PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 150, No. 2, 1991

SUR LA RIGIDITE COMPAREE DE FONCTIONS, DISTRIBUTIONS, OU HYPERFONCTIONS ANALYTIQUES PAR RAPPORT A UN GROUPE DE VARIABLES

J. A. MARTI

The rigidity of some analytical or partially analytical objects: functions, distributions and hyperfunctions whose support has a compactness property is studied by the mean of testing families called "suites d'unicité". The lack of rigidity of partially analytical hyperfunctions with arbitrary support is also discussed by using a weakened form of a Sato's conjecture and a special type of valuation operator.

1. Introduction. Certains théorèmes d'unicité pour les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, font intervenir les valeurs prises par les dérivées successives $f^{(k)}$ de la fonction étudiée en certains points z_k de $\mathbb{C}^n$.

De nombreux auteurs ont abordé ce genre de problèmes, parmi lesquels: Alander, Boas, Gontcharoff, Polya, Erdös, Rényi, Wilf, etc. Certains de leurs résultats ont été retrouvés ou généralisés par L. A. Rubel et B. A. Taylor [**RT**] et Nguyen Thanh Van [**N**] qui ont utilisé les propriétés de bases de fonctions.

Nous avons étudié cette question par une méthode différente, résumée au §2, qui applique à des espaces de fonctions holomorphes des résultats concernant la totalité de familles particulières [**M1**], [**M2**] et qui généralisent aux E. V. T. localement convexes ou à leurs duals, le point de vue de Ph. Davis et Ky Fan [**DF**] sur les suites totales dans des espaces normés ainsi qu'un théorème d'approximation du type de "Paley-Wiener" ([**A**] et [**B**]).

Et si certains de nos résultats coïncident avec ceux de [**RT**] ou [**N**], d'autres non, par suite des différences de techniques et d'hypothèses. Celles que nous faisons dans le Théorème 2.4 permettent d'interpréter celui-ci comme mesurant en fait la "rigidité" de la fonction analytique concernée.

On sait en effet qu'une application analytique f d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine dans $\mathbb{C}$ (ou dans un E. V. T. localement convexe séparé) est complètement déterminée dans la composante connexe contenant ce point par la donnée des $f^{(k)}(0)$ et le Corollaire 2.8 montre qu'il en est encore ainsi si on remplace cette donnée par celle des

$f^{(k)}(z_k)$ où $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n} = (z_1(k), \ldots, z_n(k))_{k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ est une suite de points de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition: Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$: $z_k \in \Omega_{1/h}$ et

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - h_i |z_i(k_i)|} \right)^{k_i+1} \leq D < 2,$$

avec $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n_+$ et où $\Omega_{1/h}$ est le polydisque:

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n, \, |z_i| < \frac{1}{h_i} \text{ pour } i = 1, \ldots, n \right\}.$$

D'une certaine manière, la suite (z_k) mesure la "résistance" de la fonction analytique f à perdre sa propriété d'unicité.

Il nous a donc paru intéressant de tester sur une telle suite, appelée suite d'unicité au §3, avec une définition un peu plus générale (Déf. 3.1), la rigidité d'autres objets mathématiques possédant une propriété d'analyticité comme les fonctions analytiques réelles étudiées au §3 ou aux §4 et 5, les distributions et les hyperfonctions analytiques par rapport à un groupe de variables, dont la définition est précisée dans **[K1]** ou **[SKK]**.

Ce point de vue se justifie parce que les hyperfonctions analytiques par rapport à un groupe de variables et dont le support a une projection compacte sur l'espace des autres variables, possèdent déjà, par rapport au premier groupe de variables, la propriété d'unicité forte, autrement dit sont testées positivement sur la suite nulle, comme on peut le voir dans un article de Kaneko **[K1]**.

Relativement à la rigidité de leur comportement, on peut comparer les hyperfonctions de ce type aux fonctions analytiques réelles: il faut élargir la définition des suites d'unicité en celle d'unicité forte (Def. 4.1) pour obtenir un théorème d'unicité (Th. 4.3 et 5.3). Certaines distributions se comportent de la même manière mais nous n'avons pas pu élargir la classe de celles dont le support est quelconque au delà du sous-espace des fonctions analytiques par rapport à un groupe de variables réelles et à valeurs dans l'espace des distributions relatif aux autres variables (Th. 5.5).

Les hyperfonctions analytiques par rapport à une (ou un groupe) de variable(s) sont encore bien moins rigides puisqu'aucune de nos suite d'unicité, pas même la suite nulle, ne peut garantir le résultat d'unicité souhaité. Cela s'explique en partie par un contre- exemple construit par Sato **[K1]** montrant qu'il existe des hyperfonctions u analytiques

par rapport à la variable x_n, non identiquement nulles, vérifiant la condition:

$$\text{Pour tout } P(D) \in \mathscr{P}_0 \colon P(D)u|_{x_n=0} \equiv 0$$

où $\mathscr{P}_0$ est l'ensemble des opérateurs différentiels à coefficients constrants. Il a conjecturé que la condition en question pouvait entraîner la nullité de u si on élargit $\mathscr{P}_0$ à $\mathscr{P}$, ensemble des opérateurs locaux $J(D) = \sum_k C_k D^k$ d'ordre infini opérant sur les hyperfonctions c'est-à-dire tels que: Pour tout $H > 0$ il existe $A > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^n$:

$$|C_k| \leq A \frac{H^{|k|}}{k!}.$$

Cette conjoncture a été démontrée par Kaneko [**K2**]. C. C. Chou et moi-même ([**CM**], Th.) avons montré que pour obtenir le résultat il suffit en fait de prendre une classe intermédiaire d'opérateurs, soit $\mathscr{L}$, qui est la réunion pour toutes les classes de fonctions non quasi-analytiques, des ensembles d'opérateurs d'ordre infini opérant sur ces classes, c'est-à-dire:

$$P(D) = \sum_k C_k D^k \in \mathscr{L} \quad \text{si, et seulement si :}$$

$$|C_k| \leq A \frac{H^{|k|}}{M_{|k|}}, \quad \text{où} \sum_k \left(\frac{1}{M_{|k|}}\right)^{1/|k|} < +\infty.$$

On peut obtenir (Th. 6.5) un autre prolongement de cette conjecture en associant à une suite d'unicité forte un ensemble $\mathscr{V}$ d'opérateurs de valuation locale $V(D_{x_n})$ tels que si u est une hyperfonction analytique au voisinage de 0 par rapport à la variable x_n et que pour tout $V(D_{x_n}) \in \mathscr{V}$:

$$V(D_{x_n})u|_{x_n=0} \equiv 0,$$

alors u est identiquement nulle au voisinage de 0.

2. Théorèmes d'unicité pour fonctions analytiques d'une ou plusiers variables complexes. L'espace $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ que décrit le Théorème 2.4 n'est pas réflexif ni même semi-réflexif, ce qui aurait pourtant été commode ([**M2**], Prop. 3.1) pour retraduire dans l'espace les propriétés de totalité établies dans le dual pour certaines familles. Les lemmes et la définition: 2.1, 2.2, 2.3, exploitent une propriété plus faible que la semi-réflexivité mais pouvant la remplacer.

2.1. LEMME. (A_1) *Soient: X un sous-espace d'un E.V.T.L.C. séparé Y, X' et Y' leurs duals respectifs, X'' le bidual de X. I étant un*

ensemble d'indices, soit $(L_i)_{i\in I}$ *une famille de formes linéaires continues sur* X.

(A_2) *On suppose qu'il existe un isomorphisme algébrique de* Y *sur* X'': $y \to \varphi$ *tel que pour tout* $L \in X'$ *on ait:*

$$\varphi(L) = \overline{L}(y)$$

$\overline{L} \in Y'$ *désignant un prolongement bien déterminé de L. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que la famille* $(L_i)_{i\in I}$ *soit totale est:*

(P) *les conditions:* $y \in Y$ *et* $\overline{L}_i(y) = 0$ *pour tout* $i \in I$, *impliquent* $y = 0$.

Démonstration. Puisque $(L_i)_{i\in I}$ est totale dans X', soit donc $y \in Y$ tel que: pour tout $i \in I$: $\overline{L_i}(y) = 0$.

