154. *Sur les Points Singuliers des Équations Différentielles Admettant un Invariant Intégral*

Par Taro URA et Yoshikazu HIRASAWA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1954)

Introduction

1. Dans une Note antérieure, un des auteurs a classé[1] les points singuliers de première espèce d'un système d'équations différentielles défini à la surface du tore sous la condition que le système admette un invariant intégral positif. On remarque cependant que cette classification est applicable, même si l'on supprime l'hypothèse faite que le système est défini à la surface du tore, puisque la classification des points singuliers est un problème local.

Nous proposons ici de considérer le cas, où l'on ne suppose pas que les points singuliers soient de première espèce, mais que l'on suppose seulement qu'ils sont isolés, et en modifiant la définition des cols, nous montrons que notre classification s'applique aux points singuliers d'un système d'équations qui admet un invariant intégral positif.

2. Aux paragraphes 3 et 4, nous expliquons les hypothèses sur le système, et en particulier, précisons celles qu'un point singulier considéré est isolé et que le système admet un invariant intégral positif.

Au paragraphe 5, nous expliquons la notion de centres de Poincaré, et introduisons celle de cols généralisés; et à la fin de ce paragraphe nous énonçons un théorème à prouver, dont la démonstration se divise en trois parties.

D'abord, au paragraphe 6, nous montrons qu'un centre de Bendixson est nécessairement un centre de Poincaré dans le cas considéré. Donnant au paragraphe 7 la démonstration qu'il n'existe pas de régions nodales, nous montrons dans le paragraphe 8 qu'il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant à un point singulier, si ce point n'est pas un centre de Bendixson.

Hypothèses et Résultats

3. Envisageons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y), \qquad \frac{dy}{dt}=Y(x, y), \tag{1}$$

où $X(x, y)$ et $Y(x, y)$ sont *deux fonctions continues des deux variables réelles x et y,* définies dans un voisinage A d'un point $P_0=(x_0, y_0)$ du plan (x, y), et t est un paramètre représentant le temps.

Nous supposons que le point P_0 est un *point singulier isolé,* c'est-à-dire que le point P_0 satisfait aux équations

$$X(x, y)=0, \qquad Y(x, y)=0, \tag{2}$$

et que, dans un certain voisinage V du point P_0, il n'y a pas de solutions des équations (2) sauf le point P_0. Nous supposons que l'on a $V=A$, ce qui est loisible.

Supposons en outre qu'il existe une *unique solution* du système (1)

$$x=x(t, x_1, y_1), \qquad y=y(t, x_1, y_1), \tag{3}$$

qui remplisse les conditions initiales $x(0, x_1, y_1)=x_1$, $y(0, x_1, y_1)=y_1$, pourvu que le point $P=(x_1, y_1)$ appartienne à A. La courbe dans le plan (x, y) représentée par la solution (3) sera appelée *caractéristique* suivant la terminologie de Poincaré, plus précisément, *caractéristique passant par le point P* (à l'époque $t=0$), et la courbe partielle de la caractéristique correspondant aux valeurs $t\geq 0$ (ou $t\leq 0$) s'appelle *demi-caractéristique* partant du point P.

On voit, d'après cette définition, que la caractéristique passant par le point singulier P_0 se réduit au point P_0.

4. Supposons d'ailleurs que le système (1) admette un *invariant intégral positif.* Dire qu'une fonction $M(x, y)$ est un invariant intégral positif, c'est dire que $M(x, y)$ est uniforme et localement sommable dans A et que l'on a

$$0<M(x, y)<\infty \qquad \text{presque partout dans } A,$$

et enfin que, désignant par U un sous-ensemble de A quelconque, tel que $M(x, y)$ soit sommable dans U, on a

$$\iint_{U(t)} M(x, y)dxdy=K, \tag{4}$$

pour toute valeur de t, pourvu que $U(t)$ soit défini, où K désigne une constante indépendante du temps t, et où $U(t)$ est l'ensemble des positions à l'époque t des points qui appartiennent à U à l'époque $t=0$, et qui se meuvent selon le système (1).

5. Nous appelons[2] le point P_0 *centre de Poincaré,* si toutes les caractéristiques assez proches du point P_0 sont périodiques, et le point P_0 est dit *col généralisé,* s'il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant au point P_0 pour $t\to\infty$ ou $t\to-\infty$.

