Michigan Math. J. 51 (2003)

Formules de Division dans $\mathbb{C}^n$

Emmanuel Mazzilli

Introduction

Dans cet article, nous construisons des formules de représentations intégrales pour la division des fonctions holomorphes. L'avantage de ce type de formule est le caractère explicite des solutions données au problème de division. Il existait déjà de telles formules intégrales (voir [2]), celles-ci ont été utilisées, dans les domaines strictement pseudoconvexes, pour obtenir des théorèmes optimaux de décomposition dans les espaces de Lipschitz (voir [3]). Malheureusement, dès que le domaine est faiblement pseudoconvexe, les formules de [2] ne permettent plus d'obtenir des résultats précis, même dans des cas très simples; plus précisément, si f est holomorphe sur D et $f = 0$ sur $V = \{z \in D \mid f_1(z) = f_2(z) = 0\}$, où $\partial f_1(z) \wedge \partial f_2(z) \neq 0$ pour $z \in V \cap D$, les formules de [2] donnent une décomposition de f: $f = f_1 h_1 + f_2 h_2$, mais cette décomposition comporte beaucoup de compensations entre les deux termes à droite de l'égalité, même si f est régulière. Ainsi en modifiant la construction de [2], nous obtenons de nouvelles formules de division qui donnent des résultats satisfaisants dans certains domaines faiblement pseudoconvexes (par exemple les convexes de type fini). A la partie 5, nous envisageons sur des exemples, le cas des variétés singulières.

Notations. Pour $\alpha > 0$, on introduit l'espace de régularité pour les fonctions holomorphes:

$$B_\alpha(D) := \left\{ f \in \mathrm{hol}(D) \mid \sup_{\zeta \in D} |f(\zeta)| d(\zeta, \partial D)^\alpha < \infty \right\}.$$

On note $B_0(D)$, l'espace de régularité pour les fonctions holomorphes:

$$B_0(D) := \left\{ f \in \mathrm{hol}(D) \mid \sup_{\zeta \in D} |f(\zeta)| / \ln(d(\zeta, \partial D)) < \infty \right\}.$$

On note $[\delta]$ le courant d'intégration sur la diagonale de $\mathbb{C}^{2n}$, G_i désignera une fonction d'une variable complexe holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$, et $G_i^{\alpha_i}$ sa dérivée d'ordre α_i. $Q_i(\zeta, z)$ (resp., $s(\zeta, z)$) est une $(1,0)$ forme de classe C^1 sur $\bar{D} \times \bar{D}$:

$$Q_i(\zeta, z) := \sum_{j=1}^n Q_i^j(\zeta, z) d(\zeta_j - z_j), \qquad s(\zeta, z) := \sum_{j=1}^n s^j(\zeta, z) d(\zeta_j - z_j).$$

Received September 4, 2001. Revision received March 10, 2003.

Nous noterons également,

$$\langle Q_i, z-\zeta\rangle := \sum_{j=1}^{n} Q_i^j(\zeta, z)(z_j-\zeta_j), \qquad \langle s(\zeta, z), \zeta - z\rangle := \sum_{j=1}^{n} s^j(\zeta, z)(\zeta_j - z_j),$$

et nous supposerons que $Q_i(\zeta, z)$ est holomorphe en z pour ζ fixé dans $\bar{D}$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, un multi-indice de longueur N, $(\bar{\partial} Q)^\alpha := (\bar{\partial} Q_1)^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge (\bar{\partial} Q_N)^{\alpha_N}$. Enfin, C_n est une constante qui ne dépend que de n.

1. Un Corollaire du Théorème de Berndtsson Andersson

Soient, D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière lisse, K et P définis de la façon suivante,

$$K := (-1)^{n+1} C_n \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_N)\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_N=n-1}} \frac{(n-1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!} G_1^{\alpha_1}\cdots G_N^{\alpha_N} \frac{s\wedge(\bar{\partial}s)^{\alpha_0}\wedge(\bar{\partial}Q)^\alpha}{\langle s, \zeta - z\rangle^{\alpha_0+1}},$$

$$P := (-1)^{n} C_n \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\\ \alpha_1+\cdots+\alpha_N=n}} \frac{(n-1)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!} G_1^{\alpha_1}\cdots G_N^{\alpha_N} \wedge (\bar{\partial}Q)^\alpha$$

où $G_i^{\alpha_i} := G_i^{\alpha_i}(\langle Q_i, z-\zeta\rangle + 1)$, avec G_i une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ contenant l'image de $\bar{D}\times\bar{D}$ par l'application qui à (ζ, z) associe $\langle Q_i(\zeta, z), z-\zeta\rangle + 1$ et $G_i(1) = 1$. De plus nous supposons $|s(\zeta, z)| \le B|\zeta - z|$ et $\langle s(\zeta, z), \zeta - z\rangle \ge C|\zeta - z|^2$, uniformément par rapport à $\zeta \in \bar{D}$ et z dans un compact de D. Sous toutes ces conditions, nous avons le théorème de Berndtsson Andersson [1].

THÉORÈME 1.1. *$\bar{\partial}_{\zeta,z} K = [\delta] + P$ sur $D\times D$ au sens des courants.*

REMARQUE. L'égalité entre courants reste vraie sans la condition Q_i holomorphe en z pour ζ fixé.

COROLLAIRE 1.1. *Sous les mêmes conditions qu'au Théorème 1.1, avec K et P définis comme précédemment, mis à part le fait que pour $i_0 \in \{1, \dots, N\}$, $G_{i_0}(1) = 0$, nous avons pour f une (p, q) forme dans $C^1(\bar{D})$,*

$$0 = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D} f\wedge K_{p,q} \\ \displaystyle\qquad + (-1)^{p+q+1}\left(\int_D \bar{\partial} f\wedge K_{p,q} - \bar{\partial}_z \int_D f\wedge K_{p,q-1}\right) & \textit{pour } q > 0, \\ \displaystyle\int_{\partial D} f\wedge K_{p,0} + (-1)^{p+1}\int_D \bar{\partial} f\wedge K_{p,0} - \int_D f\wedge P_{p,0} & \textit{pour } q = 0, \end{cases}$$

où $K_{p,q}$ désigne la composante de K de bidegré (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ (resp., $P_{p,q}$ désigne la composante (p, q) en z et $(n-p, n-q)$ en ζ).

Preuve. Notons, K et P les noyaux construits avec la fonction G_{i_0} du corollaire, K_1 et P_1 les noyaux construits avec la fonction $G_{i_0} + 1$, K_2 et P_2 les noyaux construits avec la fonction constante égale à 1. Il vient sans difficulté que $K = K_1 - K_2$ et $P = P_1 - P_2$; maintenant, en appliquant le théorème de Berndtsson–Andersson à K_1 et K_2, nous obtenons $\bar{\partial} K = P$ au sens des courants. Pour obtenir le résultat, il suffit de traduire cette égalité, au sens des courants, sur les formes différentielles. □

2. Une Formule de Division

DÉFINITION 2.1. Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à bord C^∞ lisse. On dira que D est régulier s'il existe, H une fonction de $\bar{D} \times \bar{D}$ dans $\mathbb{C}^n$ et ρ une fonction definissante de D de classe C^∞ au voisinage de $\bar{D}$, vérifiant les propriétés suivantes:

(i) il existe $H : \bar{D} \times \bar{D} \to \mathbb{C}^n$, $(\zeta, z) \to (H_1(\zeta, z), \ldots, H_n(\zeta, z))$, et $H \in C^1(\bar{D} \times \bar{D})$;
(ii) $\sum_{i=1}^n H_i(\zeta, z)(z_i - \zeta_i) - \rho(\zeta) \neq 0$ pour tout $(\zeta, z) \in \bar{D} \times D$;
(iii) H_i holomorphe en z pour $\zeta \in D$.

EXEMPLES. Les domaines strictement pseudoconvexes sont réguliers; il suffit de prendre la fonction définie par Fornaess dans [8].

Si $D := \{\rho(\zeta) < 0\}$, avec ρ une fonction convexe sur un voisinage de $\bar{D}$, alors D est un domaine régulier: en prenant $H_i(\zeta, z) := -\frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i}(\zeta)$, nous avons

$$-2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i}(\zeta)(z_i - \zeta_i) \geq \rho(\zeta) - \rho(z),$$

d'où si $(\zeta, z) \in \bar{D} \times D$,

$$-\operatorname{Re} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i}(\zeta)(z_i - \zeta_i) - \rho(\zeta) \geq \frac{-\rho(\zeta) - \rho(z)}{2} > 0.$$

PROPOSITION 2.1. *Soient, $f \in B_l(D)$ où l est un entier naturel et D un domaine régulier, alors pour tout $z \in D$:*

$$f(z) = -\int_D f(\zeta) P_{0,0},$$

où K et P sont définis comme à la partie 1, avec

$$G_1(z) = (z)^{l+1+n},$$

$$Q_1(\zeta, z) = \frac{1}{-F(\zeta, z) + \rho(\zeta)} \sum_{i=1}^n H_i(\zeta, z) d\zeta_i,$$

et $F(\zeta, z) = \sum_{i=1}^n H_i(\zeta, z)(z_i - \zeta_i)$.

REMARQUE. Nous nous sommes débarassés de l'intégrale sur le bord, qui contient de la section s, et donc des termes qui ne sont pas holomorphes en z (voir définition de s à la partie 1).