D'après l'hypothèse, il existe $\varphi \in X''$ tel que:

$$\text{pour tout } L \in X' \colon \varphi(L) = \overline{L}(y).$$

Dire que $(L_i)_{i\in I}$ est totale dans X' signifie que les conditions $\psi \in X''$ et $\psi(L_i) = 0$ pour tout $i \in I$ impliquent $\psi = 0$. On a donc:

$$\text{pour tout } i \in I \colon \varphi(L_i) = \overline{L_i}(y) = 0.$$

Ceci entraîne que $\varphi = 0$, donc aussi $y = 0$, par isomorphisme. La condition est donc nécessaire. Pour montrer sa suffisance, supposons que la condition (P) soit vérifiée et soit donc $\varphi \in X''$ tel que:

$$\text{pout tout } i \in I \colon \varphi(L_i) = 0.$$

D'après l'hypothèse, il existe donc $y \in Y$ tel que:

$$\varphi(L) = \overline{L}(y) \text{ pour tout } L \in X'.$$

On a alors:

$$\text{pour tout } i \in I \colon \varphi(L_i) = \overline{L_i}(y) = 0.$$

On en déduit que $y = 0$, donc aussi, par isomorphisme, que $\varphi = 0$.

Les définitions et le lemme suivants vont préciser un cas où l'hypothèse A_2 du Lemme 2.1 est vérifiée.

2.2. *Définition.* Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, I un ensemble d'indices, S l'ensemble des familles de scalaires indexées par I, φ une bijection de V sur une partie σ de S

$$\varphi \colon x \to (a_i)_{i\in I}$$

telle que, pour chaque $i \in I$, l'application $l_i : x \to a_i$ soit une forme linéaire sur V.

Si W est un sous-espace de V, W muni d'une topologie compatible avec sa structure d'espace vectoriel, nous précisons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de W est une base de W si $l_i(x_k) = \delta_{ik}$ pour tout $i \in I$ et $k \in I$ et si pour tout $x \in W$, la famille $(l_i(x)x_i)_{i\in I}$ est sommable dans W et a pour somme x.

Soient encore q une application de I dans $\mathbb{R}_+^*$, F le sous-espace de V formé des x tels que:

$$\sup_{i\in I} \frac{|l_i(x)|}{q(i)} < +\infty,$$

E le sous-espace de V formé des x tels que:

$$\lim_i \frac{|l_i(x)|}{q(i)} = 0.$$

2.3. LEMME. *Si F est muni de la norme $\|x\| = \sup_{i\in I}(|l_i(x)|/q(i))$, E de la topologie induite, si σ comprend toutes les familles $(a_i)_{i\in I}$ telles que $\sup_{i\in I}(|a_i|/q(i)) < +\infty$ et s'il existe dans E une base $(x_i)_{i\in I}$ alors:*

Il existe un isomorphisme algébrique de I sur le bidual E'' de E, $y \to \varphi$, permettant de prolonger sélectivement tout $L \in E'$ en $\overline{L} \in F'$ tel que $\varphi(L) = \overline{L}(y)$.

Démonstration abrégée. (a) Caractérisation du dual E' de E.

(a_1) Soit $x = \sum_{i\in I} l_i(x)x_i \in E$. Comme on a: $L \in E'$ alors: $L(x) = \sum_{i\in I} l_i(x)L(x_i)$. Et $L(p_k) = \sum_{j\in K} q(j)|L(x_i)|$ est borné quand on prend $p_k = \sum_{j\in K} q(j)e^{i\theta_j}x_j$, où j est choisi de manière à ce que $e^{i\theta_j}L(x_j) = |L(x_j)|$ pour $j \in K$, partie bornée de I, de sorte que $\|p_k\| = 1$. Il en résulte que la famille $(|L(x_i)|q(i))_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$.

(a_2) Pour toute famille $(b_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que $(|b_i|q(i))_{i\in I}$ soit sommable dans $\mathbb{R}$, il existe un unique $L \in E'$ tel que $L(x_i) = b_i$.

Nos hypothèses montrent facilement que L est défini par $L(x) = \sum_{i\in I} l_i(x)b_i$.

(b) $(l_i)_{i\in I}$ est une base forte de E'.

On considère les formes linéaires sur E': $\beta_i: L \to L(x_i)$ et on a les majorations:

$$\left\| \sum_{i \in K} \beta_i(L) l_i - L \right\|_{E'} \leq \sum_{i \in I \setminus K} q(i)|b_i|$$

qui prouvent que la famille $(\beta_i(L)l_i)_{i \in I}$ est sommable dans E' et a pour somme L.

(c) Le prolongement de $L \in E'$.

Comme la famille $(|L(x_i)|q(i))_{i \in I}$ est sommable dans R et que pour tout $y \in F$: $|l_i(y)| \leq q(i)\|y\|_F$, on peut poser:

$$\overline{L}(y) = \sum_{i \in I} l_i(y) L(x_i).$$

Donc $\overline{L}$ est continu sur F et prolonge L à F.

(d) Caractérisation de l'isomorphisme de F sur E''.

(d_1) Si $y \in F$, l'application $\varphi: L \to \overline{L}(y)$ de E' dans $\mathbb{C}$ est fortement continue sur E' comme le prouvent les inégalités suivantes, la seconde résultant de $\|p_k\| = 1$:

$$|\overline{L}(y)| \leq \left(\sum_{i \in I} |L(x_i)|q(i) \right) \|y\|_F \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} |b(x_i)|q(i) \leq \|L\|_E.$$

(d_2) Réciproquement, soit $\varphi \in E''$.

Pour tout $L = \sum_{i \in I} b_i l_i \in E'$ on a:

$$\varphi(L) = \sum_{i \in I} b_i \varphi(l_i) \quad \text{et} \quad |\varphi(l_i)|H\|l_i\|_{E'} \leq Hq(i).$$

La restriction de φ à F étant un bijection de F sur $\varphi(F) \subset \sigma$, $\varphi(F)$ contient donc toutes les familles $(a_i)_{i \in I}$ telles que

$$\sup_{i \in I}(|a_i|/q(i)) < +\infty.$$

Il existe donc $y \in F$ déterminé par la bijection φ^{-1} de $\varphi(F)$ sur F tel que:

$$\varphi(L) = \sum_{i \in I} b_i \varphi(l_i) = \sum_{i \in I} l_i(y) b_i = \overline{L}(y).$$

2.4. THÉORÈME. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^n$, contenant l'origine, $\mathscr{O}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω, σ_Ω l'ensemble des familles $(f^{(k)}(0)/k!)_{k \in \mathbb{N}^n}$ obtenues guand f décrit $\mathscr{O}(\Omega)$, q une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que σ_Ω contienne toutes les familles*

$(a_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ pour lesquelles $\sup(|a_k|/q(k)) < +\infty$. *On désigne par* $\mathscr{O}_q(\Omega)$ *le sous-espace de* $\mathscr{O}(\Omega)$ *des fonctions* f *telles que*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^n}(|f^{(k)}(0)|/k!q(k)) < +\infty$$

et on considère la famille $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ *où* $z_k = (z_1(k), \ldots, z_n(k)) \in \Omega$ *pour laquelle on suppose que pour tout* $k \in \mathbb{N}^n$:

$$\frac{1}{q(k)} \sum_{p\in\mathbb{N}^n} \frac{(k+p)!}{k!p!} q(k+p)|z_k|^p \leq H < 2,$$

où H *est une constante. Alors, si* $f \in \mathscr{O}_q(\Omega)$ *et si* $f^{(k)}(z_k) = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^n$, f *est identiquement nulle.*

Démonstration. Elle passe par plusieurs étapes.

(a) L'application $l_k : f \to a_k = f^{(k)}(0)/k!$ est une forme linéaire sur $\mathscr{O}(\Omega)$ et l'application $f \to (a_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est une bijection de $\mathscr{O}(\Omega)$ sur σ_Ω.

