \circ f_n^{-1} \rightrightarrows \gamma_0 \circ f_\infty^{-1} \quad \text{auf } f_\infty(R') \quad (n \rightarrow \infty)$$

(Hilfssatz 3), was dem gleichkommt, daß

$$\gamma_0 \circ \tau_n(t) \rightrightarrows \gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0(t) \quad \text{auf } \partial B \quad (n \rightarrow \infty)$$

mit einer $\tilde{\tau}_0 \in \mathfrak{A}$, folglich hat man

$$(\gamma_0 \circ \tau_n)(w) \rightrightarrows (\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w) \quad \text{auf } B \quad (n \rightarrow \infty).$$

Anwendung des Hilfssatzes 8 liefert schließlich

$$E_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\gamma_0 \circ \tau_n)(w)\|^2 = \|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)\|^2. \quad \text{w.z.b.w.}$$

HILFSSATZ 13. *Das Problem C läßt sich ebenfalls durch den Plan II lösen.*

BEWEIS. Wir behaupten, daß der im Hilfssatz 12 gewonnene harmonische Vektor $(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)$ wirklich eine verallgemeinerte Minimalfläche ist.

Aus typographischer Bequemlichkeit verwenden wir die kürzen Bezeichnungen g_{ij} ($i, j = 1, 2$; $g_{12} = g_{21}$) für die Komponenten des Linienelements $ds^2 = |d((\gamma_0 \circ f_\infty^{-1})(z))|^2$.

Vorausgesetzt daß das offene Teilgebiet $\partial^{-1} \circ f_\infty(\partial B(1 - q'))$ in der z -Ebene irgendeinen Punkt z_0 enthielte, wo die holomorphe Funktion $g_{11} - g_{22} - 2\sqrt{-1}g_{12}$ nicht verschwindet, so befindet sich eine Funktion $\lambda(z)$ von der Klasse $C^\infty(C, C)$, die von einem z_0 umfassenden Kompaktum $\kappa \subset \partial^{-1} \circ f_\infty(\partial B(1 - q'))$ gestützt ist und der Ungleichheit

$$(2) \quad \iint (g_{11} - g_{22} - 2\sqrt{-1}g_{12})\lambda(z)dz \wedge d\bar{z} \neq 0$$

genügt: die Integration ist hiermit über der ganzen Ebene erstreckt. Nun, wie bemerkt sofort, läßt sich das Integral vom Cauchyschen Typus

$$h(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \iint \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

wird über der Vollebene C wohldefiniert und sogar gehört zur Klasse $C^2(C, C)$ an (s. Ahlfors [1], S. 87). Wenn $|z|$ wächst ins Unendliche, sodann strebt $h(z)$ gegen Null, weshalb sie daselbst beschränkt ist. Bildet man die Funktion

$$H(z) = z + \varepsilon h(z)$$

mit einer komplexen Konstante ε , so ist sie glatt über C und holomorph außerhalb κ . Da das Differential der nicht-analytischen Funktion $H(z)$ lautet $dH(z) = (1 + \varepsilon h_z)dz + \varepsilon h_{\bar{z}}d\bar{z}$, gelangen wir nach Integration längs der zwei Punkte z_j ($j = 1, 2$) verbindenden Strecke zu einer Identität

$$H(z_2) - H(z_1) = z_2 - z_1 + \varepsilon \int_{z_1}^{z_2} (h_z dz + h_{\bar{z}} d\bar{z}).$$

Ist $|\varepsilon|$ hinreichend klein, so folgt aus $h_{\bar{z}} = \lambda(z)$, daß

$$|H(z_2) - H(z_1)| \geq |z_2 - z_1| - |\varepsilon| \int_{z_1}^{z_2} (|h_z| + |\lambda(z)|)|dz| > 0,$$

insofern $z_1 \neq z_2$: d. h. $H(z)$ liefert einen quasikonformen Homöomorphismus zwischen C , der in R' holomorph ist. Die in R wohldefinierte zusammengesetzte Abbildung $\tilde{f}(w) = H \circ f_\infty(w)$ gehört zu der Familie $\mathcal{F}$, woher stellt sich $(\gamma_0 \circ \tilde{f}^{-1})(z) \in H[\gamma_0]$ heraus, eine Konkurrenzfunktion für den

Plan II zu sein. Darum gilt die Ungleichung

$$(3) \quad \|(\gamma_0 \circ \tilde{f}^{-1})(z)\|^2 \geq \|(\gamma_0 \circ \tilde{f}_\infty^{-1})(z)\|^2$$

nach dem Hilfssatz 12. Die erste Variation des in (3) linksstehenden Dirichletschen Integrals, als Funktional in H angesehen, muß für $\varepsilon = 0$ verschwinden, d.h.