Preuve de la Proposition 2.1. Nous allons appliquer le Théorème 1.1; malheureusement, nous ne pouvons appliquer directement ce théorème sur D car $F(\zeta, z) - \rho(\zeta)$ s'annulent sur $\{\zeta = z\} \cap (\partial D \times \partial D)$ et donc $Q_1(\zeta, z)$ n'est pas régulière sur $\bar{D} \times \bar{D}$. Nous sommes donc obligés de nous restreindre à D_ε, une suite de domaines croissante vers D. Prenons $z \in D$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $z \in D_{\varepsilon_0}$, et pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, nous avons la formule

$$f(z) = \int_{\partial D_\varepsilon} f(\zeta) \wedge K_{0,0}(\zeta, z) - \int_{D_\varepsilon} f(\zeta) \wedge P_{0,0}(\zeta, z).$$

Pour z fixé dans D et pour tout $\zeta \in \bar{D}$, nous avons $|F(\zeta, z) - \rho(\zeta)| \geq C_z$, où C_z est une constante positive dépendant de z; de plus $|z - \zeta| \geq D_z > 0$ pour $\zeta \in \partial D_\varepsilon$ avec $\varepsilon < \varepsilon_0$. Ces deux estimations conduisent à

$$|f \wedge K_{0,0}| \lesssim \varepsilon^2 \quad \text{pour } \zeta \in \partial D_\varepsilon,$$
$$|f \wedge P_{0,0}| \lesssim |\rho(\zeta)|.$$

Maintenant, en passant à la limite quand ε tend vers zéro, le terme au bord disparaît et le terme contenant $P_{0,0}$ tend vers $\int_D f(\zeta) \wedge P_{0,0}(\zeta, z)$, en utilisant le théorème de Lebesgue. □

DÉFINITION 2.2. Soient $f_1, \ldots, f_p$ des fonctions holomorphes sur un domaine D et de classe C^∞ sur un voisinage de D, on dira que $V = \{z \in \bar{D} \mid f_1(z) = \cdots = f_p(z) = 0\}$ est une variété standard si et seulement si $\partial f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial f_{i_k} \neq 0$ sur $V_{i_1,\ldots,i_k} := \{z \in \bar{D} \mid f_{i_1} = \cdots = f_{i_k} = 0\}$, où $(i_1, \ldots, i_k)$ est un multi-indice avec $i_1 < \cdots < i_k$ de longueur k à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$.

REMARQUE. Par les mêmes techniques, nous pouvons obtenir l'équivalent des formules de division données par les Théorèmes 2.1 et 3.1, dans le cas où $V = \{z \in \bar{D} \mid f_1(z) = \cdots = f_p(z) = 0\}$ est seulement une intersection complète, mais alors, les dividendes sont donnés par l'action de certains courants résiduels sur des formes différentielles particulières (pour plus de détails voir [14] et [15]).

Si D est un domaine régulier alors D est pseudoconvexe; en effet fixons $\zeta \in \partial D$ alors la fonction

$$z \to \frac{1}{\sum_{i=1}^n H_i(\zeta, z)(z_i - \zeta_i) - \rho(\zeta)}$$

est une fonction holomorphe, avec un pôle en $z = \zeta$. Par conséquent, d'après un résultat de [10], il existe des fonctions $h_i^j(\zeta, z)$ holomorphes sur $D \times D$ et de classe C^∞ sur un voisinage de $\bar{D} \times \bar{D}$ vérifiant:

$$f_i(z) - f_i(\zeta) = \sum_{j=1}^n h_i^j(\zeta, z)(z_j - \zeta_j) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p.$$

Dans la suite nous noterons $\upsilon_{i_1,\ldots,i_k}$ le courant défini sur D suivant:

$$\upsilon_{i_1,\dots,i_k} := \frac{g_{i_1} \wedge \cdots \wedge g_{i_k} \wedge \overline{\partial f_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial f_{i_k}}}{\|\partial f_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial f_{i_k}\|^2} dV_{i_1,\dots,i_k},$$

où $g_{i_l} := \sum_{j=1}^n h_{i_l}^j(\zeta, z)d\zeta_j$ et $dV_{i_1,\dots,i_k}$ est la mesure de surface sur $V_{i_1,\dots,i_k}$.

THÉORÈME 2.1. *Soient, V une variété standard et D un domaine régulier, alors, si $f \in B_l(D)$ pour l un entier naturel et f nulle sur V, nous avons, pour tout $z \in D$,*

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{A_n}{n} \int_D f(\zeta) \frac{f_1(z) \cdots f_p(z)}{f_1(\zeta) \cdots f_p(\zeta)} G_1^n(\bar\partial Q_1)^n \\ + A_n \sum_{i_1,\dots,i_k} \frac{(n-1)!}{(n-p+k)!} \int_{D \cap V_{i_1,\dots,i_k}} f(\zeta) \frac{f_{i_{k+1}}(z) \cdots f_{i_p}(z)}{f_{i_{k+1}}(\zeta) \cdots f_{i_p}(\zeta)} \\ \times G^{n-k}(\bar\partial Q_1)^{n-k} \wedge \upsilon_{i_1,\dots,i_k}, \end{aligned}$$

où $(i_1, \dots, i_k)$ est un multi-indice croissant de longueur k, avec $1 \le k \le p-1$ et $A_n := (-1)^n$.

REMARQUE. $\upsilon_{i_1,\dots,i_k}$ est un courant sur D, il faudrait donc noter $\int_D (\cdots)\upsilon_{i_1,\dots,i_k}$; mais pour mettre en évidence que $\upsilon_{i_1,\dots,i_k}$ est à support dans $D \cap V_{i_1,\dots,i_k}$, nous notons $\int_D$ (c'est la notation originale de [2]).

Preuve du Théorème 2.1. Nous allons appliquer la Proposition 2.1 avec les paramètres suivants:

$$G_i(z) = z,$$

$$Q_i = \frac{\overline{f_{i-1}(\zeta)} \sum_{j=1}^n h_{i-1}^j(\zeta, z)d\zeta_j}{(|f_{i-1}(\zeta)|^2 + \varepsilon_{i-1})},$$

ceci pour tout $2 \le i \le p+1$ et Q_1, G_1 comme dans la Proposition 2.1.

$$\langle Q_i, z-\zeta\rangle + 1 = \frac{\overline{f_{i-1}(\zeta)} f_{i-1}(z) + \varepsilon_{i-1}}{(|f_{i-1}(\zeta)|^2 + \varepsilon_{i-1})},$$

$$\bar\partial Q_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{(|f_{i-1}(\zeta)|^2 + \varepsilon_{i-1})^2} \overline{\partial f_{i-1}(\zeta)} \wedge g_{i-1}(\zeta, z)$$

maintenant si $\partial f_i \ne 0$ sur $f_i = 0$, un résultat de [11] montre:

$$\frac{\varepsilon_i}{(|f_i(\zeta)|^2 + \varepsilon_i)^2} \to \frac{dV_i}{\|\partial f_i(\zeta)\|^2}.$$

La formule de la Proposition 2.1 contient des termes de la forme,

$$\frac{\varepsilon_1}{(|f_1(\zeta)|^2 + \varepsilon_1)^2} \times \cdots \times \frac{\varepsilon_k}{(|f_k(\zeta)|^2 + \varepsilon_k)^2} \tag{2.1}$$

passons d'abord à la limite quand $\varepsilon_k \to 0$, (2.1) tend vers

$$\frac{\varepsilon_1}{(|f_1(\zeta)|^2 + \varepsilon_1)^2} \times \cdots \times \frac{\varepsilon_{k-1}}{(|f_{k-1}(\zeta)|^2 + \varepsilon_{k-1})^2} \frac{dV_k}{\|\partial f_k(\zeta)\|^2}. \tag{2.2}$$

Passons à la limite quand $\varepsilon_{k-1} \to 0$, nous obtenons l'expression qui suit car V est une variété standard,

$$\frac{\varepsilon_1}{(|f_1(\zeta)|^2+\varepsilon_1)^2} \times \cdots \times \frac{\varepsilon_{k-2}}{(|f_{k-2}(\zeta)|^2+\varepsilon_{k-2})^2} \frac{dV_{k-1,k}}{\left\|\partial f_{k-1}(\zeta) \wedge \frac{\partial f_k(\zeta)}{\|\partial f_k(\zeta)\|}\right\|^2 \|\partial f_k(\zeta)\|^2}.$$

Maintenant, en prenant Q_1 et G_1 comme dans la Proposition 2.1, et en appliquant cette dernière, on obtient le théorème. □

REMARQUES. Ces formules ne sont pas encore satisfaisantes, car même dans le cas des variétés affines qui sont des variétés standards, les dividendes ne sont pas réguliers. En effet, nous avons plus qu'une formule de division: certains dividendes s'annulent à nouveau sur V, et donc, si la fonction à diviser est régulière, il y'a de nombreuses compensations entre les termes. Dans le cas de domaine strictement pseudoconvexe, on peut estimer directement les formules données par le Théorème 2.1 et obtenir les résultats optimaux de [3]; en effet, dans ce cas, il suffit d'utiliser l'inégalité suivante: $|f_i(z)| \le |f_i(\zeta)| + O|\zeta - z| \lesssim |f_i(\zeta)| + d^{1/2}(\zeta, z)$, où d est la pseudo-distance dans D. Bien sûr, dans le cas faiblement pseudoconvexe de type fini m, $O|\zeta - z| \lesssim d^{1/m}(\zeta, z)$ ce qui ne permet pas d'obtenir de bonnes estimations, d'où les transformations suivantes.

3. Une Autre Formule de Division

Nous allons modifier la formule du Théorème 2.1 à l'aide d'un courant A qui ne charge pas la diagonale de $D \times D$, qui s'annule sur le bord de D et dont le $\bar\partial$ vérifie:

$$\bar\partial_{\zeta,z} A(\zeta, z) = \sum_{i=1}^{p} f_i(z) A_i(\zeta, z) + A_{p+1},$$

où A_{p+1} est un courant à support dans $\{f_1 = \cdots = f_p = 0\}$. Ainsi $K - A$ nous donnera une autre formule de division avec “moins de compensations” entre les différents termes, si A est bien choisi.

LEMME 3.1. *Soient, Q une $(1,0)$ forme de $\mathbb{C}^n$, $Q = \sum_{i=1}^n Q_i d\zeta_i$; $H_1, \ldots, H_p$ des $(1,0)$ formes de $\mathbb{C}^n$, $H_k = \sum_{i=1}^n H_k^i d\zeta_i$; $W_1, \ldots, W_{p-1}$ des $(0,1)$ formes de $\mathbb{C}^n$, alors nous avons l'égalité suivante*:

$$\begin{aligned}
&\bar\partial(\langle Q, z-\zeta\rangle)(\bar\partial Q)^{n-p} \wedge H_p \wedge \prod_{k=1}^{p-1} W_k \wedge H_k \\
&\quad = (n-p+1)^{-1}\langle H_p, z-\zeta\rangle(\bar\partial Q)^{n-p+1} \prod_{k=1}^{p-1} W_k \wedge H_k \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p-1} (n-p+1)^{-1}\langle H_k, z-\zeta\rangle(\bar\partial Q)^{n-p+1} \\
&\qquad\qquad \wedge H_p \wedge W_1 \wedge H_1 \wedge \cdots \wedge W_k \wedge W_{k+1} \wedge H_{k+1} \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1},
\end{aligned}$$

où $\langle Q, z-\zeta\rangle = \sum_{i=1}^n Q_i(z_i - \zeta_i)$ et $\langle H_k, z-\zeta\rangle = \sum_{i=1}^n H_k^i(z_i - \zeta_i)$.

