Ono, Takashi
Osaka Math. J.
10 (1958), 57-73

*Sur la Réduction Modulo $\mathfrak{p}$ des Groupes Linéaires Algébriques**

Par Takashi ONO

Dans son travail récent [1] A. Borel a développé une théorie des groupes linéaires algébriques sur le corps de caractéristique p quelconque par la méthode algébrico-géometrique, et généralisé les résultas de E. Kolchin [4, 5] et de C. Chevalley [2, 3]. D'autre part, G. Shimura [7] a établi une théorie de "réduction modulo $\mathfrak{p}$" des variétés algébriques en application de la théorie de A. Weil [9]. Dans ses travaux [7, 8], il a démontré plusieurs théorèmes du type suivant: Soit k un corps ayant un nombre infini de valuations discrètes $\{w_\lambda\}$ avec les idéaux de valuations $\{\mathfrak{p}_\lambda\}$. (Il est supposé que tout élément, autre que 0, de k est une $\mathfrak{p}_\lambda$-unité pour presque tous les λ[1]). Alors diverses propriétés des variétés algébriques V sur k, telles que l'irreductibilité, sont préservées après la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ pour presque tous les λ. On peut aussi envisager les théorèmes du type réciproque: si presque toutes les variétés $V^{(\lambda)}$, obtenues par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ d'une variété algébrique V, ont une certaine propriété, alors V elle-même possède cette propriété. On pourrait nommer ces deux sortes du théorèmes principes de *dispersion* et *d'aggolomération*, respectivement (ou encore: de Shimura et de Hasse, quoique nous ayons défini autrement le "principe de Hasse" dans notre travail antérieur [6].)

Dans le présent mémoire, nous montrerons que ces principes sont valables pour tous les concepts sur les groupes linéaires algébriques qui apparaissent dans [1]: résolubilité, d'être un tore, etc. Nous examinerons ces concepts successivement selon l'ordre d'exposé de [1]. Nous démontrerons en particulier qu'un sous-groupe H d'un groupe algébrique G est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G ou un sous-groupe de Cartan de G, si et seulement si $H^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ ou un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ respectivement pour presque tous les λ (Théorème 2. 14, 2. 30). Le "principe de

---

* Ce travail a été accompli pendant que l'auteur était boursier de la Fondation Yukawa.

1) Nous nous servirons de l'expression "pour presque tout les λ" au sens de "pour tous les λ sauf pour les exceptionnels en nombre fini".

dispersion" pour le sous-groupe résoluble connexe maximal de G (Proposition 2. 10) est fondamental en ce sens, que tous les résultats important de ce travail s'en dérivent. La démonstration de cette proposition utilise un résultat important de [1] sur la variété des drapeaux, et un théorème général de Shimura-Taniyama sur le principe de dispersion, qui va être publié prochainement. Pour établir le principe de dispersion pour le sous-groupe de Cartan de G (Proposition 2. 24), nous utiliserons les résultats de C. Chevalley [2, 3] sur les algèbres de Lie de caractéristique p quelconque, (mais nous serons obligés de nous limiter ici au cas, où la caractéristique de k est 0, —l'hypothèse que nous devrons faire à la seconde moitié du § 2.)*

Nous supposerous les travaux [1], [7] comme connus du lecteur.

§ 1. Réduction des groupes algébriques.

Soit k un corps ayant une valuation discrète. Nous désignons par $\mathfrak{o}$ l'anneau de la valuation, par $\mathfrak{p}$ l'idéal de la valuation, par κ le corps résiduel $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Pour la simplicité du langage, nous supposons dorénavant que deux corps k, κ sont *parfaits*[2]. Dans tout ce paragraphe, nous fixons k et $\mathfrak{o}$, et nous utilisons les notations k, $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, κ au sens ci-dessus. Soit Ω (resp. Ω_κ) le corps universels sur k (resp. κ) choisi une fois pour toutes. Pour tout corps K, on note $M(n, K)$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, et $GL(n, K)$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $M(n, K)$.

Suivant A. Borel[3], par un groupe algébrique G défini sur k, on entend un sous-groupe G de $GL(n, \Omega)$ qui est l'intersection de ce dernier avec un ensemble algébrique A de $M(n, \Omega)$ défini sur $k: G=A\cap GL(n, \Omega)$. On notera $A^{(\kappa)}$ l'ensemble algébrique, défini sur κ, de $M(n, \Omega_\kappa)$, obtenu de A par la réduction modulo $\mathfrak{p}$ au sens de G. Shimura[4]. Il est clair que l'ensemble $G^{(\kappa)}=A^{(\kappa)}\cap GL(n, \Omega_\kappa)$ ne dépend que de G et non pas de A.

Théorème 1. 1. *L'ensemble $G^{(\kappa)}$ devient un groupe algébique défini sur κ.*

Pour démontrer ceci, il suffit de remarquer que $G^{(\kappa)}$ forme un groupe abstrait. Pour ξ, η quelconques dans $G^{(\kappa)}$, il existe $x, y\in A$ tels que

* Récemment Monsieur J. Dieudonné a étendu tous nos théorèmes sans restriction sur la caractéristique en utilisant sa théorie des hyperalgèbres de Lie. Sa note [10] est publiée dans le même journal que la nôtre. J'exprime ici ma sincère reconnaissance à M. Dieudonné qui a bien voulu s'intéresser à mes résultats et me donner de précieux conseils.

2) En vertu de cette hypothèse, les termes "défini sur k (resp. κ)" et "quasidéfini sur k (resp. κ)" signifient la même chose. c.f. [1], (1. 3).

3) [1], (2. 1).

4) [7], § 3.

$x \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi$, $y \xrightarrow{\mathfrak{o}} \eta$[5]. On peut ici supposer que x, y sont indépendants sur k. Comme tous les composants de la matrice $x \cdot y$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $(x, y) \xrightarrow{\mathfrak{o}} (\xi, \eta)$, on voit que $x \cdot y \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi \cdot \eta$, d'où $\xi \cdot \eta \in G^{(\kappa)}$. De plus, il est clair que l'identité de $GL(n, \Omega_\kappa)$ est contenue dans $G^{(\kappa)}$. Enfin, puisque tous les composants de la matrice x^{-1} sont la forme dans $P_{ij}(x)/\det x$, où $P_{ij}(X) \in \mathfrak{o}[X]$, $\det \xi \neq 0$, ils sont contenus l'anneau de la dans spécialisation : $x \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi$. On a donc $x^{-1} \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi^{-1}$, d'où $\xi^{-1} \in G^{(\kappa)}$, c.q.f.d.