Avec les définitions précédentes, le théorème à démontrer s'exprime comme suit:

Théorème. *Sous les conditions énoncées aux paragraphes 3 et 4, le point singulier P_0 du système (1) est ou bien un centre de Poincaré, ou bien un col généralisé.*

Remarque. D'après un théorème de Bendixson, si l'on désigne par n le nombre de caractéristiques aboutissant à un col généralisé pour $t\rightarrow\infty$ ou pour $t\rightarrow-\infty$, le nombre n est pair, soit $2m$, et il existe exactement m caractéristiques aboutissant à ce col généralisé pour $t\rightarrow\infty$, et m pour $t\rightarrow-\infty$.

Démonstration du Théorème

6. Dans un Mémoire, Bendixson a démontré[3] qu'en considérant les caractéristiques assez proches du point singulier P_0, ou bien il existe une infinité de caractéristiques périodiques entourant le point P_0 (dans ce cas P_0 sera appelé centre de Bendixson), ou bien il existe au moins une caractéristique aboutissant à P_0.

Nous nous occupons d'abord du premier cas de l'alternative; nous supposons donc que le point singulier P_0 est un centre de Bendixson, et nous montrons que P_0 est un centre de Poincaré.

En effet, si P_0 n'était pas un centre de Poincaré, il y aurait dans un voisinage quelconque V de P_0 une caractéristique non-périodique C. Comme, par hypothèse, le point singulier P_0 est isolé, si V est assez petit, la caractéristique C s'approcherait, en figurant une spirale, d'une certaine caractéristique périodique C_1 pour $t\rightarrow\infty$ et d'une autre C_2 pour $t\rightarrow-\infty$. Sans restreindre la généralité, nous pouvons supposer que la caractéristique périodique C_1 est intérieure à C_2.

Soit Q un point quelconque de C_1; désignons par N un segment assez petit de la normale de la caractéristique C_1 au point Q, pour que toutes les caractéristiques passant par un point de N ne soient pas tangentes à N. La caractéristique C doit couper le segment N en une infinité de points pour $t\rightarrow\infty$, et si l'on désigne par P_1 et P_2 deux points de cette intersection correspondant aux valeurs t_1 et t_2 de t respectivement, telles que l'on ait $t_1<t_2$, P_2 est plus proche du point Q que P_1. Supposons qu'il n'existe pas de point de cette intersection correspondant à une valeur de t dans l'intervalle $t_1<t<t_2$, de sorte que P_2 soit[4] le conséquent du point P_1 selon la terminologie de Poincaré. On voit que cette hypothèse ne restreint pas la généralité.

Considérons la région fermée U limitée par l'arc $\widehat{P_1, P_2}$ de C, par l'arc $\widehat{P_1, P_2}$ du segment N, et par la caractéristique périodique C_1; il est clair que U contient $U(t_2-t_1)$ et que la mesure de U est plus grande que celle de $U(t_2-t_1)$, de sorte que, U étant compact, on a

$$\iint_U M(x, y)dxdy > \iint_{U(t_2-t_1)} M(x, y)dxdy,$$

puisque par hypothèse on a $M(x, y) > 0$ presque partout dans A; ceci est en contradiction avec (4). En conséquence l'hypothèse qu'il existe au moins une caractéristique non-périodique dans tout voisinage du P_0 est absurde, donc dans un certain voisinage du point P_0, toutes les caractéristiques sont périodiques, ce qui revient à dire, par définition, que le point singulier P_0 est un centre de Poincaré.

Remarque. Dans cette démonstration, la sommabilité locale de la fonction $M(x, y)$ au point singulier P_0 n'a pas été utilisée.

7. Ce point établi, passons au deuxième cas de l'alternative, et montrons d'abord qu'il n'existe pas de régions nodales aboutissant au point P_0.