Preuve. En explicitant $\bar\partial(\langle Q, z-\zeta\rangle)$, nous obtenons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
&\bar\partial(\langle Q, z-\zeta\rangle) \wedge (\bar\partial Q)^{n-p} \wedge H_p \wedge W_1 \wedge H_1 \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}\\
&\quad = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} \sum_{j=1}^{p} (\bar\partial Q)^{n-p} \wedge \bar\partial Q_{i_j}(z_{i_j}-\zeta_{i_j}) H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1 \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots\\
&\qquad\qquad \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}}\\
&\quad = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} \sum_{j=1}^{p} (\bar\partial Q)^{n-p} \wedge \bar\partial Q_{i_j} d\zeta_{i_j} \wedge H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1 \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots\\
&\qquad\qquad \wedge W_j \wedge H_j^{i_j}(z_{i_j}-\zeta_{i_j}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}}\\
&\quad = \sum_{(i_1,\ldots,i_p)} \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(n-p+1)} (\bar\partial Q)^{n-p+1} \wedge H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1 \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots\\
&\qquad\qquad \wedge W_j \wedge H_j^{i_j}(z_{i_j}-\zeta_{i_j}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}},
\end{aligned}$$

avec $(i_1, \ldots, i_p)$ un multi-indice de longueur p avec $i_j \neq i_k$ pour $k \neq j$. Nous allons utiliser la notation $(i_1, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_p)$ pour signifier que l'indice i_j est omis; le dernier terme de l'égalité conduit à l'expression,

$$\begin{aligned}
&\bar\partial(\langle Q, z-\zeta\rangle) \wedge (\bar\partial Q)^{n-p} \wedge H_p \wedge W_1 \wedge H_1 \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}\\
&\quad = \sum_{j=1}^{p} \sum_{(i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p)} \frac{1}{(n-p+1)} (\bar\partial Q)^{n-p+1} \sum_{i_j \notin (i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p)} H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1\\
&\qquad\qquad \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_j \wedge H_j^{i_j}(z_{i_j}-\zeta_{i_j}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}}\\
&\quad = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(n-p+1)} (\bar\partial Q)^{n-p+1} \wedge H_p \wedge W_1 \wedge H_1 \wedge \cdots \wedge W_j\\
&\qquad\qquad \wedge \langle H_j(z-\zeta)\rangle \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}\\
&\qquad - \sum_{j=1}^{p} \sum_{(i_1,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_p)} \frac{1}{(n-p+1)} (\bar\partial Q)^{n-p+1} \wedge \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1\\
&\qquad\qquad \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_j \wedge H_j^{i_k}(z_{i_k}-\zeta_{i_k}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}}.
\end{aligned}$$

La deuxième somme dans l'égalité est nulle; en effet supposons $j < k$,

$$\begin{aligned}
&H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1 \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_j \wedge H_j^{i_k}(z_{i_k}-\zeta_{i_k}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}}\\
&\quad = -H_p^{i_p} d\zeta_{i_p} \wedge W_1 \wedge H_1^{i_1} d\zeta_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_j \wedge H_j^{i_k} d\zeta_{i_k}\\
&\qquad\qquad \wedge W_k \wedge H_k^{i_k}(z_{i_k}-\zeta_{i_k}) \wedge \cdots \wedge W_{p-1} \wedge H_{p-1}^{i_{p-1}} d\zeta_{i_{p-1}},
\end{aligned}$$

le deuxième terme dans l'égalité est aussi dans la somme avec le signe opposé. Ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous nous plaçons pour tout ce qui suit dans V une variété standard et D un domaine régulier. D'après le Théorème 2.1, avant régularisation, nous avons la formule suivante:

$$A_n f(z) = \sum_{(\alpha_0+\cdots+\alpha_p)=n} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_p!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_p^{\alpha_p}(\bar\partial Q_0)^{\alpha_0}\wedge\cdots\wedge(\bar\partial Q_p)^{\alpha_p}$$

avec les notations

$$G_0\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}, \qquad z\to z^{l+1+n},$$

$$Q_0 = \frac{1}{-F(\zeta,z)+\rho(\zeta)}\sum_{i=1}^n H_i(\zeta,z)d\zeta_i;$$

$$G_i\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C} \quad \text{pour } 1\le i\le p, \qquad z\to z,$$

$$Q_i = \frac{\overline{f_i(\zeta)}\sum_{j=1}^n h_j^i(\zeta,z)d\zeta_j}{(|f_i(\zeta)|^2+\varepsilon_i)} \quad \text{pour } 1\le i\le p;$$

utilisons maintenant le Corollaire 1.1 avec G_i, Q_i, définis précedemment, et $G_{p,1}(z)=z-1$, nous obtenons:

$$\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_p=n}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_p!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p,1}^{\alpha_p}(\bar\partial Q)^{\alpha} = 0.$$

Maintenant en remarquant que $\alpha_p=0$ ou 1, nous obtenons la formule suivante:

$$\begin{aligned}
A_n f(z) &= \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_p=n}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_p!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}\\
&\qquad\times[G_p^{\alpha_p}(\langle Q_p, z-\zeta\rangle+1)-G_{p,1}^{\alpha_p}(\langle Q_p,z-\zeta\rangle+1)](\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&= \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1})\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_{p-1}=n\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\neq(1,\ldots,1)}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-1}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}(\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&\quad+\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}(\langle Q_p,z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\quad-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\langle Q_p,z-\zeta\rangle(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1},
\end{aligned}$$

car si $\alpha_p=1$, $[G_p^{\alpha_p}(\langle Q_p,z-\zeta\rangle+1)-G_{p,1}^{\alpha_p}(\langle Q_p,z-\zeta\rangle+1)]=0$. Nous allons appliquer la formule de Stokes à l'expression qui suit,

$$-\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_{\partial D} f(\zeta)G_0^{n-p}Q_p\wedge(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}.$$

Ceci est légitime car toutes les fonctions considérées sont régulières si l'on prend $f\in \mathrm{hol}(D)\cap C^1(\bar D)$. De plus, avec la définition de G_0 et Q_0, cette intégrale sur le bord est nulle:

$$\begin{aligned}0=&-\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\bar\partial(\langle Q_0,z-\zeta\rangle)Q_p(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\&-\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p}(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_p.\end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 3.1 au premier terme à droite de l'égalité avec $W_i:=\overline{\partial f_i}$ et $H_i=g_i$,

$$\begin{aligned}&-\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\bar\partial(\langle Q_0,z-\zeta\rangle)\wedge\frac{\overline{f_p(\zeta)}g_p}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p}\\&\qquad\wedge\frac{\varepsilon_1\overline{\partial f_1}\wedge g_1\wedge\cdots\wedge\varepsilon_{p-1}\overline{\partial f_{p-1}}\wedge g_{p-1}}{(|f_1|^2+\varepsilon_1)^2\cdots(|f_{p-1}|^2+\varepsilon_{p-1})^2}\\&=-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_p(z)-f_p(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\&\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\&\quad+\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\sum_{k=1}^{p-1}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\&\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\frac{\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_p}{(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2}\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}.\end{aligned}$$

De cette égalité nous tirons l'expression suivante:

$$\begin{aligned}&-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_p(z)-f_p(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\&\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\&=-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\sum_{k=1}^{p-1}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\&\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\frac{\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_p}{(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2}\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\&\quad+\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p}(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_p.\end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte de toutes ces manipulations, on obtient la formule:

$$
\begin{aligned}
&A_n f(z)\\
&= \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\\ \alpha_0+\dots+\alpha_{p-1}=n\\ (\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\neq(1,\dots,1)}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-1}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}(\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&\quad + \frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}(\langle Q_p, z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad \wedge \bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\quad - \frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\sum_{k=1}^{p-1}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad \wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\frac{\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_p}{(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2}\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\quad + \frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p}(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_p.
\end{aligned}
$$

Nous allons renouveler cette opération pour

$$
\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\\ \alpha_0+\dots+\alpha_{p-1}=n\\ (\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\neq(1,\dots,1)}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-1}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}(\bar\partial Q)^{\alpha},
$$

d’après le Corollaire 1.1:

$$
\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\\ \alpha_0+\dots+\alpha_{p-1}=n}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-1}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}(\langle Q_{p-1}, z-\zeta\rangle)(\bar\partial Q)^{\alpha}=0,
$$

d’où l’égalité

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-1})\\ \alpha_0+\dots+\alpha_{p-1}=n\\ (\alpha_1,\dots,\alpha_{p-1})\neq(1,\dots,1)}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-1}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-1}^{\alpha_{p-1}}(\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&= \sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\dots,\alpha_{p-2})\\ \alpha_0+\dots+\alpha_{p-2}=n\\ (\alpha_1,\dots,\alpha_{p-2})\neq(1,\dots,1)}} \frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-2}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-2}^{\alpha_{p-2}}(\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&\quad - \frac{(n-1)!}{(n-p+1)}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\quad + \frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}(\langle Q_{p-1}, z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\\
&\qquad\qquad \wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}\\
&\quad - \frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}\langle Q_{p-1}, z-\zeta\rangle(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\\
&\qquad\qquad \wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}.
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule de Stokes et le Lemme 3.1 à la quantité

$$-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_{\partial D} f(\zeta)G_0^{n-p+1}Q_{p-1}\wedge(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}=0$$

on obtient l'égalité,

$$\begin{aligned}
&-\frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}\langle Q_{p-1},z-\zeta\rangle(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}\\
&\quad=-\frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\sum_{k=1}^{p-2}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_{p-1}(\zeta)}}{(|f_{p-1}(\zeta)|^2+\varepsilon_{p-1})}(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\frac{\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_{p-1}}{(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2}\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}\\
&\qquad+\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}\wedge\bar\partial Q_{p-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant remplaçons cette quantité dans l'expression de $A_nf(z)$:

$$\begin{aligned}
&A_nf(z)\\
&\quad=\sum_{\substack{\alpha=(\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-2})\\ \alpha_0+\cdots+\alpha_{p-2}=n\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-2})\neq(1,\ldots,1)}}\frac{(n-1)!}{\alpha_0!\cdots\alpha_{p-2}!}\int_D f(\zeta)G_0^{\alpha_0}\cdots G_{p-2}^{\alpha_{p-2}}(\bar\partial Q)^{\alpha}\\
&\qquad+\frac{(n-1)!}{(n-p)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p}(\bar\partial Q_0)^{n-p}\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_p\\
&\qquad+\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}(\langle Q_p,z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\qquad-\frac{(n-1)!}{(n-p+1)!}\sum_{k=1}^{p-1}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+1}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_p(\zeta)}}{(|f_p(\zeta)|^2+\varepsilon_p)}(\bar\partial Q_0)^{n-p+1}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_p(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-1}\\
&\qquad+\frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}(\langle Q_{p-1},z-\zeta\rangle+1)(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2}\\
&\qquad-\frac{(n-1)!}{(n-p+2)!}\sum_{k=1}^{p-2}\int_D f(\zeta)G_0^{n-p+2}\frac{[f_k(z)-f_k(\zeta)]\overline{f_{p-1}(\zeta)}}{(|f_{p-1}(\zeta)|^2+\varepsilon_{p-1})}(\bar\partial Q_0)^{n-p+2}\\
&\qquad\qquad\wedge\bar\partial Q_1\wedge\cdots\wedge\frac{\varepsilon_k\overline{\partial f_k}\wedge g_p}{(|f_k|^2+\varepsilon_k)^2}\wedge\cdots\wedge\bar\partial Q_{p-2},
\end{aligned}$$

en itérant ces opérations, puis en passant à la limite quand $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p)$ tend vers 0, nous avons le théorème suivant. □

THÉORÈME 3.1. *Soient, D un domaine régulier, V une variété standard de codimension p, $f\in B_l(D)$ pour l un entier naturel et f s'annule sur V, alors*:

$$
\begin{aligned}
f(z) \\
&= \frac{1}{n}\int_D f(\zeta)\frac{f_1(z)}{f_1(\zeta)}(\bar\partial Q_0)^n G_0^n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}\int_{D\cap V_{1,\dots,k}} f(\zeta)G_0^{n-k}(\bar\partial Q_0)^{n-k} \\
&\qquad\qquad \times\Bigg(\frac{f_{k+1}(z)}{f_{k+1}(\zeta)}\frac{\overline{\partial f_1}\wedge g_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial f_k}\wedge g_k}{\|\partial f_1\wedge\cdots\wedge\partial f_k\|^2}-\sum_{j=1}^{k}\frac{f_j(z)}{f_{k+1}(\zeta)} \\
&\qquad\qquad\quad \times\frac{\overline{\partial f_1}\wedge g_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial f_j}\wedge g_{k+1}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial f_k}\wedge g_k}{\|\partial f_1\wedge\cdots\wedge\partial f_k\|^2}\Bigg)dV_{1,\dots,k}.
\end{aligned}
$$

REMARQUE. En fait pour obtenir ce théorème, nous avons utiliser la formule de stokes et nous devons donc supposer que f est holomorphe et régulière jusqu'au bord; pour lever cette hypothèse et pouvoir énoncer le théorème avec f dans $B_l(D)$, il suffit d'approcher D par D_ε, des domaines plus petits, et d'itérer la preuve de la Proposition 2.1.

4. Applications

Nous allons étudier la régularité des facteurs de la division dans le cas où V est une variété affine et D un domaine convexe de type fini. Nous obtiendrons des résultats optimaux (modulo une chute logarithmique) ce qui n'est pas envisageable avec les formules de Berndtsson–Andersson classiques.

La variété V étant affine, on peut trouver p-fonctions affines holomorphes telles que:

$$V := \{z\in\mathbb{C}^n \mid f_1(z)=\cdots=f_p(z)=0\}.$$

On définit, pour $0<\alpha\le 1$ et k un entier naturel, $\Lambda_{\alpha+k}(D)$ les espaces de Lipschitz usuels (pour les propriétés élémentaires de ces espaces voir [9]). Enfin, pour V une sous variété complexe de D, $I_V(D)$ est l'espace des fonctions holomorphes sur D qui s'annulent sur V.

THÉORÈME 4.1. *Soient, D un domaine convexe de type fini m, V une variété affine de codimension p avec $1\le p\le n$, alors si V est transverse à ∂D, nous avons pour tout $M>0$ des opérateurs linéaires $T_1^M,\dots,T_p^M$ de $B_M(D)$ dans* $\mathrm{hol}(D)$ *tels que*

$$h\in I_V(D)\cap B_M(D) \implies h=\sum_{i=1}^{p} f_iT_i^M(h),$$

et vérifiant les propriétés suivantes:

(a) *pour $\alpha>\frac12$, T_i^M induit un opérateur borné de $\Lambda_\alpha(D)\cap\mathrm{hol}(D)$ dans $\Lambda_{\alpha-1/2-\varepsilon}(D)\cap\mathrm{hol}(D)$ $\forall\varepsilon>0$ assez petit;*

(b) *pour $0<\alpha\le\frac12$, T_i^M induit un opérateur borné de $\Lambda_\alpha(D)\cap\mathrm{hol}(D)$ dans $B_{1/2+\varepsilon-\alpha}(D)$ $\forall\varepsilon>0$.*

REMARQUE. Dans le cas où V est de codimension n, V transverse à ∂D signifie que V ne rencontre pas le bord.

THÉORÈME 4.2. *Pour tout* $M > 0$ *il existe des opérateurs linéaires* $T_1^M, \ldots, T_p^M$ *de* $B_M(D)$ *dans* $\mathrm{hol}(D)$ *tels que*

$$h \in I_V(D) \cap B_M(D) \implies h = \sum_{i=1}^{p} f_i T_i^M(h),$$

et qui induisent des opérateurs bornés de

$$B_M(D) \cap \mathrm{hol}(D) \quad \textit{dans} \quad B_{M+1/2+\varepsilon} \cap \mathrm{hol}(D) \quad \forall \varepsilon > 0.$$

REMARQUE. Il nous semble que les Théorèmes 4.1 et 4.2 sont valables avec $\varepsilon = 0$, malheureusement, nous ne savons le démontrer que dans le cas des domaines strictement pseudoconvexes ou dans le cas des ellipsoïdes réels ou complexes; ceci vient du fait que nous ne sommes pas capables de démontrer le Lemme 4.2 (voir ci-dessous) avec $\varepsilon' = 0$ dans les domaines convexes de type fini en général.

Néammoins, nous allons montrer que ces résultats sont "presques" optimaux comme le prouve les exemples suivants.

EXEMPLES. Considérons l'ellipsoïde complexe suivant:

$$D := \{z \in \mathbb{C}^3 \mid \rho(z) = |z_1|^4 + |z_2|^4 + |z_3|^4 - 1 < 0\};$$

dans [16], Range montre l'inégalité qui suit pour $(\zeta, z) \in \partial D \times \bar{D}$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_i}(\zeta)(\zeta_i - z_i) \right) \geq C\left(-\rho(z) + \sum_{i=1}^{3} |\zeta_i|^2 |z_i - \zeta_i|^2 + |z - \zeta|^4 \right).$$

Notons $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$ et introduisons pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ la fonction

$$u(z) = (z_2 - a)[(a - z_2) + (a - z_3)]^{\alpha - 1/2},$$

cette fonction est bien définie car $(0, a, a) \in \partial D$ et $\mathrm{Re}[(a - z_2) + (a - z_3)] > 0$ pour $z \in D$. De l'inégalité précédente, nous déduisons $|\nabla u(z)| \leq C|\rho(z)|^{\alpha - 1}$, ce qui entraîne que $u \in \Lambda_\alpha(D)$. D'autre part $(z_2 - a)^{-1} u(z)$ ne peut être dans un espace de Lipschitz car elle n'est pas bornée et n'appartient pas à $B_k(D)$ avec $k < \frac{1}{2} - \alpha$.

Considérons maintenant la fonction $u(z) = (z_2 - a)\log((a - z_2) + (a - z_3))$, de la même façon que précédemment $u \in \Lambda_{1/2}(D)$, clairement $(z_2 - a)^{-1} u(z) \in B_0(D)$ mais $(z_2 - a)^{-1} u \notin H^\infty(D)$.

LEMME 4.1. *Soit* u *une fonction holomorphe dans* D *et* $\alpha > 0$, *alors nous avons les équivalences suivantes*:

(a) $u \in \Lambda_\alpha(D)$;
(b) *pour tout* $k \in N^*$ $(k > \alpha)$, *pour tout* $z \in D$, $|\nabla^k u(z)| \leq C(-\rho(z))^{\alpha - k}$;
(c) *il existe* $k \in N^*$ $(k > \alpha)$, *pour tout* $z \in D$, $|\nabla^k u(z)| \leq C(-\rho(z))^{\alpha - k}$.

Ce lemme est un résultat classique de Hardy–Littlewood (voir [3]).

CONSTRUCTION DE LA SOLUTION INTÉGRALE AU PROBLÈME DE DIVISION. Tout d'abord on remarque que si V est affine, par un changement de coordonnées linéaires, on peut supposer que $V := \{\zeta_1 = \cdots = \zeta_p = 0\}$ (car un changement de coordonnées linéaires ne détruit pas la convexité). Nous allons appliquer le Théorème 3.1; à ces fins, nous allons briévement rappeler quelques propriétés de la fonction support de Diederich–Fornaess dans les domaines convexes de type fini. Nous avons la proposition suivante qui apparaissait déjà dans [6].