Définition. *Nous appellerons $G^{(\kappa)}$ le groupe algébrique obtenu du groupe algébrique G par la réduction modulo $\mathfrak{p}$.*

Nous utilisons souvent dans la suite le fait que $\dim G^{(\kappa)} = \dim G$[6].

Nous allons examiner maintenant la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de divers sous-groupes de G suivant l'ordre d'exposé dans le mémoire de A. Borel.

Proposition 1. 2. *Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique de G. Supposons que k est un corps de définition pour G, H. Alors le centralisateur $Z(H)$ de H dans G est défini sur k[7], et on a $(Z(H))^{(\kappa)} \subseteq Z(H^{(\kappa)})$.*

Soient, en effet, $\xi \in (Z(H))^{(\kappa)}$, $\eta \in H^{(\kappa)}$. Il existe donc $x \in Z(H)$, $y \in H$ tels que $x \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi$, $y \xrightarrow{\mathfrak{o}} \eta$, où on peut supposer que x, y sont indépendants sur k. Comme tous les composants de la matrice $x \cdot y = y \cdot x$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $(x, y) \xrightarrow{\mathfrak{o}} (\xi, \eta)$, on a $x \cdot y = y \cdot x \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi \cdot \eta = \eta \cdot \xi$, c.q.f.d.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1. 3. *Si G est un groupe algébrique commutatif défini sur k, $G^{(\kappa)}$ est commutatif.*

Proposition 1. 4. *Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe algébrique de G. Supposons que k est un corps de définition pour G, H. Alors le normalisateur $N(H)$ de H dans G est défini sur k[7], et on a $(N(H))^{(\kappa)} \subseteq N(H^{(\kappa)})$.*

Ceci se démontre de la même façon que Proposition 1. 2.

---

5) $x \xrightarrow{\mathfrak{o}} \xi$ signifie que ξ est une spécialisation de x sur $\mathfrak{o}$. c.f. [7], § 1.

6) [7], § 3, Proposition 19.

7) [1], (2. 5, e).

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1. 5. *Si H est invariant dans G, $H^{(\kappa)}$ est invariant dans $G^{(\kappa)}$.*

Proposition 1. 6. *Soient G un groupe algébrique, H, K des sous-groupes algébriques connexes de G. Supposons que k est un corps de définition pour G, H, K. Alors $[H, K]$ est un sous-groupe algébrique connexe défini sur k*[8], *et on a $[H^{(\kappa)}, K^{(\kappa)}]\subseteq[H, K]^{(\kappa)}$.*

Soient, en effet, $\xi\in H^{(\kappa)}$, $\eta\in K^{(\kappa)}$. Il existe donc $x\in H$, $y\in K$ tels que $x\xrightarrow{\mathfrak{o}}\xi$, $y\xrightarrow{\mathfrak{o}}\eta$, où on suppose que x, y sont indépendants sur k. Comme tous les composants de la matrice $[x, y]=xyx^{-1}y^{-1}$ sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $(x, y)\xrightarrow{\mathfrak{o}}(\xi, \eta)$, on a $[x, y]\xrightarrow{\mathfrak{o}}[\xi, \eta]$, d'où $[\xi, \eta]\in[H, K]^{(\kappa)}$, c.q.f.d.

Proposition 1. 7. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Soit C^iG (resp. D^iG), $i\geq 0$, la série centrale descendante (resp. la série des groupes dérivés) de G*[9]. *Alors tous les groupes C^iG (resp. D^iG) sont définis sur k, et on a $C^i(G^{(\kappa)})_0\subseteq(C^iG)^{(\kappa)}$ (resp. $D^i(G^{(\kappa)})_0\subseteq(D^iG)^{(\kappa)}$), $i\geq 0$*[10].

Démonstration par récurrence sur i. On a $C^0(G^{(\kappa)})_0=(G^{(\kappa)})_0\subseteq G^{(\kappa)}$, et si $C^i(G^{(\kappa)})_0\subseteq(C^iG)^{(\kappa)}$, alors $C^{i+1}(G^{(\kappa)})_0=[(G^{(\kappa)})_0, C^i(G^{(\kappa)})_0]\subseteq[G^{(\kappa)}, (C^iG)^{(\kappa)}]\subseteq[G, C^iG]^{(\kappa)}=(C^{i+1}G)^{(\kappa)}$. Même démonstration dans is cas de D^iG.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1. 8. *Si G est un groupe algébrique nilpotent (resp. résoluble) connexe défini sur k, $(G^{(\kappa)})_0$ est nilpotent (resp. résoluble).*

Proposition 1. 9. *Si $x\xrightarrow{\mathfrak{o}}\xi$, et x est unipotente, alors ξ est unipotente.*

En effect, x est unipotente si est seulement si le déterminant de $x-T\cdot\mathrm{I}$ est égal à $(T-1)^n$, ce qui est une condition algébrique pour x, à coefficients dans l'anneau $\mathfrak{o}$.

Il en résulte en particulier :

Corollaire 1. 10. *Soit G un groupe algébrique, défini sur k, formé de matrices unipotentes. Alors $G^{(\kappa)}$ est formé de matrices unipotentes.*

Proposition 1. 11. *Soit G un groupe algébrique nilpotent connexe défini sur k. Alors G est le produit direct de G_s et G_u: $G=G_s\times G_u$*[11], *et*

8) [1], Lemma 4. 3.

9) [1], (4. 1).

10) Pour tout groupe algébrique G, on note G_0 la composante connexe de l'élément neutre.

11) [1], Théorème 11. 1.

G_s, G_u sont définis sur k[12]. *Supposons que $G^{(\kappa)}$ est connexe et $(G_s)^{(\kappa)}$ est formé de matrices semi-simples. Alors $(G_s)^{(\kappa)}=(G^{(\kappa)})_s$, $(G_u)^{(\kappa)}=(G^{(\kappa)})_u$, et on a $G^{(\kappa)}=(G_s)^{(\kappa)}\times(G_u)^{(\kappa)}$.*

En effet, par hypothèse, on a $(G_s)^{(\kappa)}\subseteq(G^{(\kappa)})_s$, et on voit que $(G_u)^{(\kappa)}\subseteq(G^{(\kappa)})_u$ d'après Corollaire 1.10. Comme $G^{(\kappa)}$ est nilpotent connexe, on a $G^{(\kappa)}=(G^{(\kappa)})_s\times(G^{(\kappa)})_u$, d'où $\dim G=\dim G^{(\kappa)}=\dim G_s+\dim G_u=\dim (G_s)^{(\kappa)}+\dim (G_u)^{(\kappa)}=\dim (G^{(\kappa)})_s+\dim (G^{(\kappa)})_u$, ce qui montre l'assertion par les inclusions ci-dessus.