Supposons en effet qu'il existe une région nodale aboutissant au point P_0 pour $t \to \infty$ (ou pour $t \to -\infty$). Soient P un point de cette région nodale, et C la demi-caractéristique partant du point P et qui aboutit à P_0 pour $t \to \infty$ (ou pour $t \to -\infty$). Considérons la normale de C au point P, et désignons par N un petit segment de cette normale, dont le point P est une des extrémités. On peut supposer que le segment N est assez limité, pour que N soit contenu dans la région nodale considérée et que toutes les caractéristiques passant par un point de N ne soient pas tangentes à N; toutes les caractéristiques passant par un des points de N aboutissent à P_0 pour $t \to \infty$ (ou pour $t \to -\infty$). Soient Q un point de N distinct de P, et C_1 la demi-caractéristique partant de Q qui aboutit au point P_0 pour $t \to \infty$ (ou pour $t \to -\infty$); la région U limitée par les deux demi-caractéristiques C et C_1, par le segment partiel $\widehat{P, Q}$ de N et par le point P_0 contient la région $U(t)$, et par ailleurs la mesure de U est plus grande que celle de $U(t)$ pour toutes les valeurs de t positives (ou négatives). Ainsi, puisque U est manifestement compact, en raisonnant comme au paragraphe précédent, il résulte une contradiction avec l'hypothèse que le système admet un invariant intégral positif.

En conséquence, l'hypothèse d'existence de régions nodales est absurde.

8. Nous disons maintenant qu'il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant au point P_0. Pour démontrer cette proposition, supposons qu'il existe une infinité de pareilles caractéristiques, et montrons que ceci conduit en contradiction.

En effet, s'il existait une infinité de caractéristiques aboutissant au point P_0 pour $t \to \infty$, nous pourrions décrire un cercle Γ entourant le point P_0, tel que, tendant vers le point P_0 pour $t \to \infty$, une infinité de caractéristiques coupe le cercle Γ. Désignons par E l'ensemble des points en lesquels les caractéristiques aboutissant au point P_0 coupent le cercle Γ pour la dernière fois; l'ensemble des points d'accumulation de E est non-vide et contenu dans Γ, puisque Γ est compact. En outre, en raison de la continuité des caractéristiques par rapport aux points initiaux, on voit aisément qu'au point P_0 aboutit la demi-caractéristique C partant d'un de ces points d'accumulation, soit Q, pour $t\to\infty$.

Envisageons la normale de la demi-caractéristique C au point Q et limitons cette normale à un segment assez petit, soit N, pour que toutes les caractéristiques passant par un point de N ne soient pas tangentes à N.

Le point Q étant un point d'accumulation de E, il existe des points de E aussi proches du point Q, que l'on veut; donc, à cause de la continuité des caractéristiques, il existe[5] un point P de E, tel que la caractéristique C_1 passant par le point P coupe le segment N en un point P_1. Comme la caractéristique C_1 aboutit au point P_0 pour $t\to\infty$, on peut supposer qu'après le point P_1, la caractéristique C_1 ne coupe plus le segment N. Sans aucune ambiguité, nous pouvons désigner par C_1 la demi-caractéristique partant du point P_1 et aboutissant à P_0.

Considérons la région limitée par les deux demi-caractéristiques C et C_1, par le segment partiel $\widehat{P_1, Q}$ de N et par le point P_0; par cette construction, U appartient visiblement à une certaine région nodale, ce qui est en contradiction avec le résultat du paragraphe précédent.

Donc il n'existe qu'un nombre fini de caractéristiques aboutissant au point P_0 pour $t\to\infty$, et de même on démontre la même proposition concernant les caractéristiques aboutissant au point P_0 pour $t\to-\infty$.

En conséquence le point singulier P_0 est un col généralisé, ce qui achève, avec le résultat du paragraphe 6, la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 5.

Références

1) T. Ura: "Sur les courbes définies à la surface du tore par des équations admettant un invariant intégral", Ann. Ec. Norm., [3], **69,** 260-263 (1952).

2) H. Poincaré: "Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle", J. Math. pures et appl. [3], **7**, 390 (1881); Œuvres I, 17 (1928).

3) I. Bendixson: "Sur les courbes définies par les équations différentielles", Acta Math., **24**, 26-27 (1901). E. Kamke: "Differentialgleichungen reeller Funktionen", 222-223 (1930).

4) H. Poincaré: "Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle", J. Math. pures et appl. [3], **7**, 253 (1881); Œuvres I, 46 (1928).

5) T. Ura: "Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions", Ann. Ec. Norm., [3], **70**, 303-304 (1953).