(b) Soit $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ le sous-espace des fonctions f telles que

$$\lim_k(|a_k|/q(k)) = 0.$$

En munissant $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ et $\mathscr{O}_q(\Omega)$ de la topologie décrite au 2.2, on peut voir que la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ définie par $f_k(z) = z^k$, est une base de $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$. Cela résulte de ce que, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}^n$:

$$\left\| \sum_{k\in J} l_k(f) - f \right\|_{\mathscr{O}_q^0(\Omega)} = \sup_{k\in\mathbb{N}^n\setminus J} \frac{|a_k|}{q(k)}$$

et de ce que l'application: $k \to |a_k|/q(k)$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ a pour limite 0 suivant le filtre des sections de $\mathbb{N}$.

(c) Soit L_k la restriction à $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ de la forme linéaire l_k. Alors la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est totale dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$.

En effet, tout $L \in [\mathscr{O}_q^p(\Omega)]'$ pour lequel on peut écrire, suivant la base f_k :

$$L(f) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} l_k(f)L(f_k) \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{O}_q^0(\Omega)$$

peut être prolongé d'après le Lemme 2.3, en $\overline{L} \in [\mathscr{O}_q(\Omega)]'$ tel que:

$$\overline{L}(g) = \sum_{k\in\mathbb{N}^n} l_k(g)L(f_k) \quad \text{pour tout } g \in \mathscr{O}_q(\Omega).$$

Ceci établit d'une part l'isomorphisme algébrique de $\mathscr{O}_q(\Omega)$ sur $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]''$: $g \to \varphi$, tel que:

$$\varphi(L) = \overline{L}(g) \quad \text{pour tout } L \in [\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$$

et prouve d'autre part que le prolongement de L_k à $\mathscr{O}_q(\Omega)$ n'est autre que la forme linéaire sur $\mathscr{O}_q(\Omega)$:

$$\overline{L}_k : g \to l_k(g) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}.$$

Dire alors que les conditions $g \in \mathscr{O}_g(\Omega)$ et $\overline{L}_k(g) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ impliquent $g = 0$ n'est que reformuler un énoncé classique sous la forme de la condition (P) du Lemme 2.1 dont les hypothèses sont par ailleurs vérifiées. On en déduit donc que la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est totale dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$.

(d) Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ la famille des formes linéaires sur $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ définie par $M_k(f) = f^{(k)}(z_k)/k!$. Alors cette famille est totale dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$.

Pour le prouver, on commence par calculer $M_k(f)$ pour $f = \sum_k a_k f_k \in \mathscr{O}_q^0(\Omega)$, par la série de Taylor à l'origine ce qui montre que:

$$M_k = \sum_{p\in\mathbb{N}^n} \frac{(k+p)!}{k!p!} z_k^p l_{k+p} \in [\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$$

et permet de calculer le prolongement $\overline{M_k}$ de M_k en $g \in \mathscr{O}_q(\Omega)$:

$$\overline{M_k}(g) = \sum_{p\in\mathbb{N}^n} \frac{(k+p)!}{k!p!} z_k^p l_{k+p}(g) = \frac{g^{(k)}(z_k)}{k!}.$$

Soient A une partie finie de $\mathbb{N}^n$ et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ une famille quelconque de coefficients complexes. Comme la boule unité B de $\mathscr{O}_q^0(\Omega)$ est caractérisée par les $f = \sum_k a_k f_k$ tels que $|a_k| \le q(k)$, on a, dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$:

$$\left\| \sum_{k\in A} \lambda_k L_k \right\| = \sup_{|a_k|\le q(k)} \left| \sum_{k\in A} \lambda_k a_k \right| \ge \sum_{k\in A} |\lambda_k| q(k).$$

L'inégalité résulte du calcul de L_k sur le "polynôme" $P_A = \sum_{k\in A} q(k) e^{i\theta_k} f_k \in B$ où θ_k est choisi pour que $e^{i\theta_k}\lambda_k = |\lambda_k|$. D'autre part, on a, pour $f \in B$, et en utilisant les hypothèses sur la famille $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$:

$$\left| \frac{f^{(k)}(z_k) - f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \sum_{p\in\mathbb{N}_+^n} \frac{(k+p)!}{k!p!} a_{k+p} z_k^p \right|$$
$$\le Cq(k) \quad \text{où } C < 1.$$

Finalement, il existe une constante C, $0 \leq C < 1$, telle que, pour toute famille finie de coefficients complexes $(\lambda_k)_{k\in A\subset\mathbb{N}}$ on ait dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$:

$$\left\| \sum_{k\in A} \lambda_k (L_k - M_k) \right\| \leq C \sum_{k\in A} |\lambda_k| q(k) \leq C \left\| \sum_{k\in A} \lambda_k L_k \right\|.$$

Ceci exprime que les familles $(L_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ et $(M_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ sont fortement voisines dans $[\mathscr{O}_q^0(\Omega)]'$ au sens de Paley-Wiener ([**B**], Th. 1.1; [**DF**], Th. 4; [**M2**], Th. 6.1). Comme (L_k) est totale dans cet espace, on en déduit qu'il en est de même pour (M_k).

(e) On peut donc appliquer le Lemme 2.1 à la famille (M_k). On en déduit qu'elle vérifie la condition (P), ce qui, compte tenu de l'hypothèse, démontre le résultat.

Voici quelques corollaires plus explicites de ce théorème, énoncés sans démonstration et obtenus en particularisant l'application q et l'inégalité vérifiée par la famille $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$.

2.5. COROLLAIRE. *On suppose que la famille* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ *et l'application* q *vérifient*:

$$\sum_{p\in\mathbb{N}^n} q(p)|z_k|^p \leq H < 2 \quad \text{et} \quad \frac{q(k+p)}{q(k)q(p)} \leq \frac{k!p!}{(k+p)!},$$

les autres hypothèses étant inchangées. Alors le résultat du Théorème 2.4 *est inchangé.*

2.6. COROLLAIRE. *Soient* $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $\mathscr{E}_\tau$ *l'espace des fonctions entières* f *de* n *variables complexes vérifiant*:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}^n} \frac{f^{(k)}(0)}{\tau^k} < +\infty.$$

On suppose que la famille $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ *vérifie:*

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i |z_i(k_i)| \leq K < \operatorname{Log} 2.$$

Alors, si $f \in \mathscr{E}_\tau$ *et si* $f^{(k)}(z_k) = 0$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^n$, f *est identiquement nulle.*

2.7. COROLLAIRE. *Si* f *est une fonction entière de* n *variables complexes de type exponentiel inférieur à* $\operatorname{Log} 2/n$ *et si* $f^k(z_k) = 0$

pour $k \in N^n$ *où les* z_k *vérifient* $|z_i(k)| \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *alors* f *est identiquement nulle. (Voir* **[RT]**, *Prop.* 16.)

2.8. COROLLAIRE. *Si* f *est analytique dans le polydisque* $\{|z_i| < R_i$ $i = 1, 2, \ldots, n\}$ *et si* $f^{(k)}(z_k) = 0$ *pour* $k \in \mathbb{N}^n$ *où les* z_k *vérifient:*

$$\sum_p \frac{(k+p)!}{k!p!} \left(\frac{|z_k|}{r}\right)^p \leq H < 2,$$

où $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *vérifie* $r_i < R_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *alors* f *est identiquement nulle.*

3. La rigidité forte des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Le résultat du Corollaire 2 suggère la définition suivante qui fait jouer à une certaine suite le rôle d'une suite-test:

3.1. *Définition d'une suite d'unicité.* Soit $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$. $\Omega_{1/h}$ désigne le polydisque:

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^n, |z_i| < \frac{1}{h_i} \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n} = (z_1(k), \ldots, z_n(k))_{k\in\mathbb{N}^n}$ de points de $\mathbb{C}^n$ est dite h-suite d'unicité si elle vérifie la condition (C_1):

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| \geq N_0$, implique:

$$(3.1) \qquad z_k \in \Omega_{1/h} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 - h_i|z_i(k)|}\right)^{k_i+1} \leq D < 2.$$

On dira que $\Omega_{1/h}$ est l'ouvert associé à la h-suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$.