Proposition 1.12. *Soient G un groupe algébrique résoluble connexe défini sur k, Q un tore maximal de G défini sur k. Alors G est le produit semi-direct de Q par G_u: $G=Q\cdot G_u$*[13]. *Supposons que $G^{(\kappa)}$ est connexe et $Q^{(\kappa)}$ est un tore de $G^{(\kappa)}$. Alors $(G_u)^{(\kappa)}=(G^{(\kappa)})_u$ et $G^{(\kappa)}$ est le produit semi-direct du tore maximal $Q^{(\kappa)}$ par $(G_u)^{(\kappa)}$: $G^{(\kappa)}=Q^{(\kappa)}\cdot(G_u)^{(\kappa)}$.*

En effet, comme G_u est invariant dans G, $(G_u)^{(\kappa)}$ est invariant dans $G^{(\kappa)}$ d'après Corollaire 1.5. Il en résulte que $Q^{(\kappa)}\cdot(G_u)^{(\kappa)}$ est un sous-groupe algébrique de $G^{(\kappa)}$. Par hypothèse sur Q, on voit tout de suite que $Q^{(\kappa)}\cap(G_u)^{(\kappa)}=\{I^{(\kappa)}\}$[14], d'où $\dim Q^{(\kappa)}\cdot(G_u)^{(\kappa)}=\dim Q^{(\kappa)}+\dim (G_u)^{(\kappa)}=\dim Q+\dim G_u=\dim G=\dim G^{(\kappa)}$. On a donc $G^{(\kappa)}=Q^{(\kappa)}\cdot(G_u)^{(\kappa)}$, ce qui montre que $Q^{(\kappa)}$ est un tore maximal de $G^{(\kappa)}$. D'autre part, comme $G^{(\kappa)}$ est résoluble d'après Corollaire 1.8, on a $G^{(\kappa)}=Q^{(\kappa)}\cdot(G^{(\kappa)})_u$ (semi-direct), d'où s'ensuit notre assertion.

Nous allons donner maintenant quelques exemples qui montreront que les réciproques des propositions précédentes ne sont pas toujours vraies. Dans ce qui suit k désignera le corps des rationnels ayant la valuation par rapport à un nombre premier p. Le corps κ est donc un corps à p éléments.

I. Soit G le groupe orthogonal spécial par rapport à la forme quadratique X^2+Y^2. On a donc

$$G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x\end{pmatrix}\in GL(2,\Omega)\,,\quad x,y\in\Omega\,,\quad x^2+y^2=1\right\}.$$

C'est un groupe algébrique commutatif connexe de dimension 1 défini sur k. De plus, il est diagonalisable, c'est-à-dire un tore. Supposons $p=2$. Alors tout élément de $G^{(\kappa)}$ étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \xi\end{pmatrix} \text{ avec } \xi^2+\eta^2=1\,,$$

12) [1], (11.3).

13) [1], Théorème 12.2.

14) $I^{(\kappa)}$ désigne l'identié de $GL(n,\Omega_\kappa)$.

le polyôme caractéristique en est de la forme $(T+\xi)^2+\eta^2=(T+1)^2$, ce qui montre que $G^{(\kappa)}$ est formé seulement des matrices unipotentes, et par conséquent il n'est pas un tore. (c.f. Corollairs 1. 10)

II. Soit p un nombre premier quelconque. Désignons par $t(x, y)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+px & x & y \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $G=\{t(x, y),\ x, y \in \Omega,\ 1+px \neq 0\}$. On voit tout de suite que $t(x, y)\cdot t(u, v)=t(x+u+pxu,\ y+v+pxv)$, $t(x, y)^{-1}=t(-x(1+px)^{-1},\ -y(1+px)^{-1})$. Il en résulte que G est un groupe algébrique résoluble connexe de dimension 2 défini sur k. Il est clair que $G^{(\kappa)}$ est commutatif connexe et formé de matrices unipotentes. Nous allons montrer que G n'est pas nilpotent. (c.f. Corollaire 1. 3, Corollaire 1. 8 et Corollaire 1. 10) On voit immédiatement que $G_u=\{t(0, y),\ y \in \Omega\}$. Puisque le polynôme minimal de $t(x, y)$ pour $x \neq 0$ est $(T-px-1)(T-1)$, il s'ensuit que tous les éléments $t(x, y)$, $x \neq 0$ sont semi-simples. En particulier, $t(1, 0)$ est semi-simple. De la rélation $t(1, 0)\cdot t(0, 1)=t(1, p+1) \neq t(0, 1)\cdot t(1, 0) =t(1, 1)$, on peut conclure que G n'est pas nilpotent[11]. De plus, $Q=\{t(x, 0),\ x \in \Omega,\ 1+px \neq 0\}$ est un tore maximal de G, et $G=Q\cdot G_u$ (semi-direct).

III. Soit G le groupe orthogonal spécial par rapport à la forme quadratique $X^2+Y^2+2Z^2$. C'est un groupe algébrique connexe de dimension 3 défini sur k. On sait que G est simple comme un groupe algébrique[15]. On voit facilement que $x=(x_{ij}) \in G$ si et seulement si $x_{1j}^2+x_{2j}^2+2x_{3j}^2=1$ $(j=1, 2)$, $x_{13}^2+x_{23}^2+2x_{33}^2=2$, $x_{1i}x_{1j}+x_{2i}x_{2j}+2x_{3i}x_{3j}=0$, $(i, j)=(2, 1), (3, 1), (3, 2)$ et det $x=1$. Supposons $p=2$. Il en résulte que tout élément de $G^{(\kappa)}$ est de la forme

$$\xi=\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{11}+1 & 0 \\ \xi_{11}+1 & \xi_{11} & 0 \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 1 \end{pmatrix},$$

et on voit tout de suite que $G^{(\kappa)}$ est formé de matrices de cette forme. Maintenant il est facile de voir que tous les élements de $G^{(\kappa)}$ ont la valeur propre 1, d'où s'ensuit que $G^{(\kappa)}$ est nilpotent[16] (c.f. Corollaire 1. 8).