PROPOSITION 4.1. *Soit D un domaine convexe de type fini m à bord lisse et ρ une fonction définissante convexe de D dans un voisinage U de ∂D. Alors, la fonction $S(z,\zeta) \in C^\infty(\bar{D} \times U)$ holomorphe en z, construite dans* [5] *vérifie la propriété suivante*: *soient, pour $\zeta \in U$, n_ζ la normale unitaire extérieure à $\{\rho = \rho(\zeta)\}$ et v un vecteur unitaire de $T_\zeta^{\mathbb{C}}(\{\rho = \rho(\zeta)\})$,*

$$a_{\alpha\beta}(\zeta, v) := \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial\lambda^\alpha \partial\bar{\lambda}^\beta} \rho(\zeta + \lambda v)|_{\lambda=0}.$$

Alors il existe $K, c, d > 0$, telles que, $\forall z = \zeta + \nu n_\zeta + \lambda v$ avec $\nu, \lambda \in \mathbb{C}$, nous avons l'estimation:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S(z,\zeta) \le & -\frac{|\operatorname{Re}\nu|}{2} - \frac{K}{2}(\operatorname{Im}\nu)^2 \\ & - c\sum_{j=2}^{m} \sum_{\alpha+\beta=j} |a_{\alpha\beta}(\zeta, v)||\lambda|^j + d\sup\{0, \rho(z) - \rho(\zeta)\}. \end{aligned}$$

REMARQUE. D'après [5], nous avons $(\partial_\zeta S(z,\zeta))|_{\zeta=z} = -K\partial\rho(\zeta)$, avec K une constante positive.

Considérons η_0 tel que $U_0 := \{\zeta \mid \rho(\zeta)| < \eta_0\} \subset U$ et χ une fonction C^∞ avec $0 < \chi < 1$, valant 0 si $\rho(\zeta) \le -\eta_0$ et 1 si $\rho(\zeta) \ge -\frac{1}{2}\eta_0$. Posons alors:

$$\begin{aligned} Q_0(\zeta, z) &= \frac{\chi(\zeta)}{(B+K)\rho(\zeta)} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i(z,\zeta) + B\frac{\partial\rho}{\zeta_i}(\zeta) \right) d\zeta_i \\ &= \frac{\chi(\zeta)}{(B+K)\rho(\zeta)} Q(z,\zeta), \end{aligned}$$

$$G_0(z) = z^{-(N+1)}, \qquad G_i(z) = z \quad \forall 1 \le i \le p,$$

$$Q_i(\zeta, z) = \frac{\bar{\zeta}_i d\zeta_i}{|\zeta_i|^2 + \varepsilon_i},$$

où les $Q_i(z,\zeta)$ sont les fonctions définies dans [4], N un réel supérieur à 0 et $B > 0$ telle que $B/2 + K - d > 0$; alors nous avons, d'après le Lemme 4.1:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\chi(\zeta)}{(B+K)\rho(\zeta)} \langle Q(z,\zeta), z - \zeta\rangle + 1 \right) > 0 \quad \text{pour } \zeta, z \in D \times D$$

et de plus,

$$\partial_\zeta S(z,\zeta) + B\partial_\zeta\langle\partial\rho(\zeta), z-\zeta\rangle + (B+K)\partial\rho(\zeta) = \mathcal{O}(1)|z-\zeta|.$$

Par conséquent, à l'aide de ces paramétres, le Théorème 3.1 entraîne la formule suivante pour $f \in B_N(D)$ et $f = 0$ sur V:

$$
\begin{aligned}
f(z) &\\
&= \frac{1}{n}\int_D f(\zeta)\frac{z_1}{\zeta_1}\left(\frac{\rho(\zeta)}{\chi(\zeta)\langle Q(z,\zeta), z-\zeta\rangle + (B+K)\rho(\zeta)}\right)^{n+N+1}(\bar\partial Q_0)^n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}\int_{D\cap V_{1,\dots,k}} f(\zeta) \\
&\qquad\times\left(\frac{\rho(\zeta)}{\chi(\zeta)\langle Q(z,\zeta), z-\zeta\rangle + (B+K)\rho(\zeta)}\right)^{N+1+n-k}(\bar\partial Q_0)^{n-k} \\
&\qquad\times\left(\frac{z_{k+1}}{\zeta_{k+1}}d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_k\wedge d\zeta_k\right. \\
&\qquad\quad - \sum_{j=1}^{k}\frac{z_j}{\zeta_{k+1}}d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_j\wedge d\zeta_{k+1}\wedge\cdots \\
&\qquad\qquad\left.\wedge\, d\bar\zeta_k\wedge d\zeta_k\right) dV_{1,\dots,k}.
\end{aligned}
$$

Preuve du Théorème 4.1. Il faut estimer deux types de termes,

$$\int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}}\left(\frac{\rho(\zeta)}{\phi(z,\zeta)}\right)^{N+n-k+1}(\bar\partial Q_0)^{n-k}\, d\nu_{1,\dots,k} \tag{4.1}$$

et

$$\int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}}\left(\frac{\rho(\zeta)}{\phi(z,\zeta)}\right)^{N+n-k+1}(\bar\partial Q_0)^{n-k}\, d\nu^j_{1,\dots,k} \tag{4.2}$$

où $j \in \{1,\dots,k\}$, et

$$
\begin{aligned}
d\nu_{1,\dots,k} &:= d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_k\wedge d\zeta_k\, dV_{1,\dots,k}, \\
d\nu^j_{1,\dots,k} &:= d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_j\wedge d\zeta_{k+1}\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_k\wedge d\zeta_k\, dV_{1,\dots,k}, \\
\phi(z,\zeta) &:= \chi(\zeta)\langle Q(z,\zeta), z-\zeta\rangle + (B+K)\rho(\zeta).
\end{aligned}
$$

Pour cette estimation, nous allons utiliser le lemme d'Hardy–Littlewood; soit Γ un multi-indice:

$$
\begin{aligned}
D^\Gamma&(4.1) \\
&:= \sum_{\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma}\int_{D\cap V_{1,\dots,k}}\frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}}D^{\Gamma_1}\left[\left(\frac{\rho(\zeta)}{\phi(z,\zeta)}\right)^{N+n-k+1}\right]D^{\Gamma_2}[(\bar\partial Q_0)^{n-k}]\, d\nu_{1,\dots,k},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^\Gamma&(4.2) \\
&:= \sum_{\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma}\int_{D\cap V_{1,\dots,k}}\frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}}D^{\Gamma_1}\left[\left(\frac{\rho(\zeta)}{\phi(z,\zeta)}\right)^{N+n-k+1}\right]D^{\Gamma_2}[(\bar\partial Q_0)^{n-k}]\, d\nu^j_{1,\dots,k},
\end{aligned}
$$

où pour $\lambda := \sum_{I,J}\theta_{I,J}dz_I\wedge d\bar z_J$ une (p,q)-forme, $D^\Gamma\lambda = \sum_{I,J}D^\Gamma[\theta_{I,J}]dz_I\wedge d\bar z_J$. De ces deux formules, on déduit aisément les expressions suivantes:

$$D^\Gamma(4.1)$$
$$:= \sum_{\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma} \int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^{N+1}}{\phi(z,\zeta)^{N+n-k+1+|\Gamma_1|}} (\bar\partial Q)^a L_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\zeta,z)\, d\nu_{1,\dots,k}$$
$$+ \int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^{N}}{\phi(z,\zeta)^{N+n-k+1+|\Gamma_1|}} \bar\partial\rho(\zeta)$$
$$\wedge Q(z,\zeta) \wedge (\bar\partial Q)^{a-1} K_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\zeta,z)\, d\nu_{1,\dots,k},$$

où L_{Γ_1,Γ_2} et K_{Γ_1,Γ_2} sont des formes régulières sur $\bar D\times\bar D$ et $a = n-k-\inf(n-k, |\Gamma_2|)$. Même chose pour $D^\Gamma(4.2)$:

$$D^\Gamma(4.2)$$
$$:= \sum_{\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma} \int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^{N+1}}{\phi(z,\zeta)^{N+n-k+1+|\Gamma_1|}} (\bar\partial Q)^a M_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\zeta,z)\, d\nu^j_{1,\dots,k}$$
$$+ \int_{D\cap V_{1,\dots,k}} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^{N}}{\phi(z,\zeta)^{N+n-k+1+|\Gamma_1|}} \bar\partial\rho(\zeta)$$
$$\wedge Q(z,\zeta) \wedge (\bar\partial Q)^{a-1} N_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\zeta,z)\, d\nu^j_{1,\dots,k},$$

avec M_{Γ_1,Γ_2} et N_{Γ_1,Γ_2} des formes régulières sur $\bar D\times\bar D$. Prenons $q\in\partial D\cap V_{1,\dots,k}$ et $B(q,r)$ une boule de centre q et de rayon r tel qu'il existe $i\in\{p+1,\dots,n\}$ vérifiant $\left|\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}\right| \geq c > 0$ sur $B(q,r)$ (ceci est possible car V et ∂D se coupent en position générale). On peut supposer que $i=n$ et que r est assez petit de sorte que $\chi := 1$ sur $B(q,r)$. Pour estimer $D^\Gamma(4.1)$ et $D^\Gamma(4.2)$, il est clair qu'il suffit d'avoir des estimations de $\left|\sum_{\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma}\int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)}\right|$ pour $z\in B(q,r/2)$, car $|\zeta-z|^m \lesssim |\phi(z,\zeta)|$. Nous avons quatre types d'intégrales á étudier, à ces fins, nous allons procéder de manière similaire à [3]; pour b, c, d trois réels et $F(\zeta,z)$ une forme différentielle bornée sur $D\times D$, nous notons indifféremment:

$$I_1(f,b,c,d) := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} (\bar\partial Q)^c F(\zeta,z)\, d\nu_{1,\dots,k},$$

$$I_2(f,b,c,d) := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} \bar\partial\rho(\zeta)\wedge Q(z,\zeta)$$
$$\wedge (\bar\partial Q)^c F(\zeta,z)\, d\nu_{1,\dots,k},$$

$$I_3(f,b,c,d) := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} (\bar\partial Q)^c F(\zeta,z)\, d\nu^j_{1,\dots,k},$$

$$I_4(f,b,c,d) := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} \bar\partial\rho(\zeta)\wedge Q(z,\zeta)$$
$$\wedge (\bar\partial Q)^c F(\zeta,z)\, d\nu^j_{1,\dots,k}.$$