3.2. REMARQUES. (a) Il est évident que la suite $(z_k) = 0$ est une suite d'unicité.

(b) La condition (3.1) implique que $D \geq 1$ et équivaut à:

(3.2)

Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$: $|z_i(k)| \leq (1/h_i)[1 - (\frac{1}{D})^{r_i/k_i+1}]$ où :

$$1 \leq D < 2, \quad r_i \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{i=1}^n r_i = 1.$$

(c) Une autre expression du premier terme de l'égalité de (3.1) est aussi:

$$(3.3) \qquad \sum_{p\in\mathbb{N}^n} \frac{(k+p)!}{k!p!} (h|z_k|)^p.$$

En effet, elle se déduit immédiatement, de:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1-z_i}\right)^{k_i+1}=\sum_{p\in\mathbb{N}^n}\frac{(k+p)!}{k!p!}z^p \quad \text{pour :}$$

k et $p\in\mathbb{N}^n$, $\quad z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, $\quad |z_i|<1 \quad (i=1,2,\ldots,n)$.

3.3. THÉORÈME (rigidité forte). *Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage connexe Ω de l'adhérence du domaine $\Omega_{1/h}$ associé à une h-suite d'unicité $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$. On suppose que $z_k\in\Omega$ et que: pour tout $k\in\mathbb{N}^n$: $f^{(k)}(z_k)=0$. Alors $f\equiv 0$.*

Démonstration. Si dans la condition (C_1) de la Définition 3.1 on a $N_0=0$, alors le résultat est celui du Corollarie 2.8. En effet, d'après l'hypothèse, on peut trouver des réels $R_i>1/h_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ tels que f soit holomorphe dans $\Omega_R=\{|z_i|<R_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$.

Quand $N_0\geq 0$, on commence par remarquer que:

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right|\leq h^k \sup_{z\in\Omega_{1/h}}|f(z)| \quad \text{donc :}$$

$$\sup\left|\frac{f^k(0)}{k!h^k}\right|<\infty. \quad \text{On a alors :}$$

$$\frac{f^{(k)}(z_k)}{k!h^k}=\sum_{p\in\mathbb{N}^n}\frac{f^{(k+p)}(0)}{k!p!h^{k+p}}(hz_k)^p$$

$$=\frac{f^{(k)}(0)}{h!h^k}+\sum_{p\in\mathbb{N}^n}\frac{f^{(k+p)}(0)(k+p)!}{(k+p)!h^{k+p}k!p!}(hz_k)^p.$$

On en déduit, pour $|k|\geq N_0$:

$$\sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(z_k)}{k!h^k}\right|\leq\left(\sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right|\right)\left(1+\sum_{p\in\mathbb{N}_+^n}\frac{(k+p)!}{k!p!}(h|z_k|)^p\right)$$

$$\leq(1+C)\sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right|$$

où, d'après l'hypothèse, $0<C<1$. On a aussi:

$$\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right|\leq\left|\frac{f^{(k)}(z_k)}{k!h^k}\right|+\sum_{p\in\mathbb{N}_+^n}\left|\frac{f^{(k+p)}(0)}{(k+p)!h^{k+p}}\right|\frac{(k+p)!}{k!p!}(h|z_k|)^p$$

d'où on déduit finalement:

$$(3.4)\qquad (1-C)\sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right| \leq \sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(z_k)}{k!h^k}\right| \leq (1+C)\sup_{|k|\geq N_0}\left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right|.$$

Donc si $f^{(k)}(z_k) = 0$ pour tout k, on a aussi $f^{(k)}(0) = 0$ pour $|k| \geq N_0$.

Donc f est un polynôme de degré $d \leq N_0 - 1$. Décomposons le suivant ses parties homogènes:

$$f(z) = \sum_{|k|=d} a_{k,d} z^k + \sum_{|k|=d-1} a_{k,d-1} z^k + \cdots + a_{0,d}.$$

Si $l = (l_1, \ldots, l_n) \in N^n$ vérifie $|l| = d$, on voit facilement que $f^{(l)}(z) = l! a_{l,d} = f^{(l)}(z_l) = 0$. Donc $a_{l,d} = 0$ et il en est de même pour tous les $a_{k,d}$ tels que $|k| = d$.

On montre de la même façon que: $\sum_{|k|=d-1} a_{k,d-1} z^k = 0$ et, de proche en proche, que $f \equiv 0$.

3.4. Remarque. (a) On peut affaiblir les hypothèses en supposant seulement que $\Omega \supset \Omega_{1/h}$ avec $f \in \mathscr{O}(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

(b) Bien que $f^{(k)}(z_k)/k!h^k$ soit borné par l'hypothèse que $f^{(k)}(z_k) = 0$ pour $|k| \geq N_0$, cela ne suffit pas à écrire que $|f^{(k)}(0)/k!h^k|$ l'est mais l'hypothèse $\Omega \supset \overline{\Omega_{1/h}}$ (ou l'hypothèse affaiblie du (a) permet d'établir les inégalités (3.4). Supposer seulement que $\Omega \supset \Omega_{1/h}$ ne suffit pas à la démonstration.

(c) En joignant la relation (3.4) à l'intégrale de Cauchy on en déduit l'équivalence des topologies définies sur $\mathscr{O}(\Omega_{1/h}) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega_{1/h}})$ par les normes:

$$\sup_{z\in\overline{\Omega_{1/h}}} |f(z)|; \quad \sup_k \left|\frac{f^{(k)}(0)}{k!h^k}\right|; \quad \sup_k \left|\frac{f^{(k)}(z_k)}{k!h^k}\right|.$$

3.5. *Extension aux applications analytiques.* Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$, E un E.V.T.L.C. séparé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application f de Ω dans E est dite analytique si pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi \circ f$ est une fonction analytique dans Ω. Pour tout $k \in \mathbb{N}^n$ on a alors:

$$(\varphi \circ f)^{(k)}(z) = \varphi[f^{(k)}(z)].$$

Si $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est une h-suite d'unicité telle que $\overline{\Omega_{1/h}} \subset \Omega$, les conditions $z_k \in \Omega$ et $f^{(k)}(z_k) = 0$ entraînent donc encore que $f \equiv 0$.

L'application des suites d'unicité à certaines hyperfonctions analytiques (§6) utilise la version faible (Th. 4.5) du résultat suivant:

3.6. THÉORÈME. *Soit* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions analytiques dans un voisinage connexe de l'adhérence du domaine* $\Omega_{1/h}$ *associé à une h-suite d'unicité* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$. *On suppose que* $z_k \in \Omega$ *et que*:

$$\text{(3.5)} \qquad \text{Il existe } H \leq (h^k)^{1/|k|}$$

$$\text{tel que } \lim_{j\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}^n} \frac{|f_j^{(k)}(z_k)|}{k!H^{|k|}} = 0.$$

Alors il existe N_0 *tel que pour* $|k| \geq N_0 f_j^{(k)}$ *converge vers 0 dans l'espace* $\mathscr{O}(\Omega_{1/h})$ *des fonctions holomorphes dans* $\Omega_{1/h}$ *muni de la topologie de la convergence uniforme compacte.*

Démonstration. On peut écrire, pour $z \in \Omega_{1/h}$:

$$f_j^{(k)}(z) = \sum_p \frac{f_j^{(k+p)}(0)}{(k+p)!h^{(k+p)}} \frac{(k+p)!}{p!} h^k (hz)^p.$$

Pour $|k| \geq N_0$ défini au 3.1, on voit, compte tenu des hypothèses sur H et des relations (3.4) que le terme général de cette série est majoré en module par:

$$\frac{h^k}{1-C} \left(\sup_{|k|\geq N_0} \frac{|f_j^k(z_k)|}{k!H^{|k|}} \right) \frac{(k+p)!}{k!} |hz|^p.$$

Il en résulte que $f_j^{(k)}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\Omega_{1/h}$.

3.7. REMARQUE. L'une ou l'autre des deux hypothèses supplémentaires suivantes entraîne que f_j converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\Omega_{1/h}$:

1) $N_0 = 0$; 2) f_j converge simplement vers 0 sur un ouvert U de $\Omega_{1/h}$.

Pour la première c'est évident. Pour la deuxième posons:

$$f_j(z) = \sum_{|k|<N_0} a_{k,j} z^k + \sum_{|k|\geq N_0} a_{k,j} z^k$$

la suite des polynômes $P_j(z) = \sum_{|h|<N_0} a_{k,j} z^k$ converge simplement vers 0 sur U d'après l'hypothèse, on en déduit alors que pour $|k| < N_0$: $\lim_{j\to\infty} a_{k,j} = a_k = 0$. Il en résulte que P_j converge uniformément sur tout compact vers $P = 0$.