15) [3], Ch. IV, §§ 6–7.
16) [1], Théorème 19. 4.

§ 2. Réduction des groupes algébriques par rapport à un nombre infini des valuations du corps de définition.

Soit k un corps ayant un ensemble infini des valuations discrète $\{w_\lambda\}$. Nous désignons par $\mathfrak{o}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\lambda$ et κ_λ l'anneau de la valuation, l'idéal de la valuation et le corps résiduel de w_λ, pour chaque λ. Supposons que k, κ_λ sont parfaits. De plus, on suppose que l'ensemble $\{w_\lambda\}$ suffit à la condition (I) dans le mémoire de G. Shimura, c'est-à-dire que tout élément non nul de k est $\mathfrak{p}_\lambda$-unité pour presque tous les λ[1]. On notera $\Omega_{\kappa_\lambda}=\Omega_\lambda$ et $G^{(\kappa_\lambda)}=G^{(\lambda)}$ pour un groupe algébrique G défini sur k. Nous utiliserons souvent le fait que si G est connexe défini sur k, alors $G^{(\lambda)}$ est aussi codnexe pour presque tous les λ[17].

D'abord nous allons chercher la relation entre un groupe algébrique et son algèbre de Lie dans le procédé de la réduction par rapport à un nombre infini des valuations.

Théorème 2.1. *Soient* $G(\subseteq GL(n, \Omega))$ *un groupe algébrique défini sur* k, $\mathfrak{g}(\subseteq M(n, \Omega))$ *l'algèbre de Lie de* G[18]. *Soit* $\{X_1, \cdots, X_r\}$, $r=\dim G=\dim \mathfrak{g}$, *une base de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $X_i\in M(n, k)$, $1\leq i\leq r$. *Pour presque tous les* λ, *on a* $X_i\in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$[19], $1\leq i\leq r$, *et* $X_i^{(\lambda)}$[20] *sont linéairement indépendants sur* Ω_λ. *Désignons par* $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ *l'espace vectoriel engendré par* $X_i^{(\lambda)}$ *à coefficients dans* Ω_λ. *Alors* $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ *est l'algèbre de Lie de* $G^{(\lambda)}$ *pour presque tous les* λ.

Démonstration. Soit $\mathfrak{A}$ l'ideal associé à G:

$$\mathfrak{A}=\{F(Y)\in\Omega[Y],\quad Y=(Y_{ij}),\ F(x)=0\quad \text{pour tout}\quad x\in G\}.$$

Comme G est défini sur k, on peut trouver une base $F_\nu(Y)$ $(1\leq\nu\leq t)$ de $\mathfrak{A}$ telle que $F_\nu(Y)\in k[Y]$. Pour presque tous les λ, on a $F_\nu(Y)\in\mathfrak{o}_\lambda[Y]$. Par définition de l'algèbre de Lie de G, on a

$$\mathfrak{g}=\left\{X=(X_{ij})\in M(n, \Omega)\,;\ \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial X_{ij}}\right)_I X_{ij}=0,\quad 1\leq\nu\leq t\right\}.$$

Posons $\quad \mathfrak{A}_\lambda=\{F(Y)\in\mathfrak{o}_\lambda[Y],\ F(x)=0\quad \text{pour tout}\quad x\in G\}.$

Alors on sait que

$$G^{(\lambda)}=\{\xi_\lambda\in GL(n, \Omega_\lambda),\quad F^{(\lambda)}(\xi_\lambda)=0\quad \text{pour tout}\quad F(Y)\in\mathfrak{A}_\lambda\}^{21)},$$

17) [7], § 6 Théorème 26.

18) [2], Ch. II, § 8.

19) $M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$ note la totalité des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans l'anneau $\mathfrak{o}_\lambda$.

20) Pour toute matrice $X=(x_{ij})\in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$, on posera $X^{(\lambda)}=(x_{ij}^{(\lambda)})$, $x_{ij}^{(\lambda)}$ étant la classe de x_{ij} modulo $\mathfrak{p}_\lambda$.

21) [7], § 3, Théorème 7.

où $F^{(\lambda)}(Y)$ désigne la classe de $F(Y)$ modulo $\mathfrak{p}_\lambda$. Soit maintenant $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ l'idéal associé à $G^{(\lambda)}$. Il est clair que $F_\nu^{(\lambda)}(Y) \in \mathfrak{B}^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ. Notons $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$ l'algèbre de Lie de $G^{(\lambda)}$:

$$\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \left\{ X_\lambda \in M(n, \Omega_\lambda) ; \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} X_{\lambda; i,j} = 0 \quad \text{pour tout } F_\lambda(Y) \in \mathfrak{B}^{(\lambda)} \right\}.$$

Si l'on pose

$$\mathfrak{g}_2^{(\lambda)} = \left\{ X_\lambda \in M(n, \Omega_\lambda) ; \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_\nu^{(\lambda)}}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} X_{\lambda; i,j} = 0 , \quad 1 \leq \nu \leq t \right\},$$

il résulte que $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} \subseteq \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ et que $\dim \mathfrak{g}_2^{(\lambda)} = r$ pour presque tous les λ, car

$$\operatorname{rang} \left\| \left(\frac{\partial F_\nu^{(\lambda)}}{\partial Y_{ij}} \right)_{I^{(\lambda)}} \right\| = \operatorname{rang} \left\| \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial Y_{ij}} \right)_{I} \right\| = n - r$$

pour presque tous les λ. Comme $\dim \mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \dim G^{(\lambda)} = r$, on a $\mathfrak{g}_1^{(\lambda)} = \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ. Maintenant on voit immédiatement que $X_i^{(\lambda)} \in \mathfrak{g}_2^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ, d'où $\mathfrak{g}^{(\lambda)} \subseteq \mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$. Puisque $\dim \mathfrak{g}^{(\lambda)} = r = \dim \mathfrak{g}_1^{(\lambda)}$, il en résulte notre assertion.

Proposition 2. 2.*) *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k, et soient $F_\nu \in k[Y]$ $(1 \leq \nu \leq t)$ des générateurs de l'idéal associé à G. Alors $G^{(\lambda)}$ est une composante connexe de l'ensemble algébrique défini par le système d'équations $F_\nu^{(\lambda)}(\xi) = 0$ pour presque tous les λ.*

Cela résulte de l'égalité des rangs dans la démonstration du Théorème 2. 1 et du critère de simplicité de Zariski**).