$$\iint (g_{11} - g_{22} - 2\sqrt{-1}g_{12})h_z dz \wedge d\bar{z} = 0$$

(s. Gerstenhaber-Rauch [3]). Wir sehen ein, daß Ersetzung der Beziehung $h_z = \lambda(z)$ in die obigen mit (2) in Widerspruch steht: $g_{11} - g_{22} - 2\sqrt{-1}g_{12}$ verschwindet überall innerhalb ihrer Definitionsbereich, d.h. w ist ein isothermer Parameter für den harmonischen Vektor $(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)$. w.z.b.w.

Zufolge des Hilfssatzes 11 stellt sich $\mathcal{E}_0$ heraus, ein echter Unterraum von $\mathcal{E}$ zu sein, der in der im Hilfssatz 3 zur Sprache kommenden Topologie für sich kompakt ist. Daraus läßt sich folgern der

HILFSSATZ 14. *Es gilt die Ungleichung $E_0 > \underline{E}$.*

Unter Zusammensetzung der Hilfssätze 13 und 14 erhalten wir schließlich den

SATZ 3. *$\mathfrak{M}[\gamma_0]$ enthält eine Minimalfläche $(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)$, die nicht vom minimalen Typus ist.*

5. Häufungsstellen im Raum $\mathfrak{M}[\gamma_0]$. Man soll sich eingangs daran erinnern, daß die im Satz 3 auftretende Minimalfläche $(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_0)(w)$ vom ganz beliebigen Anfangstransformation $\tau_0(t)$ aus hergeleitet worden ist. Anwendung der Hilfssätze 6 und 4 auf diese Transformation liefert den

HILFSSATZ 15. *Zu jedem Punkte τ_0 vom Raum $\mathfrak{X}$ wird seine Umgebung $\mathfrak{U}$ zugeteilt, so daß es $\|(\gamma_0 \circ \tau)(w)\|^2 < +\infty$ für alle $\tau \in \mathfrak{U}$ gilt und daß $\mathfrak{U} \cap (\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A})$ überall dicht auf $\mathfrak{U}$ ist.*

Wir haben bereits ersehen, daß jede Anfangstransformation $\tau = \tau(t)$ aus $\mathfrak{U}$ eine besondere Grenztransformation $\tilde{\tau}(t)$ veranlaßt—wenn auch nicht auf eindeutige Weise im allgemein—, ebenfalls wie die feste Anfangstransformation $\tau_0(t) = Id.$ von demselben Kollektiv ihre Grenztransformation $\tilde{\tau}_0(t)$ hervorgehoben hat. Von nun an soll jede der von einer beliebigen Anfangstransformation von $\mathfrak{U}$ —z.B. $\tau(t)$ —zu induzierende Grenztransformation ein für allemal durch denselben aber mit der Tilde zugeschriebenen Buchstaben—wie $\tilde{\tau}(t)$ —dargestellt werden. Gultigkeit nachstehender Aussagen wird kaum des Beweises bedürfen:

HILFSSATZ 16. *Die folgenden drei Bedingungen sind äquivalent:*

- (a) $\tau \sim \tau' \pmod{\mathfrak{U}};$
- (b) $\tilde{\tau} \sim \tilde{\tau}' \pmod{\mathfrak{U}};$
- (c) $\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau})(w)\|^2 = \|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}')(w)\|^2.$

Nun die Gesamtheit der miteinander nicht $\mathfrak{U}$ -äquivalenten Anfangstransformationen eine dichte Teilmenge von $\mathfrak{U}$ ausgemacht hat, findet die letztgenannte Proposition eine wichtige Umformung:

HILFSSATZ 17. *Es existiert unendlich viele miteinander nicht- $\mathfrak{U}$ -äquivalente Grenztransformationen $\tilde{\tau}$ für den Plan II, entsprechend den Anfangstransformationen τ in $\mathfrak{U}$, deren Dirichletsche Energieintegrale $\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau})(w)\|^2$ ebenfalls voneinander verschiedene Werte besitzen.*

Dank der isoperimetrischen Ungleichung, die glücklicherweise auch bei verallgemeinerten Minimalflächen gültig ist, können wir allen den nachherigen Überlegungen die nächststehende Tatsache zugrunde legen:

HILFSSATZ 18 (Isoperimetrische Ungleichung). *Alle die der Klasse $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ angehörigen Flächen besitzen gewisse von der absoluten Konstante $L_0^2/4\pi$ nach oben beschränkte Inhalte, wo L_0 die Gesamtlänge von γ_0 bezeichnet.*

HILFSSATZ 19. *Das Dirichletsche Integral $\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau})(w)\|^2$ der Minimalfläche ist ein stetiges Funktional in ihrer Anfangstransformation $\tau \in \mathfrak{U}$.*

BEWEIS. Es sei τ nach Willkür aus $\mathfrak{U}$. Zu einem vorgeschriebenen reellen $\varepsilon > 0$ existiert eine positive Zahl δ , so daß jedes dem Erfordernis

$$|\gamma_0 \circ \tau(t) - \gamma_0 \circ \tau'(t)| < \delta$$

unterworfenen Element τ' von $\mathfrak{U}$ notwendigerweise der Ungleichung

$$|\|(\gamma_0 \circ \tau)(w)\|^2 - \|(\gamma_0 \circ \tau')(w)\|^2| < \varepsilon$$

genügt (Hilfssatz 8). Im Besitze derjenigen τ' als Anfangstransformation denken wir uns den Plan II durchzuführen. Sei $\{f_n(w)\}_{n=1,2,\dots}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von $\mathcal{F}$, für welche $\{\|((\gamma_0 \circ \tau') \circ f_n^{-1})(z)\|^2\}_{n=1,2,\dots}$ sich als die fragliche Minimalfolge gestaltet. Beim Übergang $n \rightarrow \infty$ gibt es eine Grenzfunktion $f_\infty \in \mathcal{F}$, so daß für beliebige positive Zahl $q' < q$

$$f_n(w) \rightrightarrows f_\infty(w), \quad (w \in B(1 + q') \setminus B(1 - q'), \quad n \rightarrow \infty),$$

und

$$\|(\gamma_0 \circ \tau) \circ f_\infty^{-1}(z)\|^2 - \|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau}')(w)\|^2 \leq \varepsilon$$

(Hilfssätze 2 u. 3), somit

$$\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau})(w)\|^2 - \|(\gamma_0 \circ \tau')(w)\|^2 \leq \varepsilon.$$

Da die Vertauschung von τ' durch τ die umgekehrte Ungleichheit anbietet, erhält man schließlich

$$|\|(\gamma_0 \circ \tilde{\tau})(w)\|^2 - \|(\gamma_0 \circ \tau')(w)\|^2| \leq \varepsilon. \quad \text{w.z.b.w.}$$

Nun ist der Plan II imstande, jedes Element τ von $\mathfrak{U}$ als Anfangstransformation durchgeführt zu werden, wobei die entsprechenden Energiewerte der Lösungsminimalflächen von der Konstante $L_0^2/4\pi$ nach oben beschränkt bleibt. Dieser Sachverhalt ermöglicht uns die endliche Größe

$$\tilde{E} = \sup \{ \|(\gamma_0 \circ \tau)(w)\|^2 \}$$

einzuführen, wo die kleinste obere Grenze hinsichtlich allen den Anfangstransformationen τ von $\mathfrak{U}$ genommen wird.

HILFSSATZ 20. $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ enthält eine Minimalfläche, deren Dirichletsches Energieintegral den Wert $\tilde{E}$ erreicht.

BEWEIS. Es sei $\{(\gamma_0 \circ \tau_n)(w) | \tau_n \in \mathfrak{U}\}_{n=1,2,\dots}$ eine Maximalfolge, so daß $\{\|(\gamma_0 \circ \tau_n)(w)\|^2\}_{n=1,2,\dots}$ gegen den Wert $\tilde{E}$ zustrebt. Vermöge der gleichgradigen Stetigkeit ihrer Randwerte $\gamma_0 \circ \tau_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) enthält die harmonische Vektorfolge $\{(\gamma_0 \circ \tau_n)(w)\}_{n=1,2,\dots}$ eine gewisse in der Kreisscheibe B gleichmäßig konvergente Teilfolge, die der Kürze wegen mit derselben Bezeichnungen geschrieben werden soll.

Die Grenzvektor $\mathfrak{x}(w)$ ist wieder noch harmonisch innerhalb B , stetig bis auf B , gehört der Klasse $C(\partial B, \text{Bhn } \gamma_0)$, und bewegt sich längs $\text{Bhn } \gamma_0$ auf eine monotone Weise mit einem Umlauf des Parameters w über ∂B .