4. La rigidité affaiblie des fonctions analytiques réelles. Quand on passe des variables complexes aux variables réelles les fonctions analytiques conservent une rigidité en un sens affaibli que précisent la définition et les resultats suivants:

4.1. *Définition d'une suite d'unicité forte.* Une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^n} = (z_1(k), \dots, z_n(k))_{k\in\mathbb{N}^n}$ de points de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) est dite d'unicité forte si elle vérifie la condition:

(C_2): Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ il existe $N_0(\lambda)$ et $D(\lambda) \in [1, 2[$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, $|k| \geq N_0$ implique:

$$z_k \in \Omega_{1/\lambda} \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1-\lambda|z_i(k)|}\right)^{k_i+1} \leq D(\lambda) < 2, \tag{4.1}$$

où $\Omega_{1/\lambda}$ désigne ici le disque $\{|z_i| < \frac{1}{\lambda}\}$.

4.2. REMARQUES ET EXEMPLES. (a) Toute suite d'unicité forte est suite d'unicité au sens du 3.1.

(b) On peut remarquer que (4.1) équivaut à:

(4.2) Il existe $r_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, tel que:

$$|z_i(k)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{1}{D}\right)^{r_i/k_i+1}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1.$$

(c) Soit h une fonction positive de la variable réelle tendant vers l'infini avec elle. Soit ν une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Alors, la suite (z_k) définie par:

$$z_i(k_i) = \frac{1}{h[\nu(k)]}\left[1 - \left(\frac{1}{D}\right)^{1/n(k_i+1)}\right]$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$ avec $D \in [1, 2[$ vérifie la condition (C_2). En effet λ donné, il existe $N_0(\lambda)$ tel que $|k| > N_0$ implique $h[\nu(k)] > \lambda$. Par suite, pour $|k| \geq N_0(\lambda)$, on a:

$$|z_i(k_i)| \leq \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{1}{D}\right)^{r_i/k_i+1}\right] \quad \text{avec } r_i(k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } i.$$

Remarquons que le facteur $1/h[\nu(k)]$ peut tendre très lentement vers 0, comme $1/\operatorname{Log}(\operatorname{Log}|k|)$.

4.3. THÉORÈME (rigidité faible). *Soit $f \in \mathscr{A}(\omega)$ une fonction analytique réelle dans le voisinage réel et connexe ω de l'origine. Supposons*

qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ *d'éléments de* ω *qui soit d'unicité forte et pour laquelle:*

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^n\colon f^{(k)}(x_k) = 0. \text{ Alors on a}\colon f \equiv 0.$$

Démonstration. f étant analytique réelle dans ω se prolonge donc analytiquement dans un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine. On peut choisir $\lambda \in R_+$ assez grand pour avoir: $\Omega \supset \overline{\Omega_{1/\lambda}}$. Alors (x_k) est une h-suite d'unicité au sens de la Définition 3.1.

Il en résulte que $f \equiv 0$ d'après le Théorème 3.3.

4.4. *Extension aux applications analytiques.* Soient ω un ouvert de R^n, E un E.V.T.L.C. séparé (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), f une application analytique de ω dans E. Alors, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ est une suite d'unicité forte, les conditions: $x_k \in \omega$ et $f^{(k)}(x_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^n$, entraînent encore $f \equiv 0$.

Le résultat suivant est la version "réelle affaiblie" du Théorème 3.6.

4.5. THÉORÈME. *Soit* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ *une suite d'unicité forte dont les éléments sont dans le voisinage connexe et réel* ω *de l'origine. Soit* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions analytiques réelles vérifiant:*

(4.3) *Il existe* $H > 0$ *tel que*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|f_j^{(k)}(x_k)|}{k!H^{|k|}} = 0.$$

(4.4) Pour j assez grand $(j > J_0)$ tous les f_j se prolongent analytiquement à un même voisinage complexe Ω de l'origine.

Alors il existe N_0 tel que pour $|k| \geq N_0$, $\lim_{j\to\infty} f_j^{(k)} = 0$ dans l'espace $\mathscr{A}\{0\}$ des germes de fonctions analytiques au voisinage de l'origine, avec sa topologie usuelle.

Démonstration. Les hypothèses permettent de choisir un $h' = (H', H', \ldots, H') \in \mathbb{R}^n$ tel que $H' > H$ et $\Omega \supset \overline{\Omega_{1/h'}}$.

Il existe donc N_0 tel que pour $|k| \geq N_0$ on ait:

$$x_k \in \Omega_{1/h'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{1 - h'|x_k|}\right)^k \leq D(h') < 2.$$

On raisonne alors comme pour la démonstration du Théorème 3.6.

5. La rigidité des hyperfonctions analytiques par rapport a un groupe de variables et a support verifiant une condition de compacité. Le cas des distributions. Nous allons voir que les hyperfonctions et distributions

en question se comportent vis à vis de la rigidité affaiblie, de la même manière que les fonctions analytiques réelles. (Voir aussi [**M3**].)

5.1. *Rappels—Hyperfonctions et valeurs au bord.* Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, les hyperfonctions sur U sont les éléments de $\mathscr{B}(U) = H^n_U(\tilde{U}, \mathscr{O})$, (où $\tilde{U}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ tel que $\tilde{U} \cap \mathbb{R}^n = U$), $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie relative de $\tilde{U}$ modulo $\tilde{U} \setminus U$ à valeurs dans le faisceau des fonctions holomorphes (voir par exemple [**SKK**]). On sait que $u \in \mathscr{B}(U)$ peut être représentée par 2^n fonctions $F_\sigma \in \mathscr{O}(\tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma))$ ou $N \geq n+1$ fonctions $F_j \in \mathscr{O}(\tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_j))$, chaque Γ étant un cône convexe convenable de $\mathbb{R}^n$ et de sommet 0 et que l'on peut écrire u comme somme finie d'hyperfonctions "valeurs au bord"

$$u = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0) = \sum_{\sigma} F_\sigma(x + i\Gamma_\sigma 0).$$

On peut préciser que u peut être représentée par exemple de façon standard, par une fonction F holomorphe sur $\tilde{U} \sharp U = \bigcup_\sigma \tilde{U}_\sigma$ avec:

$$\tilde{U}_\sigma = \tilde{U} \cap (\mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma) = \{z \in \tilde{U}\,,\ \sigma_j \operatorname{Im} z_j > 0\,,\ j = 1\,, 2\,, \ldots\,, n\}$$

où $\sigma = (\sigma_1\,, \ldots\,, \sigma_n)$ avec $\sigma_j = \pm 1$.

5.2. *Définition–Analyticité par rapport à une variable.* On dit que u, hyperfonction de n variables $x = (x_1\,, \ldots\,, x_n)$, (et on écrira $u(x)$), est analytique en x_n au point x_0 si WFu ne contient pas les deux points $(x_0 \pm i dx_n \infty) \in \mathbb{R}^n \times iS^{*n-1}_\infty$ (voir par exemple [**K**], [**SKK**]). Il en résulte que l'on peut trouver un voisinage U de x_0 et des représentations de u du type de celle décrites en 5.1 telles que les cônes Γ_j aient une intersection non vide avec l'hyperplan $\{y_n = 0\}$ et qu'on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que: $F_j \in \mathscr{O}(U \times i(\Gamma_j \cap \{|y| < \varepsilon\}))$. C'est dire aussi que l'on peut trouver un représentant standard F tel que les F_σ se prolongent analytiquement à travers la partie $\{\operatorname{Im} z_n = 0\}$ du bord des $\tilde{U}_\sigma$. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathscr{B}(U)$ est analytique si elle l'est en chaque point de U.