Corollaire 2. 3. *Soient G, H des groupes algébriques connexes definis sur k. On a* $\dim (G \cap H) = \dim (G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)})$ *pour presque tous les λ.*

En effet, en vertu de la Proposition 2. 2, pour presque tous les λ, la composante connexe de $G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)}$ contenant $I^{(\lambda)}$ est contenue dans la composante connexe de $(G \cap H)^{(\lambda)}$, et comme $(G \cap H)^{(\lambda)}$ est contenu dans $G^{(\lambda)} \cap H^{(\lambda)}$, ces deux composantes connexes sont égales, c.q.f.d.

Nous allons maintenant continuer de suivre le cours du mémoire de Borel et examiner la réduction des groupes algébriques par rapport à un nombre infini des valuations de k.

Proposition 2. 4. *Soit G un tore défini sur k. Alors $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ.*

---

* Cette Proposition et le Corollaire suivant m'ont été communiqués per J. Dieudonné.

** p. ex. voir P. Samuel, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Erg. Math. Berlin, 1955, II. § 4 p. 74.

D'après Corollaire 1.3, il suffit de remarquer que tout élément de $G^{(\lambda)}$ est semi-simple pour presque tous les λ. Comme G est défini sur k, il existe $s \in GL(n, \bar{k})$ tel que $sGs^{-1} \subseteq D(n)$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini tel que $s \in GL(n, k')$. Les prolongations de $\mathfrak{o}_\lambda$ (resp. $\mathfrak{p}_\lambda$) dans k' seront désignées par $\mathfrak{o}'_{\lambda'}$ (resp $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$). Alors il résulte que $s, s^{-1} \in M(n, \mathfrak{o}'_{\lambda'})$ pour presque tous les λ'. Pour tout $\xi \in G^{(\lambda)} = G^{(\lambda')}$ [21], il existe $x \in G$ tel que $x \xrightarrow{\mathfrak{o}'_{\lambda'}} \xi$, et il s'ensuit que tous les composants de la matrice sxs^{-1} sont contenus dans l'anneau de la spécialisation : $x \xrightarrow{\mathfrak{o}'_{\lambda'}} \xi$, d'où $\sigma\xi\sigma^{-1} \in D(n)^{(\lambda)}$, σ étant la classe de s modulo $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$, c.q.f.d.

Proposition 2.5. *Soit G un groupe algébrique nilpotent connexe défini sur k. Alors $G = G_s \times G_n$ et on a $(G_s)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_s$, $(G_u)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_u$, $G^{(\lambda)} = (G_s)^{(\lambda)} \times (G_u)^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

Cela résulte de la Proposition 1.11 et de la Preposition 2.4.

Proposition 2.6. *Soient G un groupe algébrique résoluble connexe défini sur k, Q un tore maximal de G défini sur k. Alors $G = Q \cdot G_u$ (semi-direct), et on a $(G_u)^{(\lambda)} = (G^{(\lambda)})_u$, $G^{(\lambda)} = Q^{(\lambda)}$ (semi-direct) pour presque tous les λ, et $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

Cela resulte de la Proposition 1.12 et de la Proposition 2.4.

Pour démontrer la Proposition 2.10 sur des sous-groupes résolubles connexes maximaux de G, il nous faut quelques lemmes sur la variété des drapeaux. Rappelons la définition de la variété des drapeaux[22]. On appelle drapeau dans un espace vectoriel V à n dimensions le système formé par n sous-espaces emboités E_i :

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n = V, \quad \dim E_i = i \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

Une base d'un drapeau (E_i) est une base (e_i) de V telle que $e_1, \cdots, e_i$ sous-tendent E_i, $1 \leq i \leq n$. L'ensemble des drapeaux de Ω^n s'identifie à une variété projective non singulière, de dimension $n(n-1)/2$, définie sur le corps premier, que nous appelons *la varitété des drapeaux* de Ω^n et désignons par $F(n)$. Pour $F = (E_i) \in F(n)$, $x \in GL(n, \Omega)$, posons $xF = (xE_i)$. Alors il est clair que $F(n)$ est un espace de transformations pour $GL(n, \Omega)$ et que $GL(n, \Omega)$ y est transitif. Soint F_0 le drapeau ayant les vecteurs coordonées de Ω^n comme base, F un drapeau et $g \in GL(n, \Omega)$ tel que $F = gF_0$. Alors $xF = F$ si et seulement si x est représenté par une matrice triangulaire relativement à une base (e_i) de F ou encore si $g^{-1}xg \in T(n)$. Soit K un sur-corps de k. Alors un drapeau F est rational sur K si et seulement si on peut trouver une base (e_i) de F

22) [1], (16.1).

formée de vecteurs à coordonnées dans K, donc si l'on peut trouver $g \in GL(n, K)$ tel que $F = gF_0$.

Lemme 2.7. *Soient G un groupe algébrique connexe et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G. G opère donc sur $F(n)$, et il y possède un point fixe F*[23]*. Alors on a $R = \{h \in G;\ h(F) = F\}_0$, c'est-à-dire R coïncide avec la composante connexe de l'élément neutre du sous-groupe algébrique de G laissant fixe le drapeau F.*

En effet, $h(F) = F$ si et seulement si $h \in gT(n)\, g^{-1}$, où $F = gF_0$. On a donc $\{h \in g;\ h(F) = F\} = G \cap gT(n)\, g^{-1}$. Notre assertion résulte du fait que le groupe $T(n)$ est résoluble.

Lemme 2.8. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G défini sur k. Alors il existe un drapeau F rationnel sur $\bar{k}$ tel qun Fest un point fixe par G et que $W = G(F)$ est une orbite fermée définine sur $\bar{k}$.*

En effect, on sait qu'il existe une orbite fermée W définie sur $\bar{k}$[24]. On peut trouver $F' \in F(n)$, rationnel sur $\bar{k}$, tel que $W = G(F')$. Soit H' le sous-groupe laissant fixe le drapeau F'. Alors il résulte que H_0' est résoluble connexe maximal[25]. Il existe donc un élément, rationnel sur $\bar{k}$, de G tel que $R = xH_0'x^{-1}$[26]. Puisque H_0' laisse fixe F', R laisse fixe $F = xF'$, ce dernier drapeau étant rationnel sur $\bar{k}$. On voit tout de suite que $G(F) = G(F') = W$, c.q.f.d.