Pour une (n,n) forme différentielle régulière sur $\bar D\times\bar D$, $A(\zeta,z) := A_0(\zeta,z)d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n\wedge d\zeta_n$, nous notons

$$A(\zeta,z)\Big/\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}d\zeta_n := A_0(\zeta,z)\Big/\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\bar\zeta_n;$$

appliquons la formule de stokes, comme dans [3]:

$$\int_{\partial(D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r))} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}}\frac{\rho(\zeta)^{b+1}}{\phi(z,\zeta)^d}(\bar{\partial}Q)^c F(\zeta,z)\,dv_{1,\dots,k}\Big/\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_n}d\zeta_n$$
$$= I_1(f,b,c,d) + I_1(f,b+1,c,d) + I_1(f,b+1,c-1,d)$$
$$+ I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d\right) + I_1\left(f\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d+1\right);$$

l'intégrale à gauche de l'égalité est un $O\|f\|_\infty$ car $|\zeta - z|^m \lesssim |\phi(z,\zeta)|$, ce qui entraîne:

$$I_1(f,b,c,d) = O\|f\|_\infty + I_1(f,b+1,c,d) + I_1(f,b+1,c-1,d)$$
$$+ I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d\right) + I_1\left(f\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d+1\right).$$

Appliquons de nouveau la formule de Stokes à $I_1\big(f\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d+1\big)$:

$$I_1\left(f\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d+1\right)$$
$$= O\|f\|_\infty + I_1(f,b+2,c,d+1) + I_1(f,b+2,c-1,d+1)$$
$$+ I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+2,c,d+1\right) + I_1\left(f\left(\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}\right)^2, b+2,c,d+2\right),$$

en appliquant m-fois la formule de Stokes,

$$I_1\left(f\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d+1\right)$$
$$= O\|f\|_\infty + I_1(f,b+1,c,d) + I_1(f,b+1,c-1,d)$$
$$+ I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d\right),$$

car $\left|\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_n}(z,\zeta)\right|^m = 0|\zeta - z|^m = 0(1)|\phi(z,\zeta)|$, d'après le choix de la constante B, et $|\rho(\zeta)| = 0(1)|\phi(z,\zeta)|$; en résumé,

$$I_1(f,b,c,d) = O\|f\|_\infty + I_1(f,b+1,c,d) + I_1(f,b+1,c-1,d)$$
$$+ I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+1,c,d\right).$$

En procédant par récurrence, nous obtenons la relation essentielle:

$$I_1(f,b,c,d) = O\|f\|_{\Lambda_\alpha} + \sum_{l=0}^{c} I_1\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+l+1, c-l, d\right)$$
$$+ \sum_{l=0}^{c} I_1(f, b+l+1, c-l, d). \qquad (*)$$

Pour I_3, nous avons une relation identique; pour I_2 et I_4, nous devons devons introduire $J_2(f, b, c, \alpha_1, \alpha_2, d)$ et $J_4(f, b, c, \alpha_1, \alpha_2, d)$ (avec $\alpha_i = 0$ ou 1) des intégrales du type:

$$J_2 := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} (\bar{\partial}\rho(\zeta))^{\alpha_1} \wedge Q(z,\zeta)^{\alpha_2} \wedge (\bar{\partial}Q)^c F(\zeta, z)\, d\nu_{1,\dots,k},$$

$$J_4 := \int_{D\cap V_{1,\dots,k}\cap B(q,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta_{k+1}} \frac{\rho(\zeta)^b}{\phi(z,\zeta)^d} (\bar{\partial}\rho(\zeta))^{\alpha_1} \wedge Q(z,\zeta)^{\alpha_2} \wedge (\bar{\partial}Q)^c F(\zeta, z)\, d\nu^j_{1,\dots,k},$$

maintenant par les mêmes artifices que précédemment, on obtient:

$$\begin{aligned} I_i(f, b, c, d) &= O\|f\|_{\Lambda_\alpha} \\ &\quad + \sum_{\substack{0\le l\le c\\ 0\le\beta_1,\beta_2\le\alpha_1,\alpha_2}} J_i\Big(\frac{\partial f}{\partial\zeta_n}, b+l+\beta_1+\beta_2+1, c-l, \alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, d\Big) \\ &\quad + \sum_{\substack{0\le l\le c\\ 0\le\beta_1,\beta_2\le\alpha_1,\alpha_2}} J_i(f, b+l+\beta_1+\beta_2+1, c-l, \alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, d). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Afin de finir la preuve du Théorème 4.1, nous allons admettre le lemme suivant dont nous donnerons une preuve à la fin de cet article. □

Dans ce qui suit, on note $D' := D \cap V_{1,\dots,k}$ et $P_\varepsilon(z)$ le polydisque de McNeal [13] centré en $z \in D$.

LEMME 4.2. *Soient, $\varepsilon > 0$ assez petit, D un domaine convexe de type fini, $c \le n-k$ un entier naturel; on a alors les estimations suivantes*:

(1) $\displaystyle\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \left|\frac{G_1(\zeta,z)}{\zeta_{k+1}} \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_k \wedge d\zeta_k\right| dV_{1,\dots,k} \lesssim \varepsilon^{c-1/2}$,

(2) $\displaystyle\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \left|\frac{G_2(\zeta,z)}{\zeta_{k+1}} \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_k \wedge d\zeta_k\right| dV_{1,\dots,k} \lesssim \varepsilon^{c-1/2}$,

(3) $\displaystyle\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \left|\frac{G_1(\zeta,z)}{\zeta_{k+1}} d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_k \wedge d\zeta_k\right| dV_{1,\dots,k} \lesssim$ $\varepsilon^{c-1/2-\varepsilon'}$ *pour tout* $\varepsilon' > 0$,

(4) $\displaystyle\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \left|\frac{G_2(\zeta,z)}{\zeta_{k+1}} \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_j \wedge d\zeta_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\bar{\zeta}_k \wedge d\zeta_k\right| dV_{1,\dots,k} \lesssim$ $\varepsilon^{c-1/2-\varepsilon'}$ *pour tout* $\varepsilon' > 0$,

où $G_1(\zeta, z) := (\bar{\partial} Q)^c \wedge F_1(\zeta, z)$ *avec* $F_1(\zeta, z)$ *une* $(n-k-c, n-k-c)$ *forme en* ζ *bornée sur* $D \times D$ *et* $G_2(\zeta, z) := (\bar{\partial} Q)^{c-1} \wedge \bar{\partial}\rho(\zeta) \wedge Q(z, \zeta) \wedge F_2(\zeta, z)$ *une* $(n-k-c, n-k-c)$ *forme en* ζ *bornée sur* $D \times D$.

D'après $(*)$,

$$I_1(f, b, c, d) \lesssim \mathcal{O}\|f\|_{\Lambda_\alpha} + \sum_l \int_{P_1(z)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial \zeta_n^k} \frac{\rho(\zeta)^{b+k+l}}{(\phi(z, \zeta))^d} (\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu_{1,\dots,k} \right|,$$

$$I_3(f, b, c, d) \lesssim \mathcal{O}\|f\|_{\Lambda_\alpha} + \sum_l \int_{P_1(z)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial \zeta_n^k} \frac{\rho(\zeta)^{b+k+l}}{(\phi(z, \zeta))^d} (\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu^j_{1,\dots,k} \right|,$$

pour tout $1 \le k \le \alpha + 1$. Posons $k = [\alpha] + 1$ et estimons I_1 et I_3, avec

$$b = N + 1,$$
$$c = n - k - \inf(n - k, |\Gamma_2|),$$
$$d = n - k + N + 1 + |\Gamma| - |\Gamma_2|;$$

pour ceci, introduisons $P^i_\varepsilon(z) := C_1 P_{2^{-i}\varepsilon}(z) / \frac{1}{2} P_{2^{-i}\varepsilon}(z)$, le recouvrement de [4] avec les propriétés, $P_\varepsilon(z) \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} P^i_\varepsilon(z)$ et $P_1(z)/P_\varepsilon(z) \subset \bigcup_{i=0}^{i_0} P^i_1(z)$, où $i_0(\varepsilon) < -\log_2(c_2\varepsilon/4)$. Prenons $\varepsilon = |\rho(z)|$, nous avons $|\rho(\zeta)| \lesssim |\phi(z, \zeta)|$, $|\rho(z)| \lesssim |\phi(z, \zeta)|$, d'après la Proposition 4.1 et d'après [6, Lemme 3.3], $2^{-i}\varepsilon \lesssim |\phi(z, \zeta)|$ pour $z \in \partial D$ et $\zeta \in P^i_\varepsilon(z) \cap D$, mais la preuve de ce lemme permet d'avoir cette inégalité pour $z \in \bar{D}$; par conséquent, en utilisant le (1) du Lemme 4.2,

$$\begin{aligned} &\int_{P_\varepsilon(z)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial \zeta_n^k} \frac{\rho(\zeta)^{b+k+l}}{(\phi(z, \zeta))^d} (\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu_{1,\dots,k} \right| \\ &\qquad \lesssim \sum_i \frac{1}{\varepsilon^{d-b-\alpha+1-c} (2^{-i}\varepsilon)^{c-l-1}} \int_{P_{2^{-i}\varepsilon}(z)} |(\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu_{1,\dots,k}| \\ &\qquad \lesssim \sum_i \frac{(2^{-i}\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon^{d-b-\alpha+1-c}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon^{|\Gamma|-(\alpha-1/2)}}, \end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned} &\int_{P_1(z)/P_\varepsilon(z)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial \zeta_n^k} \frac{\rho(\zeta)^{b+k+l}}{(\phi(z, \zeta))^d} (\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu_{1,\dots,k} \right| \\ &\qquad \lesssim \sum_{i=0}^{i_0} \frac{1}{(2^{-i})^{d-b-\alpha-l}} \int_{P_{2^{-i}}(z)} |(\bar{\partial} Q)^{c-l} \, d\nu_{1,\dots,k}| \\ &\qquad \lesssim \sum_0^{i_0} \frac{1}{(2^{-i})^{d-b-c-\alpha+1/2}} \lesssim \frac{1}{\varepsilon^{|\Gamma|-(\alpha-1/2)}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve pour I_1, d'après le Lemme 4.1. Pour I_3, I_4, et I_2, la preuve est similaire mis à part que (1) du Lemme 4.2 est remplacé par (3), (4), et (2) ce qui entraîne:

$$I_3 \lesssim \frac{1}{|\rho(z)|^{|\Gamma|-(\alpha-1/2-\varepsilon')}},$$
$$I_4 \lesssim \frac{1}{|\rho(z)|^{|\Gamma|-(\alpha-1/2-\varepsilon')}},$$
$$I_2 \lesssim \frac{1}{|\rho(z)|^{|\Gamma|-(\alpha-1/2)}},$$

pour tout $\varepsilon' > 0$. Le Théorème 4.2 s'obtient de manière similaire.