Si $u(x', x_n) \in \mathscr{B}(U \times V)$ est analytique en x_n on peut restreindre à l'hyperplan $\{x_n = \lambda\}$, $\lambda \in V$, l'hyperfonction u et même son image $J(D)u$ par tout opérateur local. Il suffit pour cela de restreindre à $z_n = \lambda$ une fonction F définissant u ou $J(D)u$ dans un voisinage convenable de $U \times \{\lambda\}$ ou même dans $U \times V$ si V est assez régulier, ce qui induit indépendamment du choix de F les restrictions $u|_{x_n=\lambda}$ ou $J(D)u|_{x_n=\lambda}$ qui appartiennent alors à $'\mathscr{B}(U)$ espace des

hyperfonctions des $(n-1)$ premières variables $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. L'analycité par rapport à un groupe de variables se définit de la même manière sans difficultés supplémentaires.

5.3. THÉORÈME. *Soit* $u(x) = u(r, t)$ $(r \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}^q, p+q=n)$, *une hyperfonction analytique en* $t = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *sur* $\mathbb{R}^p \times \omega_\delta$ *où:*

$$\omega_\delta = \{t = (x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^q, |x_j| < \delta_j, j = p+1, \ldots, n\}.$$

On suppose que $\operatorname{supp} u \subset K \times \omega_\delta$ *où* $K \subset \mathbb{R}^p$ *est compact et qu'il existe dans* ω_δ *une suite* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^q}$ *d'unicité forte, pour laquelle:*

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^q\colon D_t^k u|_{t=t_k} \equiv 0. \quad \text{Alors } u(x) \equiv 0.$$

Démonstration. Il n'y a pas d'inconvénient à supposer $p = n-1$, $q = 1$, $r = x'$, $t = x_n$, $\delta_j = \delta$, ce que nous faisons pour nous ramener au cas de l'analyticité par rapport à x_n. Soient U un voisinage ouvert relativement compact de K dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et δ' tel que $0 < \delta' < \delta$. On peut trouver ε_1 et des cônes ouverts convexes, de sommet l'origine $\Gamma_j \subset \mathbb{R}^n_y$, $j = 1, \ldots, N$ ayant une intersection non vide avec $\{y_n = 0\}$ et des fonctions $F_j(z)$ holomorphes sur $U \times \{|x_n| < \delta'\} \times i(\Gamma_j \cap \{|y| < \varepsilon_1\})$ telles que:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0).$$

D'après [**K1**] (Lemme 1.3) les F_j se prolongent en U_j, analytiques réelles sur $U \backslash K \times \{|x_n| < \delta'\}$.

Soit alors $g(x')h(t) \in \mathscr{A}(K) \otimes \mathscr{A}(\{|t| \leq \varepsilon\})$ avec $0 < \varepsilon < \delta$. Ecrivons $'\mathscr{A}(K)$ au lieu de $\mathscr{A}(K)$ pour souligner l'analyticité par rapport aux $n-1$ premières variables.

Notant $'\langle , \rangle$ dualité entre $'\mathscr{B}[K]$ et $'\mathscr{A}(K)$, (sur ces questions on peut se référer à [**S**]), on va voir que la fonction $t \to {}'\langle u(x', t), g(x')\rangle_{x'}$ est analytique dans $\{|t| < \delta\}$. En effet on peut écrire (voir [**K1**] Lemme 1.4):

$${}'\langle u(x', t), g(x')\rangle_{x'} = \sum_{j=1}^{N} \int_L U_j(x', t) g(x')\, dx'$$

où $L \subset U$ est un compact fermeture d'un voisinage ouvert de K dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et on calcule le second membre comme

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\tilde{L}_j} F_j(z', t) g(z')\, dz',$$

où on a remplacé L par $\widetilde{L_j}$ avec $\partial\widetilde{L_j} = \partial L$ dans la région complexe $U \times i\Gamma_j' = U \times (\Gamma_j \cap \{y_n = 0\})$.

$F_j(z', t)$ est réelle analytique en t quand $z' \in \widetilde{L_j}$, et l'intégrale aussi. Dérivant sous le signe somme on a alors:

$$\frac{\partial^k}{(\partial t)^k}{}'\langle u(x', t), g(x')\rangle_{x'} = {}'\left\langle \frac{\partial^k}{(\partial t)^k} u(x', t), g(x')\right\rangle_{x'}.$$

Il résulte de considérations usuelles sur les supports singuliers des hyperfonctions $u(x)$ et $Y(\varepsilon^2 - x_n^2)$ (voir [**K1**]) que leur produit est un élément bien défini de $\mathscr{B}[K \times \{|x_n| \leq \varepsilon\}] = \mathscr{A}'(K \times \{|x_n| \leq \varepsilon\})$.

Comme les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont polynomialement convexes, il en résulte que ${}'\mathscr{A}(K) \otimes \mathscr{A}(|x_n| \leq \varepsilon)$ est dense dans $\mathscr{A}(K \times \{|x_n| \leq \varepsilon\})$. Pour prouver que $Y(\varepsilon^2 - x_n^2)u(x)$ est nul dans $\mathscr{A}'(K \times \{|x_n| \leq \varepsilon\})$ il suffit donc de prouver que cette fonctionnelle s'annule sur ${}'\mathscr{A}(K) \otimes \mathscr{A}(\{|x_n| \leq \varepsilon\})$, donc finalement sur chaque élément de la forme $g(x')h(t)$ de cet espace. Le calcul donne:

$$\langle Y(\varepsilon^2 - x_n^2)u(x), g(x')h(t)\rangle = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \langle u(x', t), g(x')\rangle_{x'} h(t)\, dt.$$

On le voit ([**K1**] Lemma 1.4) en calculant le premier membre comme:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_\gamma \left(-\frac{1}{2i\pi} \operatorname{Log} \frac{z_n + \varepsilon}{z_n - \varepsilon}\right) dz_n \int_{\widetilde{L}_j} F_j(z', z_n) g(z') h(z_n)\, dz',$$

où γ est un chemin complexe entourant l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Il résulte enfin de l'hypothèse

$$\frac{\partial^k}{(\partial x_n)^k} u|_{x_n = t_k} \equiv 0 \quad \text{que} \quad \frac{\partial^k}{(\partial x_n)^k}\, {}'\langle u(x', t_k), g(x')\rangle_{x'} = 0$$

pour chaque k. Donc ${}'\langle u(x', t), g'(x')\rangle_{x'}$ vérifie pour $\omega = \{|t| < \delta\}$ les hypothèses du Théorème 4.3 et est aussi identiquement nulle. Il en est donc de même pour $Y(\varepsilon^2 - x_n^2)u(x)$. Donc $u(x) \equiv 0$ dans $\{|x| < \varepsilon\}$ et comme ε est arbitraire, $u(x) \equiv 0$.

5.4. *Le cas des distributions.* Soit $T \in \mathscr{D}'(U) \subset \mathscr{B}(U)$. Soient: $b\colon \mathscr{O}(\tilde{U}\sharp U) \to \mathscr{B}(U)$ l'application valeur au bord selon $\mathscr{B}$, $b'\colon \mathscr{O}(\tilde{U}\sharp U) \to \mathscr{D}'(U)$ l'application valeur au bord selon $\mathscr{D}'$ (voir par exemple [**S**]). On sait que (voir par exemple [**Ma**] et [**S**]) on peut

choisir pour T un représentant standard $F \in \mathscr{O}(\tilde{U}\sharp U)$ de composante connexe F_σ sur $\tilde{U}_\sigma$ (voir 5.1) tel que, si $\varphi \in \mathscr{D}(U)$:

$$T = b(F) = \sum_\sigma F_\sigma(x + i\Gamma_{\sigma_0}) = b'(F)$$

$$= \left(\varphi \to \lim_{\substack{y \in \Gamma_\sigma \\ y \to 0}} \sum_\sigma \int_U F_\sigma(x + iy)\varphi(x)\, dx \right).$$

Dire que T est analytique en x_n (resp. en $x_{p+1}, \ldots, x_n$) au point x_0 c'est dire, d'après 5.2 que l'on peut trouver un voisinage U de x_0 et un F défini comme ci-dessus tel qu'en outre les F_σ se prolongent analytiquement à travers la partie $\{\operatorname{Im} z_n = 0\}$ (resp. $\{\operatorname{Im} z_{p+1} = \cdots = \operatorname{Im} z_n = 0\}$) du bord de $\widetilde{U_\sigma}$. L'analyticité de T par rapport à une ou plusieurs variables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ se définit immédiatement comme en 5.2.