Soient k' un sur-corps de degré fini de k, et $F = gF_0$ un drapeau rationnel sur k', $g \in GL(n, k')$. Si l'on désigne par $\mathfrak{o}'_{\lambda'}$ (resp. $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$) les prolongations de $\mathfrak{o}_\lambda$ (resp. $\mathfrak{p}_\lambda$) dans k', alors on a $g, g^{-1} \in M(n, \mathfrak{o}'_{\lambda'})$ pour presque tous les λ'. Pour ces λ', on a donc $g^{(\lambda')} \in GL(n, \kappa'_{\lambda'})$, oú $\kappa'_{\lambda'}$ désigne le corps résiduel $\mathfrak{o}'_{\lambda'}/\mathfrak{p}'_{\lambda'}$. Le corps $\kappa'_{\lambda'}$ peut être consideré comme un sous-corps de Ω_λ contenant κ_λ. Soit $F_0^{(\lambda)}$ le drapeau ayant les vecteurs coordonnées de Ω_λ^n. On peut donc définir un drapeau $F^{(\lambda')} \in F(n)^{(\lambda)}$[27] par $F^{(\lambda')} = g^{(\lambda')} F_0^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ'. On appelle $F^{(\lambda')}$ le drapeau obtenu de F par la réduction modulo $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$.

Lemme 2.9. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, F un drapeau rationnel sur un sur-corps k' de k de degré fini, et H le sous-groupe de G laissant fixe le drapeau F. Alors H est défini sur k' et on*

23) [1], Proposition 15.5.

24) [1], Proposition 15.4, (15.6).

25) Voir la démonstration de Théorème 16.5 dans [1].

26) [1] Théorème 16.5, Proposition 16.10.

27) On note $F(n)^{(\lambda)}$ la variété des drapeaux de $\Omega_\lambda{}^n$.

a $H^{(\lambda')} \subseteq \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')};\ h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\}$ *et les dimensions des deux membres sont égaux pour presque tous les* λ'.

En effet, d'après Lemme 2.7, on a $H = G \cap gT(n)\, g^{-1}$, $F = gF_0$, d'oú s'ensuit que H est défini sur k'. On voit tout de suite que

$$\begin{aligned} H^{(\lambda')} &\subseteq G^{(\lambda')} \cap (gT(n)\, g^{-1})^{(\lambda')} = G^{(\lambda')} \cap g^{(\lambda')} T(n)^{(\lambda)} g^{(\lambda')-1} \\ &= \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')};\ h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\} \end{aligned}$$

pour presque tous les λ'. L'égalité des dimensions résulte du Corollaire 2.3, c.q.f.d.

La proposition suivante est fondamentale dans ce travail, et presque toutes les propositions ultérieures se basent sur cette proposition.

Proposition 2.10. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k, et R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G, défini sur k. Alors $R^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

Démonstration. D'après Lemme 2.8, il existe un drapeau F rationnel sur $\bar{k}$ tel que F est un point fixe par G et que $W = G(F)$ est une orbite fermée définie sur $\bar{k}$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini sur lequelle F est rationnel et W est définie. Il résulte du Lemme 2.7 que

$$R = \{h \in G;\ h(F) = F\}_0 .$$

D'après Lemme 2.9, on voit donc que

$$R^{(\lambda')} = \{h^{(\lambda')} \in G^{(\lambda')};\ h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')}) = F^{(\lambda')}\}_0$$

pour presque tous les λ'. Soit τ l'application rationnelle partout définie: $(g, F) \rightarrow g(F)$ de $G \times F$ sur W. Puisque G, F, W, τ sont définis sur k', il en résulte que l'application $\tau^{(\lambda')}$ de $G^{(\lambda')} \times F^{(\lambda')}$ dans $W^{(\lambda')}$ est surjective et partout définie pour presque tous les λ', oú $\tau^{(\lambda')}$, $W^{(\lambda')}$ désignent les objects obtenus de τ, W par la réduction modulo $\mathfrak{p}'_{\lambda'}$, au sens de G. Shimura[28]. Comme W est projective, $W^{(\lambda')} = G^{(\lambda')}(F^{(\lambda')})$ est aussi projective. Pour tel λ', soit $S_{\lambda'}$ un sous-groupe algébrique résoluble connexe contenant $R^{(\lambda')}$, ce dernier groupe étant résoluble d'après Corollaire 1.8. L'application $g^{(\lambda')} \rightarrow g^{(\lambda')}(F^{(\lambda')})$ de $G^{(\lambda')}$ sur $W^{(\lambda')}$ passe au quotient par

28) Cela résulte de la proposition suivante: "*Soient V, W des variétés algébriques (abstraites), f une application rationelle partout définie de V sur W. Supposons que V, W, f sont définis sur k. Soient $V^{(\lambda)}$, $W^{(\lambda)}$, $f^{(\lambda)}$ les objects obtenus de V, W, f par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$. Alors l'application $f^{(\lambda)}$ de $V^{(\lambda)}$ dans $W^{(\lambda)}$ est surjective et partout définie pour presque tous les λ*". La démonstration de cette proposition sera donnée dans un mémoire (pas encore publié) de G. Shimura–Y. Taniyama sur la théorie de la multiplication complexe.

$R^{(\lambda')}$ et induit une application rationnelle, partout définie de $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ sur $W^{(\lambda')}$. Il est clair que l'image réciproque de chaque point se compose de m points, oú m désigne l'indice de $R^{(\lambda')}$ dans le groupe $\{h^{(\lambda')}\in G^{(\lambda')}; h^{(\lambda')}(F^{(\lambda')})=F^{(\lambda')}\}$. Comme $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ est non singulière, on voit que $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ est une variété projective[29]. Maintenant $S_{\lambda'}$ opère sur $G^{(\lambda')}/R^{(\lambda')}$ par les translations à gauche et y possède un point fixe[23], donc il est conjugué à un sous-groupe de $R^{(\lambda')}$. On a donc $S_{\lambda'}=R^{(\lambda')}=R^{(\lambda)}$, car R est défini sur k, ce qui montre notre assertion.

Proposition 2.11. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k. Si $G^{(\lambda)}$ est résoluble pour presque tous les λ, alors G est résoluble.*

En effet, on sait qu'il existe un sous-groupe R résoluble connexe maximal de G défini sur $\bar{k}$[30]. Soit k' un sur-corps de k de degré fini, sur lequel R est défini. Alors $R^{(\lambda')}$ est résoluble connexe maximal dans $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après la Proposition 2.10. On a donc $R^{(\lambda')}=G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ', d'oú $R=G$, c.q.f.d.