Preuve du Lemme 4.2.

Estimation de (1): Pour cette estimation, nous allons utiliser $v = (v_1, \dots, v_n)$, $v_j := x_j + iy_j$, des ε-coordonnées extrémales en z; d'après [4] et [6], nous avons $\left|\frac{\partial Q_j}{\partial \bar{v}_i}\right| \lesssim \frac{\varepsilon}{\tau_j(z,\varepsilon)\tau_i(z,\varepsilon)}$ sur $P_\varepsilon(z)$, d'où (1) est estimée par une somme de termes du type:

$$\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \frac{\varepsilon^c}{|\zeta_{k+1}(v)|} \prod_{l=1}^{c} \frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)} |dx_{j_1} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_c} \wedge dy_{i_c} \wedge \cdots$$
$$\wedge\, dx_{j_{n-k}} \wedge dy_{i_{n-k}} \wedge d\zeta_1(v) \wedge d\bar{\zeta}_1(v) \wedge \cdots \wedge d\zeta_k(v) \wedge d\bar{\zeta}_k(v)|\, dV_{1,\dots,k};$$

on peut remarquer que l'on peut prendre $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}, \dots, y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-k}})$ comme coordonnées locales sur D' car sinon

$$dx_{j_1} \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_c} \wedge dy_{i_c} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}} \wedge dy_{i_{n-k}} \wedge d\zeta_1(v)$$
$$\wedge\, d\bar{\zeta}_1(v) \wedge \cdots \wedge d\zeta_k(v) \wedge d\bar{\zeta}_k(v) = 0$$

et l'intégrale est nulle. Tenant compte de ceci, nous allons scinder en deux parties cette intégrale,

$$\int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D' \\ \{|\zeta_{k+1}(v)| \lesssim \varepsilon^{1/2}\}}} \quad \text{et} \quad \int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D' \\ \{\varepsilon^{1/2} \lesssim |\zeta_{k+1}(v)|\}}};$$

le second morceau est majoré par:

$$\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'} \varepsilon^{c-1/2} \prod_{l=1}^{c} \frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}\, dx_{j_1}\, dy_{i_1} \cdots dx_{j_c}\, dy_{i_c} \cdots dx_{j_{n-k}}\, dy_{i_{n-k}}$$
$$\lesssim \varepsilon^{c-1/2}.$$

Pour le premier, il existe $j_{l_0} \neq 1$ et $i_{l_1} \neq 1$ (car la variété est transverse à ∂D et $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ la base associée aux coordonnées v est une base orthonormale) tels que $(\mathrm{Re}(\zeta_{k+1}(v)), \mathrm{Im}(\zeta_{k+1}(v)), x_{j_1}, \dots, \widehat{x_{j_{l_0}}}, \dots, x_{j_{n-k}}, y_{i_1}, \dots, \widehat{y_{i_{l_1}}}, \dots, y_{i_{n-k}})$ (il se peut que les directions à enlever soit deux directions $x_{j_{l_0}}$ et $x_{j_{l_1}}$ ou $y_{i_{l_0}}$ et $y_{i_{l_1}}$, etc.) soit un systéme de coordonnées sur D', dont le Jacobien est uniformément minoré par rapport à ε et z, par une constante positive, d'où $\int_{P_\varepsilon(z)\cap D', \{|\zeta_{k+1}(v)| \lesssim \varepsilon^{1/2}\}}$ est majorée par:

$$\int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D'\\ |X_1+iY_1|\lesssim\varepsilon^{1/2}}} \frac{\varepsilon^c}{|X_1+iY_1|}\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}\,dX_1\,dY_1\,dx_{j_1}\,dy_{i_1}\cdots dx_{j_{n-k}}\,dy_{i_{n-k}}$$
$$\lesssim \frac{\varepsilon^c\times\varepsilon^{1/2}}{\tau_{j_{l_0}}(z,\varepsilon)\tau_{i_{l_1}}(z,\varepsilon)}\lesssim\frac{\varepsilon^c\times\varepsilon^{1/2}}{\varepsilon}=\varepsilon^{c-1/2}.$$

Le terme (2): Se traite de la même manière, en utilisant les estimations $\left|\frac{\partial\rho}{\partial\bar{v}_j}\right|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_j(z,\varepsilon)}$ et $|Q_j|\lesssim\frac{\varepsilon}{\tau_j(z,\varepsilon)}$ sur $P_\varepsilon(z)$.

Estimation de (3): Comme précédemment, dans les coordonnées $v=(v_1,\dots,v_n)$, (3) est majorée par une intégrale du type

$$\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'}\frac{\varepsilon^c}{|\zeta_{k+1}(v)|}\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}|dv_{j_1}\wedge\cdots\wedge dv_{j_{n-k}}\wedge d\bar{v}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{v}_{i_{n-k}}$$
$$\wedge\, d\zeta_1(v)\wedge d\bar{\zeta}_1(v)\wedge\cdots\wedge d\zeta_{k+1}(v)$$
$$\wedge\, d\bar{\zeta}_j(v)\wedge\cdots\wedge d\zeta_k\wedge d\bar{\zeta}_k|\,dV_{1,\dots,k}.$$

Tout d'abord, nous allons faire apparaître $d\zeta_j(v)$, de manière à ne travailler qu'avec des directions tangentes à la variété; pour ceci, remarquons que $(dv_{j_1},\dots,dv_{j_{n-k}},d\zeta_1(v),\dots,d\zeta_k(v),d\zeta_{k+1}(v))$ est une base pour les (1, 0)-formes, sinon l'intégrale considérée est nulle, par conséquent, il existe $j_{l_0}\neq 1$ avec $|a_{l_0}|$ uniformément minoré en ε et z, tel que:

$$d\zeta_j(v)=\sum_l a_l\,dv_{j_l}+\sum_i b_i\,d\zeta_i(v).$$

Maintenant (3) est majorée par une expression du type:

$$\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'}\frac{\varepsilon^c}{|\zeta_{k+1}(v)|}\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}|dv_{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dv_{j_{l_0}}}\wedge\cdots\wedge dv_{j_{n-k}}\wedge d\zeta_{k+1}(v)$$
$$\wedge\, d\bar{v}_{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{v}_{i_{n-k}}\wedge d\zeta_1(v)\wedge d\bar{\zeta}_1(v)$$
$$\wedge\cdots\wedge d\zeta_k(v)\wedge d\bar{\zeta}_k(v)|\,dV_{1,\dots,k}.$$

Scindons l'intégrale en deux morceaux

$$\int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D'\\ \{|\zeta_{k+1}(v)|\lesssim\varepsilon\}}}\quad\text{et}\quad\int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D'\\ \{\varepsilon\lesssim|\zeta_{k+1}(v)|\}}};$$

le second morceau est majoré par des intégrales de la forme

$$\int_{P_\varepsilon(z)\cap D'}\frac{\varepsilon^{c-\varepsilon'}}{|\zeta_{k+1}(v)|^{1-\varepsilon'}}\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}\,dX_{j_1}\cdots\widehat{dX_{j_{l_0}}}\cdots$$
$$dX_{j_{n-k}}\,dY_{i_1}\cdots dY_{i_{n-k}}\,d[\zeta_{k+1}(v)]\lesssim\varepsilon^{c-1/2-\varepsilon'},$$

pour tout $\varepsilon'>0$, où X_j et Y_j désigne indifféremment x_j ou y_j, et enfin, $[\zeta_{k+1}(v)]$ désigne la partie réelle ou imaginaire de $\zeta_{k+1}(v)$.

Pour le second morceau, il suffit de prendre $(\operatorname{Re}\zeta_{k+1}(v),\operatorname{Im}\zeta_{k+1}(v))$ comme premières coordonnées sur D', il suit que le premier morceau est estimée par:

$$\int_{\substack{P_\varepsilon(z)\cap D' \\ \{|\zeta_{k+1}|\lesssim\varepsilon\}}} \frac{\varepsilon^c}{|\zeta_{k+1}(v)|}\prod_{l=1}^{c}\frac{1}{\tau_{j_l}(z,\varepsilon)\tau_{i_l}(z,\varepsilon)}\, dX_{j_1}\cdots\widehat{dX_{j_{l_0}}}\cdots$$
$$dX_{j_{n-k}}\, dY_{i_1}\cdots\widehat{dY_{i_{l_1}}}\, dY_{i_{n-k}}\, d(\operatorname{Re}\zeta_{k+1}(v))\, d(\operatorname{Im}\zeta_{k+1}(v)) \lesssim \frac{\varepsilon^c}{\tau_{j_{l_0}}(z,\varepsilon)} \lesssim \varepsilon^{c-1/2}.$$

Pour l'estimation de (4), il suffit de faire les mêmes changements que pour (2).