Si $T(x) = T(r, t)$ est une distribution vérifiant en tant qu'hyperfonction les hypothèses du Théorème 5.3, on a bien sûr le même résultat d'unicité mais on peut se demander si ce résultat est conservé lorsqu'on renonce à l'hypothèse de compacité vérifiée par le support de T.

En conservant donc par ailleurs les autres hypothèses et les notations de 5.3 on peut, pour prouver que $T \equiv 0$ essayer de se ramener à montrer que $\langle T, \varphi\psi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ et tout $\psi \in \mathscr{D}(\omega)$. Désignons par Π l'application de ω dans $\mathscr{D}'(U)$ définie pour $\tau \in \omega$ par $\Pi(\tau) = T|_{t=\tau}$.

La preuve de l'analyticité de Π entrainerait le résultat. En effet on *a*:

$$\Pi^{(k)}(t_k) = D_t^k T|_{t=t_k} = 0$$

et l'extension 4.4 du Théorème 4.3 entraînerait alors que $\Pi \equiv 0$. Ecrivant:

$$\langle T, \varphi\psi \rangle = \int_\omega \Pi(t)\psi(t)\, dt$$

il en résulterait que $\langle T, \varphi\psi \rangle = 0$, donc, par densité, que $T \equiv 0$.

Or on *a*, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(U)$:

$$(\varphi \circ \Pi)(t) = {}'\langle T(x', t), \varphi(x') \rangle_{x'}$$

$$= \lim_{\substack{y' \in \Gamma'_\sigma \\ y' \to 0}} \sum_\sigma \int_U F_\sigma(x' + iy', t)\varphi(x')\, dx',$$

où Γ_σ et F_σ sont définis comme en 5.1 relativement à l'ouvert $U \times \omega$, avec $\Gamma'_\sigma = \Gamma_\sigma \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$.

Mais l'analyticité de la fonction $t \to F_\sigma(x' + iy', t)$ n'est pas transmise en général à l'intégrale par passage à la limite. En effet, d'aprés Kaneko ([**K1**], Exemple 4.8), on peut construire une fonction $C^\infty(U \times \omega)$, soit $f(x', t)$, contenant t comme paramètre analytique en tant qu'hyperfonction mais qui n'est pas une fonction analytique de t à valeurs dans $\mathscr{D}'(U)$ et pour laquelle on peut trouver $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ telle que l'intégrale:

$$'\langle f(x', t), \varphi(x')\rangle_{x'} = \int_U f(x', t)\varphi(x')\, dx'$$

n'est pas analytique en t. Mais on a au moins le résultat suivant:

5.5. THÉORÈME. *Soit* $T(x) = T(r, t)(r \in \mathbb{R}^p, t \in \mathbb{R}^q, p + q = n)$ *une fonction analytique en* $t = (x_{p+1}, \ldots, x_n) \in \omega$ *à valeurs dans* $\mathscr{D}'(U)$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^p$, ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^q$ *contenant les éléments d'une suite* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^q}$ *d'unicité forte, pour laquelle*:

$$\textit{pour tout } k \in \mathbb{N}^q\colon D_t^k T|_{t=t_k} \equiv 0. \quad \textit{Alors } T(x) \equiv 0.$$

Remarquons que la démonstration des Théorèmes 5.3 et 5.5 est basée sur l'analyticité d'une application de la variable réelle t à valeurs dans un E.V.T. ($'\mathscr{B}[K]$ dans un cas et $\mathscr{D}'(U)$ dans l'autre).

Soulignons que dans le dernier cas l'hypothèse que t est un paramètre analytique suffit à définir l'existence de l'application en question mais pas à établir son analyticité.

6. La rigidité des hyperfonctions analytiques à support quelconque. Les hyperfonctions analytiques par rapport à une (par exemple x_n) ou plusieurs variables perdent encore de la rigidité par rapport aux objets analytiques étudiés jusque là. En effet, comme le signale l'introduction, non seulement elles n'ont même pas la rigidité standard qui correspond au test de la suite nulle, mais encore des tests plus sévères comme celui qui résulte de l'action de l'ensemble $\mathscr{P}_0$ (resp. $\mathscr{P}_{0,n}$) des opérateurs différentiels à coefficients constants (resp. dans la direction x_n) ne suffisent-ils pas à fournir de résultat d'unicité (voir le contre-exemple de M. Sato cité dans [**K1**] p. 402). En élargissant $\mathscr{P}_0$ à $\mathscr{P}$, ensemble des opérateurs locaux, puis $\mathscr{P}_{0,n}$ à $\mathscr{P}_n$ ensemble des opérateurs locaux dans la direction x_n, A. Kaneko ([**K1**], [**K2**]) a démontré une conjecture de M. Sato conduisant au résultat d'unicité souhaité.

En remplaçant $\mathscr{P}$ ou $\mathscr{P}_n$ par deux types de classes d'opérateurs (Déf. 6.1 et 6.3) nous obtenons (voir [**CM**], [**M3**]) dans cette partie

des informations supplémentaires sur la rigidité des hyperfonctions en question. Le résultat du Théorème 6.2 est signalé par A. Kaneko dans **[K3]** p. 273.

6.1. *Définition d'une classe d'opérateurs opérant sur les hyperfonctions.* On désigne par $\mathscr{L}$ la réunion, pour toutes les classes de fonctions non quasi-analytiques des ensembles d'opérateurs d'ordre infini opérant sur ces classes, c'est-à-dire: $P(D) = \sum_k C_k D^k \in \mathscr{L}$ si et seulement si ([C] p. 1 à 4):

$$|C_k| \leq A \frac{H^{|k|}}{M_{|k|}}, \quad \text{où} \sum_k \left(\frac{1}{M_{|k|}}\right)^{1/|k|} < +\infty.$$

$\mathscr{L}_n$ désigne alors le sous-espace de $\mathscr{L}$ des opérateurs différentiels suivant x_n.

6.2. THÉORÈME ([CM], Th.). *Soit $u(x) = u(x', x_n)$ une hyperfonction de $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$, analytique par rapport à la variable x_n telle que:*

$$\text{pour tout } P(D_{x_n}) \in \mathscr{L}_n\colon P(D_{x_n})u|_{x_n=0} \equiv 0. \quad \text{Alors } u \equiv 0.$$

Démonstration. On se ramène, suivant **[K1]**, à prouver qu'une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'espace $\mathscr{A}\{0\}$ des germes de fonctions analytiques à l'origine tend vers 0 si et seulement si pour tout $P_N(D) \in \mathscr{L}$ de la forme normale (c'est-à-dire $P_N(D) = P_1(D_{x_1}) \ldots P_n(D_{x_n})$) on a: $\lim_{j\to\infty} P_N(D) f_j(0) = 0$.

Le résultat est déduit des deux propositions suivantes démontrées dans [CM]:

(P_1) Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $f_j \in A\{0\}$, tel que:

$$\text{pout tout } H > 0 \lim_{j\to\infty} \sup_k \left|\frac{D^k f_j(0)}{H^k M_{|k|}}\right| = +\infty.$$

Alors il existe un $P_N(D) \in \mathscr{L}$, de la forme normale, tel que la suite $(P_N(D)f_j)(0)$ ne tende pas vers zéro.

(P_2) Pour toute suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ non bornée de $A\{0\}$, il existe alors une sous suite notée encore $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et une suite $|M_l|$ satisfaisant aux conditions (a) (b) (c) de **[C]** telles que pour tout H, on ait:

$$\lim_{j\to\infty} \sup_k \left|\frac{D^k f_j(0)}{H^{|k|} M_{|k|}}\right| = +\infty.$$

En perturbant un opérateur local au moyen d'une suite d'unicité, on obtient maintenant une autre extension.