Théorème 2.12. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Alors G est résoluble si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est résoluble pour presque tous les λ.*

Cela résulte du Corollaire 1.8 et de la Proposition 2.11.

Proposition 2.13. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et R un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k. Si $R^{(\lambda)}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ, alors R est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G.*

D'après Proposition 2.11, R est résoluble. Soit S un sous-groupe résoluble connexe de G contenant R. On peut supposer que S est défini sur $\bar{k}$. Soit k' un sur-corps de degré fini de k sur lequel S est rationnel. Alor $S^{(\lambda')}$ est un sous-groupe résoluble connexe de $G^{(\lambda')}$ contenant $R^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ', on a donc $S^{(\lambda')}=R^{(\lambda')}$ pour presque les λ', d'oú $S=R$, c.q.f.d.

Théorème 2.14. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et R un sous-groupe algébrique connexe de G, défini sur k. Alors R est un sous-groupe résoluble connexe maximal de G si et seulement si $R^{(\lambda)}$ est un sons-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

Cela résulte de la Proposition 2.10 et de la Proposition 2.14.

---

29) [1], Lemme 14. 1.

30) [1], Lemme 16. 9.

Proposition 2. 15. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et Q un tore maximal de G défini sur k. Alors $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

En effet, soit R un sous-groupe algébrique résoluble connexe maximal de G le contenant, défini sur un sur-corps k' de k de degré fini. Alors $Q^{(\lambda)}=Q^{(\lambda')}$ est un tore maximal de $R^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2. 6. Puisque $R^{(\lambda')}$ est un sous-groupe résoluble connexe maximal de $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2. 10, $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ[31], c.q.f.d.

A partir de maintenant, le corps k sera toujours supposé être de caractéristique 0, parce que nous nous servirons des résultats dûs à C. Chevalley sur la correspondance entre groupes et algèbres de Lie.

Proposition 2. 16. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Si $G^{(\lambda)}$ est commutatif pour presque tous les λ, alors G est commutatif.*

Supposons que G n'est pas commutatif. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G n'est pas commutatif[32]. Alors il exists $X, Y\in\mathfrak{g}\cap M(n, k)$ tels que $[X, Y]\neq 0$. On a donc $X, Y\in M(n, \mathfrak{o}_\lambda)$ et $[X^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)}]=[X, Y]^{(\lambda)}\neq 0$ pour presque tous les λ. Comme $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ est l'algèbre de Lie de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ d'après Théorème 2. 1, il résulte que $\mathfrak{g}^{(\lambda)}$ est contenu dans l'algèbre enveloppante de $G^{(\lambda)}$[33], ce qui montre que $G^{(\lambda)}$ n'est pas commutatif pour presque tous les λ, c.q.f.d.

Théorème 2. 17. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Alors G est commutatif si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est commutatif pour presque tous les λ.*

Cela résulte du Corollaire 1. 3 et de la Proposition 2. 16.

Proposition 2. 18. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Si $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ, alors G est un tore.*

D'après Proposition 2. 16, G est commutatif. On a donc $G=G_s\times G_u$, et $G^{(\lambda)}=(G_s)^{(\lambda)}\times(G_u)^{(\lambda)}$, $(G_s)^{(\lambda)}$ étant un tore pour presque tous les λ en vertu de la Proposition 2. 5. Comme $(G_u)^{(\lambda)}=\{I^{(\lambda)}\}$ pour presque tous les λ, on a $G_u=\{I\}$, d'oú $G=G_s$ est un tore.

Théorème 2. 19. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k.*

31) [1], Corollaire 16. 6.
32) [3], Ch. III, § 8 Proposition 12, Corollaire 2.
33) [2], Ch. II, § 8 Proposition 6.

Alors G est un tore si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est un tore pour presque tous les λ.

Cela résulte de la Proposition 2.4 et de la Proposition 2.18.

Proposition 2.20. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et Q un sous-groupe algébrique connexe de G. Si $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ, alors Q est un tore maximal de G.*

En effet, d'après Proposition 2.18 Q est un tore. Soit Q_1 un tore de G contenant Q, défini sur k'. Alors $Q_1^{(\lambda')}$ est tore contenant le tore $Q^{(\lambda')}=Q^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ', d'oú $Q_1=Q$, c.q.f.d.

Théorème 2.21. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et Q un sous-groupe algébrique connexe de G. Alors Q est un tore maximal de G si et seulement si $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

Cela résulte de la Proposition 2.15 et de la Proposition 2.20.

Pour démontrer la Proposition 2.24 sur les sous-groupes de Cartan de G, il nous faut deux lemmes suivants.

Lemme 2.22. *Soit K un corps parfait infini. Soient $G(\leqq GL(n, K))$ un K-groupe algébrique, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Désignons par $\nu_{\mathfrak{g}}(x)$ la nullité de $I-Ad\cdot x$, $x \in G$*[34]. *Alors on a* $\dim Z(x_s) \leqq \nu_{\mathfrak{g}}(x)$.

En effet, posons

$$\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{g}\,;\ (I-Ad\cdot x)^m X = 0\,,\ \ m \text{ étant un certain entier } >0\}\ .$$

On sait que $\dim \mathfrak{a} = \nu_{\mathfrak{g}}(x)$[35]. Comme $Ad.$ est une représantation rationnelle du groupe algébrique G, on a $Ad\cdot x = Ad\cdot(x_s\cdot x_u) = (Adx_s)\cdot(Adx_u) = (Ad\cdot x)_s\cdot(Ad\cdot x)_u$[36], ce qui montre que la composante semi-simple de $Ad\cdot x$ est $Ad\cdot x_s$, d'oú $(I-Ad\cdot x)_s = I-Ad\cdot x_s$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \{X \in \mathfrak{g}\,;\ (I-Adx)_s\cdot X = 0\} = \{X \in \mathfrak{g}\,;(I-Adx_s)\cdot X = 0\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g}\,;\ x_s\cdot X = X\cdot x_s\}\ .\end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie de $Z(x_s)$. Comme $\mathfrak{z}$ est contenue dans l'algèbre enveloppante de $Z(x_s)$[33], il résulte que $\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{a}$, d'oú

$$\dim Z(x_s) = \dim \mathfrak{z} \leqq \dim \mathfrak{a} = \nu_{\mathfrak{g}}(x)\,, \quad \text{c.q.f.d.}$$

34) [3], Ch. VI, § 3.

35) [3], Ch. VI, § 3. Proposition 2.

36) [1] Théorème 9.3, Remarque 9.5.