Das Harnacksche Prinzip bestätigt die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitungen von $(\gamma_0 \circ \tau_n)(w)$ gegen die entsprechenden von $\mathfrak{x}(w)$ auf beliebiger konzentrischer Teilkreisscheibe $B(r)$, somit stellt sich der Parameter w auch für $\mathfrak{x}(w)$ auf dem ganzen Innern von B isotherm zu sein heraus. Nach dem Hilfssatz 10 gibt es eine $\tau_\infty \in \mathfrak{T}$, so daß der Grenzvektor $\mathfrak{x}(w)$ sich zu $(\gamma_0 \circ \tau_\infty)(w)$ gestaltet, folglich gehört er zu $\mathfrak{M}[\gamma_0]$. w.z.b.w.

Sowohl im obenbenannten Maximalfolgenglieder vorkommenden Minimalflächen als auch ihre Grenzminimalfläche von $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ sollen hiernach mit den neuen Bezeichnungen herangezogen werden, d.h. $S_n(w)$ ($n = 1, 2, \dots$) und $S_0(w)$ beziehungsweise. Die letztere $S_0(w)$ stimmt gerade mit einer von denjenigen Minimalflächen überein, deren Existenz in der Einleitung vorausgesagt wurde, wie von jetzt ab nacheinander sich aufklärt.

Nach dem Hilfssatz 17 bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen daß $\tau_n \not\sim \tau_m \pmod{\mathfrak{A}}$; $n \neq m$), sogar ja $S_n(w) \neq S_m(w) \neq S_0(w)$, insofern $n \neq m$. Hieraus der

SATZ 4. *Inbezug auf die Topologie gleichmäßiger Konvergenz im Parameterbereich B gestattet $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ eine Häufungsstelle $S_0(w)$.*

Sei $S(w)$ eine Fläche von $\mathfrak{S}[\gamma_0]$, oder allgemeiner, eine durch Bhn γ_0 berandete glatte Fläche. Wir möchten die in $\mathbf{R}^3$ stehende Punktmenge $\{x = S(w) | w \in B\}$ Träger von S nennen, indem wir sie in Analogie zu Bhn mit $\text{Trg } S$ bezeichnen. Denken wir uns nun, daß zu jedem Punkt $\mathfrak{x}$ von $\text{Trg } S_0$ eine ε -Umgebung $V_\varepsilon(\mathfrak{x}) = \{\mathfrak{y} \in \mathbf{R}^3 | |\mathfrak{y} - \mathfrak{x}| < \varepsilon\}$ zugeordnet ist: die Vereinigungsmenge $\mathfrak{B}_\varepsilon[S_0] = \cup \mathfrak{B}_\varepsilon(\mathfrak{x})$ bei ganzem Durchlaufen des Aufpunktes $\mathfrak{x}$ über $\text{Trg } S_0$ wird ε -Umgebung von $\text{Trg } S_0$ im naturellen Sinne ausmachen.

Eine nochmalige Anwendung des Hilfssatzes 16 erlaubt uns daran zu halten, daß es immer $\|S_n(w)\|^2 \neq \|S_m(w)\|^2$ ($n \neq m$) gilt. Man ist also imstande, die folgende Behauptung (A) aufzustellen:

(A) Zu einer beliebigen positiven Zahl ε gibt es eine $N_1 \in \mathbf{Z}^+$ derart, daß es

$$\|S_0(w)\|^2 - \varepsilon < \|S_n(w)\|^2 < \|S_0(w)\|^2$$

gilt, sobald $n \geq N_1$.

(B) Ist andererseits $N_2 \in \mathbf{Z}^+$ genügend groß im Vergleich zu der gegebenen $\varepsilon > 0$, so wird $\text{Trg } S_n \subset \mathfrak{B}_\varepsilon[S_0]$ für alle $n \geq N_2$, weil der kürzeste Abstand zwischen $\text{Trg } S_0$ und $\text{Trg } S_n$ den Konvergenzmodul $\text{Max}_{w \in B} |S_n(w) - S_0(w)|$ nicht überschreitet.

(C) Im Besitz der Definition $S_0(w) = (\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_\infty)(w)$ ist übrigens ersichtlich, daß es eine nicht harmonische Abbildung $S(w)$ von $\text{Int } B$ mit dem Randwert $\gamma_0 \circ \tilde{\tau}_\infty(t)$ gibt, welche der beiden Bedingungen, $\text{Trg } S \subset \mathfrak{B}_\varepsilon[S_0]$ und $\|S(w)\|^2 > \|S_0(w)\|^2$, genügt.