6.3. *Valuation locale associée à une suite de nombres réels.* Soient $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que pour tout k: $|t_k| < \gamma$ et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que $\overline{\lim}_{k\to\infty}(|C_k|k!)^{1/k} = 0$. Soient encore $u(x', x_n) \in \mathscr{B}(U \times \{|x_n| < \delta\})$ et

$$F_\sigma(z) \in \mathscr{O}(\widetilde{U \times \{|x_n| < \delta\}})_\sigma$$

les composantes connexes d'un représentant F de u. On peut alors poser: $V(D_{x_n})u = \sum_\sigma H_0(x + i\Gamma_\sigma 0)$ où

$$H_\sigma(z', z_n) = \sum_k C_k D_{z_n}^k F_\sigma(z', z_n + t_k) \in \mathscr{O}(\widetilde{U \times \{|x_n| < \delta - \gamma\}})_\sigma.$$

Il en résulte que $V(D_{x_n})$ envoie $\mathscr{B}(U \times \{|x_n| < \delta\})$ dans $\mathscr{B}(U \times \{|x_n| < \delta - \gamma\})$. On peut donc prendre la restriction $V(D_{x_n})U|_{x_n=0} \in \mathscr{B}(U)$ que l'on appellera valuation locale de u suivant $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On remarque que si $t_k = 0$ pour tout k, $V(D_{x_n})$ n'est autre que l'opérateur local $J(D_{x_n})$ bien connu.

On a bien sur des définitions et conséquences analogues pour les fonctions analytiques de $\mathscr{A}(U \times (\{|x_n| < \delta\})$.

6.4. THÉORÈME. *Soit $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions analytiques réelles dans $\omega = \{|t| < \delta\}$ dont les éléments se prolongent, à partir d'un certain rang à un certain voisinage complexe et connexe Ω de 0, contenant les éléments $t_k \in \mathbb{R}$, $|t_k| < \gamma < \delta$, d'une suite d'unicité forte; on suppose que $\Omega \cap R \subset \{|t| < \delta - \gamma\}$ et que pour tout opérateur local de valuation $V(D_t)$ associé à (t_k): $\lim_{j\to\infty} V(D_t)F_j(0) = 0$. Alors $\lim_{j\to\infty} F_j = 0$ dans $\mathscr{A}\{0 \in R\}$.*

Démonstration abrégée. On commence par montrer l'existence de $H > 0$ tel que

$$\lim_j \sup_k \left| \frac{F_j^{(k)}(t_k)}{k!H^k} \right| = 0$$

par un raisonnement analogue à celui qu'utilise le théorème de [CM] et en utilisant pour un h convenable, les majorations (3.4). On applique alors le Théorème 4.5.

6.5. THÉORÈME. *Soit $u(x) = u(x', x_n)$ une hyperfonction analytique par rapport à la variable x_n définie dans $U \times \{|x_n| < \delta\}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}|t_k| < \gamma < \delta$. On suppose que pour tout opérateur $V(D_{x_n})$ de valuation local associé à t_k supposé d'unicité forte:*

$$V(D_{x_n})u|_{x_n=0} \equiv 0 \quad \text{dans } '\mathscr{B}(U).$$

Alors $u(x) \equiv 0$ dans un voisinage de $U \times \{0\}$.

Démonstration abrégée. Pour démontrer que $u(x)$ est nul au voisinage de tout point x_0 de $U \times \{0\}$ qu'on peut supposer l'origine, il suffit de montrer, d'après Kaneko ([**K1**] Th. 3.5 et 3.10) que $w_j(x) = Y(\frac{\delta^2}{4} - x_n^2)v(x, \varepsilon_j)$ tend vers 0 dans $\mathscr{A}\{0\}$ quand $j \to \infty$ (et $\varepsilon_j \to 0$), où $v(x, \varepsilon) = \langle v(y', x_n), {}'E(x' - y', \varepsilon)\rangle_{y'}$

${}'E(x', \varepsilon)$ désigne le noyau de Poisson à $n-1$ dimensions, $v(x)$ une hyperfonction à support compact K, ${}'\langle , \rangle$ la dualité entre ${}'\mathscr{B}(K)$ et ${}'\mathscr{A}(K)$, $u(x)$ coïncidant avec v, à une fonction analytique près, au voisinage de 0. Pour chaque j, $w_j(x) = w_j(x', x_n)$ est analytique en x au voisinage de 0: l'hypothèse sur $u(x)$ entraîne alors que pour tout opérateur local normalisé à $n-1$ variables, $J_N(D_{x'})$:

$$\lim_{j\to\infty} (V(D_{x_n})J_N(D_{x'})w_j)(0, 0) = 0.$$

Le calcul de w_j montre en outre que les fonctions $x_n \to w_j(0, x_n)$ se prolongent analytiquement à un même voisinage complexe Ω de l'origine qui contient donc tous les points de t_k pour $k \geq N_0$. Supposons d'abord $N_0 = 0$. D'après le théorème 6.4 la suite de fonction $(x_n \to J_N(D_{x'})w_j(0, x_n))_{j\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathscr{A}\{0 \in R\}$. Par suite, pour tout opérateur local en x_n, $J(D_{x_n})$:

$$\lim_{j\to\infty} (J(D_{x_n})J_N(D_{x'})w_j)(0, 0) = 0,$$

et il en résulte que $w_j \to 0$ dans $\mathscr{A}\{0\}$ ([**K1**], [**K2**]). Si $N_0 > 0$, le même raisonnement prouve d'abord que $\partial^k u(x)/(\partial x_n)^k \equiv 0$ pour $k \geq N_0$ dans un voisinage de $U \times \{0\}$. On en déduit alors que: $u(x) = \sum_{j\leq N_0} A_j(x')x_n^j$, polynôme en x_n à coefficients hyperfonctions de la variable $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Appliquant encore à $u(x)$ les opérateurs de valuation locale $V(D_{x_n})$, on en déduit finalement que $u(x) \equiv 0$ au voisinage de $U \times \{0\}$.

Bibliographie

[A] M. C. Arsove, *The Paley-Wiener theorem in metric linear spaces*, Pacific J. Math., **10** (1960).

[B] R. P. Boas, Jr., *Expansion theorem for analytic functions*, Conference on functions of a complex variable, University of Michigan, (1953), 409–419.

[C] C. C. Chou, *La transformation de Fourier complexe et l'équation de convolution*, Lecture notes in Math., n°325, Springer-Verlag, 1973.

[CM] C. C. Chou et J. A. Marti, *Un théorème d'unicité sur les hyperfontions régulières par rapport à une des variables*, C.R.A.S., t.**288** (1979), 493–495.

[DF] Ph. Davis et Ky Fan, *Complete sequences and approximation in normed linear spaces*, Duke J. Math., **24** (1957), 183–192.

[K1] A. Kaneko, *Remark on hyperfunctions with analytic parameters*, J. Fac. Science Univ. Tokyo, Sec. I A, **22** (1975), 371–407.

[K2] ——, *Remarks on hyperfunctions with analytic parameters*, II, Inst. Math. Pures Université de Grenoble, 1977.

[K3] A. Kaneko, *On Hyperfunctions with Analytic Parameters*, in *Algebraic Analysis*, Vol. I, Academic Press, New York, 1988, pp. 267–276.

[M1] J. A. Marti, *Sur certains types de familles closes dans les espaces vectoriels topologiques*, C.R.A.S., **267** (1968), 253–256.

[M2] ——, *On some types of completeness in topological vector spaces*, Pacific J. Math., **35** (1970), pp. 707–715.

[M3] ——, *Théorèmes d'unicité sur les hyperfonctions analytiques par rapport à une des variables*, C.R.A.S., **292** (1981), 897–900.

[Ma] A. Martineau, *Distributions et valeurs au bord des fonctions holomorphes*, Proc. of Int. Sum. Inst. Lisbonne, 1964.

[N] Nguyen Thanh Van, *Bases de Schauder dans certains espaces de fonctions holomorphes*, Ann. Inst. Fourier, **22** (1972), 169–253.

[RT] L. A. Rubel et V. A. Taylor, *Uniqueness theorems for analytic functions of one and of several complex variables*, Proc. Camb. Phil. Soc., **64** (1968), 71–82.

[SKK] M. Sato, T. Kawai et M. Kashiwara, *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture notes in Math., **287**, (1973).

[S] P. Schapira, *Théorie des hyperfonctions*, Lecture notes in Math., **126**, (1970).

Received November 21, 1989 and in revised form May 8, 1990.

UNIVERSITE DE PERPIGNAN
66860 PERPIGNAN CEDEX, FRANCE