Remarque. *On a l'égalité*: $\dim Z(x_s) = \nu_{\mathfrak{g}}(x)$ *lorsque* K *est de caractéristique* 0[37].

Lemme 2.23. *Soient G un groupe algébrique défini sur k, et g un élément semi-simple de G, rationnel sur k. Alors on a* $\dim (Z(g))^{(\lambda)} = \dim Z(g^{(\lambda)})$ *pour presque tous les λ, où $g^{(\lambda)}$ désigne la matrice obtenue de g modulo $\mathfrak{p}_\lambda$.*

En effet, on voit immédiatement que $Z(g)^{(\lambda)} \subseteq Z(g^{(\lambda)})$. D'après Lemme 2.22, Remarque ci-dessus et Théorème 2.1, on a

$$\nu_{\mathfrak{g}}(g) = \dim Z(g) = \dim Z(g)^{(\lambda)} \leq \dim Z(g^{(\lambda)}) \leq \nu_{\mathfrak{g}^{(\lambda)}}(g^{(\lambda)})$$

pour presque tous les λ. Alors il suffit de remarquer, pour démontrer notre Lemme, que $\nu_{\mathfrak{g}}(g) = \nu_{\mathfrak{g}^{(\lambda)}}(g^{(\lambda)})$ pour presque tous les λ. Mais cela résulte des faits que le polynôme caractéristique de $I^{(\lambda)} - Ad \cdot g^{(\lambda)}$ est obtenu de celui de $I - Adg$ par la réduction modulo $\mathfrak{p}_\lambda$ pour presque tous les λ et que les multiplicités de valeurs propres nulles de ces polynômes sont égaux pour presque tous les λ, c.q.f.d.

Proposition 2.24. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et C un sous-groupe de Cartan de G défini sur k. Alors $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

En effet, ill existe un tore maximal de G défini sur $\bar{k}$ tel que $C = Z(Q)$[38]. Soit g un élément régulier semi-simple rationnel sur $\bar{k}$ tel que $C = Z(Q) = Z(g)$. Soit k' un sur-corps de k de degré fini sur lequel Q est défini et g est rationnel. Désignons par $d^{(\lambda)}$ la dimension de sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$. On a

$$\dim Z(Q) = \dim Z(g) = \dim Z(g^{(\lambda')}) \geq d^{(\lambda)}$$

pour presque tous les λ' d'après Lemme 2.23, et

$$\dim Z(Q) = \dim (Z(Q))^{(\lambda)} \leq \dim Z(Q^{(\lambda')}) = d^{(\lambda)} \text{ [38]}$$

pour presque tous les λ' d'après Proposition 1.2, Proposition 2.15, d'oú

$$\dim Z(Q)^{(\lambda)} = \dim C^{(\lambda)} = d^{(\lambda)}, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition 2.25. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Si $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ, alors G est nilpotent.*

Soit C un groupe de Cartan de G défini sur k'. Alors $C^{(\lambda')}$ est un

37) [3], Ch. VI, § 4, Proposition 8.

38) [1] Théorème 20. 4, Proposition 20. 8.

groupe de Cartan de $G^{(\lambda')}$ pour presque tous les λ' d'après Proposition 2.24. On a donc $C^{(\lambda')}=G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ', d'où $C=G$, c.q.f.d.

Théorème 2.26. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Alors G est nilpotent si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ.*

Cela résulte du Corollaire 1.8 et de la Proposition 2.25.

Psoposition 2.27. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Si $G^{(\lambda)}$ est formé de matrices unipotentes pour presque tous les λ, alors G est formé de matrices unipotentes.*

En effet, on sait que $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour ces λ[16]. Il en résulte que G est nilpotent d'après Proposition 2.25. On a donc $G=G_s\times G_u$, et $G^{(\lambda)}=(G_s)^{(\lambda)}\times(G_u)^{(\lambda)}$, $(G_s)^{(\lambda)}$ étant un tore pour presque tous les λ d'après Proposition 2.5. Comme $(G_s)^{(\lambda)}=\{I^{(\lambda)}\}$ pour presque tous les λ, on a $G_s=\{I\}$, d'où $G=G_u$, c.q.f.d.

Théorème 2.28. *Soit G un groupe algébrique connexe défini sur k. Alors G est formé de matrices unipotentes si et seulement si $G^{(\lambda)}$ est formé de matrices unipotentes pour presque tous les λ.*

Cela résulte du Corollaire 1.10 et de la Proposition 2.27.

Proposition 2.29. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et C un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k. Si $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ, alors C est un sous-groupe de Cartan de G.*

En effet, comme $C^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tous les λ, C est nilpotente d'après Proposition 2.25. De plus il est clair que $C^{(\lambda)}$ est nilpotent maximal pour presque tous les λ. Il suffit donc démontrer que $\dim N(C)=\dim C$[39]. Mais c'est la conséquence de la rélation suivante:

$$\dim C\leq\dim N(C)=\dim(N(C))^{(\lambda)}\leq\dim N(C^{(\lambda)})=\dim C^{(\lambda)}=\dim C\,,$$

vu Proposition 1.4, c.q.f.d.

Théorème 2.30. *Soient G un groupe algébrique connexe défini sur k, et C un sous-groupe algébrique connexe de G défini sur k. Alors C est un sous-groupe de Cartan de G si et seulement si $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tous les λ.*

---

39) [1], (20.2).

Cela résulte de la Proposition 2.24 et de la Proposition 2.29.

(Reçu le 24. Février, 1958)

Bibliographie

[1] A. Borel: Groupes linéaires algébriques, Ann. of Math. **64** (1956), 20–82.

[2] C. Chevalley: Théorie des groupes de Lie, Tome II: Groupes algébriques, Paris, 1951, Hermann éd.

[3] ————: Théorie des groupes de Lie, Tome III: Groupes algébriques, Paris, 1954, Hermann éd.

[4] E. R. Kolchin: Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous linear differential equations, Ann. of Math. 49 (1948), 1–42; Chapter I.

[5] ————: On certain concepts in the theory of algebraic matric groups, Ibid., 774–789.

[6] T. Ono: Arithmetic of orthogonal groups, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 79–91.

[7] G. Shimura: Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, Amer. J. Math. **77** (1955), 134–176.

[8] ————: On complex multiplications, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko (1955), 23–30.

[9] A. Weil: Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, No. 29, 1946.

[10] J. Dieudonné: Remarques sur la résuction mod. $\mathfrak{p}$ des groupes linéaires algébriques, Osaka Math. J. **10** (1958), 75–82.