Um die Gültigkeit der Behauptung (C) einzusehen, teile man die Kreisscheibe B mittels eines Durchmessers, z.B. $D = \{u | |u| < 1\}$ in zwei Halbkreise $B^\pm$ —den oberen und den unteren—ein und setze die Dirichletschen Probleme mit den Bezugsgebieten $B^\pm$ an, so daß ihre Lösungen $\mathfrak{x}^\pm(w)$ auf dem einzelnen Bereich B^+ und B^- den folgenden Bedingungen genügen:

- (1°) $\mathfrak{x}^+(w)$ ist stetig bis auf $B^+ \cup \partial B^+$ und harmonisch innerhalb B^+ ;
- (2°) $\mathfrak{x}^-(w)$ ist stetig bis auf $B^- \cup \partial B^-$ und harmonisch innerhalb B^- ;
- (3°) $\mathfrak{x}^\pm(w) = S_0(w)$ auf ∂B ;
- (4°) $\mathfrak{x}^\pm(u) \neq S_0(u)$ auf D .

Ist die Abweichung $\text{Max}_{u \in \bar{D}} |S(u) - S_0(u)|$ im Verhältnis zu ε genügend

klein, so $\text{Trg } S \subset \mathfrak{B}[S_0]$, andererseits ist das Erfordernis $\|S(w)\|^2 > \|S_0(w)\|^2$ vermöge der Bedingung 4° und das Dirichletschen Prinzips immer noch erfüllt. Anwendung des bekannten Glättungsprozesses auf die jetzt entstandene Abbildung ermöglicht außerdem, im Rahmen der glatten Flächen das Ziel zu erreichen.

(D) Weiter ist zu bemerken, daß eine quasikonforme Transformation des Flächenparameters innerhalb B den Energiewert der fraglichen Fläche ihrem Inhalt gleich macht.

Schließlich gelangen wir in Verbindung der obigen Betrachtungen (A)–(D) zum

HILFSSATZ 21. *In einer beliebigen ε -Umgebung von $\text{Trg } S_0$ befindet sich ein Paar glatte Flächen, welche die Kontur γ_0 spannen und jede von denen echt größeren bzw. echt kleineren Inhalt als S_0 besitzt.*

Hieraus

SATZ 5. $\mathfrak{M}[\gamma_0]$ enthält eine instabile Minimalfläche $S_0(w)$.

Vermittels der Sätze 4 und 5 ist der Hauptsatz vollständig bewiesen worden.

6. Schlußbemerkung. Wir werden die Voraussetzung von Nicht-Analytizität über die Berandung γ_0 auf ihren Einfluß prüfen, die auf unsere Beweisführung ausübt hat. Merkwürdigerweise haben alle die Auseinandersetzungen in §§ 4–5 nichts zu verändern, auch wenn man sich von einer analytischen Jordankurve γ_0 ausgehend angestellt haben mag: die Nicht-Analytizität der resultierenden Funktion $S_0(w)$ in bezug auf den Randparameter $w \in \partial B$ wird immer noch beibehalten. In diesem Sinne handelt es sich nicht darum, ob $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{ana}}$ oder $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{rek}} \setminus \Gamma_{\text{ana}}$.

Darum, wenn man die Verschiedenheit zwischen den Voraussetzungen $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{ana}}$ und $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{rek}} \setminus \Gamma_{\text{ana}}$ hervorheben will, nämlich wenn seine Anfangsparametrisierung $\gamma_0 \in \Gamma_{\text{ana}}$ betont und seine Wirkung bis zu Ende nachgelassen werden sollte, sodann stellt es sich heraus, daß der Bereich von Randparameterwechsel τ lediglich auf $\mathfrak{A}$ abgegrenzt werden müßte. Es wird aber eine irgendwo anders zu befassende Frage sein (vgl. H. Lewy [4], Shibata [5]).

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. V. AHLFORS, Lectures on quasiconformal mappings, Van Nostrand Mathematical Studies No. 10, Princeton-Toronto-New York-London, 1966.
- [2] R. COURANT, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces, Interscience Publishers, New York, 1950.

- [3] M. GERSTENHABER AND H. E. RAUCH, On extremal quasiconformal mappings I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 40 (1954), 808-812.
- [4] H. LEWY, On the boundary behavior of minimal surfaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), 103-110.
- [5] K. SHIBATA, Isolated solutions in Plateau's problem, preprint.
- [6] A. ZYGMUND, Trigonometric series, Vol. 1, Cambridge University Press, London 1968.

MATHEMATISCHES INSTITUT
BILDUNGSANSTALT
UNIVERSITÄT OSAKA
TOYONAKA 560, OSAKA
JAPAN