□

5. Cas des Variétés Singulières

Dans cette partie, nous abordons sur un exemple, le cas des variétés singulières. Prenons

$$D := \{\rho(z) = |z_1|^{2q} + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 - 1 < 0\},$$
$$X := \{z \in \mathbb{C}^4 \mid z_1z_2 = z_1^n + z_3 = 0\},$$

avec $n > 1$ et $n \ll q$. Il est clair que $f \in \operatorname{hol}(D)$ s'écrit $z_1z_2f_1(z) + (z_1^n + z_3)f_2(z)$ si et seulement si $f = 0$ sur $V \cap D$ (dans la suite on notera cette condition $(*)$). Prenons, par exemple, f bornée sur D vérifiant $(*)$, quelle est la régularité de f_1 et f_2? Ce domaine est un domaine convexe de type strict fini, par conséquent, nous pouvons prendre comme fonction support l'équation du plan tangent complexe, soit:

$$Q_0 := \frac{1}{\rho(\zeta)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(\zeta)d\zeta_i;$$

de plus, d'après [16], nous avons l'estimation suivante pour $(\zeta, z) \in \bar{D}\times\bar{D}$,

$$\operatorname{Re}\left(\rho(\zeta) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(\zeta)(z_i-\zeta_i)\right)$$
$$\lesssim \left(\rho(z) + \rho(\zeta) - |\zeta_1|^{2q-2}|z_1-\zeta_1|^2 - \sum_{i=2}^{4}|z_i-\zeta_i|^2 - |z_1-\zeta_1|^{2q}\right). \quad (***)$$

En introduisant le courant résiduel $\bar\partial[1/\zeta_1\zeta_2]$ comme dans [14] et [15], on peut adapter sans grande difficulté la preuve du Théorème 3.1 dans cette situation, et obtenir une décomposition en termes de courants:

$$\begin{aligned} f(z) = z_1z_2\int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta_1\zeta_2}(\bar\partial Q_0)^4G_0^4 \\ + (z_1^n+z_3)\int_D\frac{f(\zeta)}{\zeta_1^n+\zeta_3}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\bar\partial\left[\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}\right]\wedge g_1(\zeta,z) \\ - z_1z_2\int_D\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1^n+\zeta_3)}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\bar\partial\left[\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}\right]\wedge g_2(\zeta,z), \end{aligned}$$

où $g_1(\zeta,z) := z_2d\zeta_1 + \zeta_1d\zeta_2$, $g_2(\zeta,z) := (z_1^{n-1} + z_1^{n-2}\zeta_1 + \cdots + \zeta_1^{n-1})d\zeta_1 + d\zeta_3$, et $G_0(\zeta) := 1/\zeta$. Il n'est pas difficile de voir (par exemple dans [7]) que:

$$\bar\partial\left[\frac{1}{\zeta_1\zeta_2}\right]=\frac{1}{\zeta_1}\bar\partial\left[\frac{1}{\zeta_2}\right]+\frac{1}{\zeta_2}\bar\partial\left[\frac{1}{\zeta_1}\right]=C\left(\frac{1}{\zeta_1}d\bar\zeta_2 dV_2+\frac{1}{\zeta_2}d\bar\zeta_1 dV_1\right),$$

où dV_1 est la mesure de Lebesgue sur $\{\zeta_1=0\}$ et dV_2 est la mesure de Lebesgue sur $\{\zeta_2=0\}$. Autrement dit nous avons la formule suivante:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & z_1z_2\int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta_1\zeta_2}(\bar\partial Q_0)^4G_0^4 + (z_1^n+z_3) \\ & \times\left[\int_{D\cap\{\zeta_1=0\}}\frac{f(\zeta)}{\zeta_2\zeta_3}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_1\wedge g_1(\zeta,z)\,dV_1\right. \\ & \left.+\int_{D\cap\{\zeta_2=0\}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1^n+\zeta_3)\zeta_1}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_2\wedge g_1(\zeta,z)\,dV_2\right] \\ & - z_1z_2\left[\int_{D\cap\{\zeta_2=0\}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1^n+\zeta_3)\zeta_1}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_2\wedge g_2(\zeta,z)\,dV_2\right. \\ & \left.-\int_{D\cap\{\zeta_1=0\}}\frac{f(\zeta)}{\zeta_2\zeta_3}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_1\wedge g_2(\zeta,z)\,dV_1\right]. \end{aligned}$$

Proposition 5.1. *Soit D comme ci-dessus; alors pour toute fonction holomorphe bornée sur D, f vérifiant $(*)$, il existe $f_i\in B_{1-(n-1)/2q}(D)$ $(i\in\{1,2\})$ satisfaisant l'égalité suivante*:

$$f(z)=z_1z_2f_1(z)+(z_1^n+z_3)f_2(z).$$

Preuve. Tout d'abord, en remarquant que:

$$\begin{aligned} (\bar\partial Q_0)^3\wedge d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_1 &= 0 \quad \text{sur } D\cap\{\zeta_2=0\}, \\ (\bar\partial Q_0)^3\wedge d\bar\zeta_2\wedge g_2(\zeta,z) &= 0 \quad \text{sur } D\cap\{\zeta_2=0\}, \\ (\bar\partial Q_0)^3\wedge d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_3 &= 0 \quad \text{sur } D\cap\{\zeta_1=0\}, \end{aligned}$$

nous avons la formule suivante:

$$\begin{aligned} f(z) = {} & z_1z_2\int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta_1\zeta_2}(\bar\partial Q_0)^4G_0^4 \\ & + (z_1^n+z_3)\left[\int_{D\cap\{\zeta_1=0\}}\frac{z_2f(\zeta)}{\zeta_2\zeta_3}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\,dV_1\right. \\ & \left.+\int_{D\cap\{\zeta_2=0\}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1^n+\zeta_3)}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_2\wedge d\zeta_2\,dV_2\right] \\ & - z_1z_2\left[\int_{D\cap\{\zeta_1=0\}}\frac{(z_1)^{n-1}f(\zeta)}{\zeta_2\zeta_3}(\bar\partial Q_0)^3G_0^3\,d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1\,dV_1\right] \\ := {} & z_1z_2(1)+(z_1^n+z_3)[(2)+(3)]-z_1z_2(4). \end{aligned}$$

Traitons en premier les termes (2) et (4); avec l'estimation $(***)$ et sachant que $D\cap\{\zeta_1=0\}$ est une boule, par des lemmes classiques d'intégrations (que nous ne détaillons pas ici), il n'est pas difficile d'obtenir que $(2)\in B_{1/2}(D)$ et $(4)\in B_{1-(n-1)/2q}(D)$.

Pour (3), nous avons l'estimation suivante:

$$\int_{D'} \frac{1}{|\zeta_1^n+\zeta_3|} \frac{|\zeta_1|^{2q-2}\,dV_2}{\begin{array}{l}\big[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}\langle\partial\rho(\zeta),z-\zeta\rangle| \\ \qquad +|\zeta_1|^{2q-2}|z_1-\zeta_1|^2+\sum_{i=3}^4|z_i-\zeta_i|^2\big]^4\end{array}} + \int_{D''} \frac{1}{|\rho(z)|^{1/2}} \frac{|\zeta_1|^{2q-2}\,dV_2}{\begin{array}{l}\big[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}\langle\partial\rho(\zeta),z-\zeta\rangle| \\ \qquad +|\zeta_1|^{2q-2}|z_1-\zeta_1|^2+\sum_{i=3}^4|z_i-\zeta_i|^2\big]^4\end{array}},$$

où $D' := D\cap\{\zeta_2=0\}\cap\{|\zeta_1^n+\zeta_3|\le|\rho(z)|^{1/2}\}$ et $D'' := D\cap\{\zeta_2=0\}\cap\{|\zeta_1^n+\zeta_3|\ge|\rho(z)|^{1/2}\}$; tenant compte de cette estimation, en utilisant des changements de coordonnées de type Henkin–Romanov et le Lemme 6.2(i), nous obtenons $(3)\in B_{1/2+\varepsilon}(D)$ $\forall\varepsilon>0$ (en fait, en étant plus précis, on peut montrer que $(3)\in B_{1/2}(D)$, mais nous n' avons pas besoin ici de cette estimation plus fine).

Le terme (1) est majorée par l'expression suivante:

$$\int_{D} \frac{1}{|\zeta_2|} \frac{|\zeta_1|^{2q-3}\,dV_2}{\begin{array}{l}\big[-\rho(\zeta)-\rho(z)+|\mathrm{Im}\langle\partial\rho(\zeta),z-\zeta\rangle| \\ \qquad +|\zeta_1|^{2q-2}|z_1-\zeta_1|^2+\sum_{i=3}^4|z_i-\zeta_i|^2\big]^4\end{array}},$$

avec cette estimation et le Lemme 6.2(ii), toujours avec des changements de coordonnées de type Henkin–Romanov, $(1)\in B_{1/2+1/2q}(D)$. □

PROPOSITION 5.2. *Soit D comme ci-dessus; il existe f holomorphe bornée sur D vérifiant $(*)$, telle qu'il n'existe pas f_1 et f_2 holomorphes sur D satisfaisant:*

$$f(z)=z_1z_2f_1(z)+(z_1^n+z_3)f_2(z),$$

avec $f_1\in B_k(D)$ pour $k<1-\frac{n-1}{2q}$.

Autrement dit, la Proposition 5.2 assure que la Proposition 5.1 est optimale.

Preuve. Considérons $f(z)=\frac{z_2z_3}{1-z_4}$, f est bornée et vérifie $(*)$. On a une décomposition immédiate:

$$f(z)=z_1z_2\left(\frac{z_1^{n-1}}{1-z_4}\right)-(z_1^n+z_3)\left(\frac{z_2}{1-z_4}\right)\quad\text{avec}\quad \frac{z_1^{n-1}}{1-z_4}\in B_{1-(n-1)/2q}(D).$$

Supposons qu'il existe f_1, f_2 vérifiant $z_1z_2f_1(z)+(z_1^n+z_3)f_2(z)$ avec $f_1\in B_k(D)$, $k<1-\frac{n-1}{2q}$, alors $(z_1^{n-1}/(1-z_4))|_{z_1^n+z_3=0}$ aurait une extension holomorphe à D dans $B_k(D)$, ce qui n'est pas possible; en effet, posons $k_0=1-\frac{n-1}{2q}$ et supposons que $(z_1^{n-1}/(1-z_4))|_{z_1^n+z_3=0}$ admet une extension holomorphe, φ dans $B_{k_0-\theta}(D)$ avec $\theta>0$. Alors φ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(z)=\frac{1}{1-z_4}(z_1^{n-1}+(z_1^n+z_3)g(z)),$$

avec g holomorphe sur D et nous avons l'inégalité

$$\frac{1}{|1-z_4|}|z_1^{n-1}+(z_1^n+z_3)g(z)| \lesssim \frac{1}{|\rho(z)|^{k_0-\theta}}.$$

Considérons, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $\theta \in [0, 2\pi[$, les points suivants:

$$z_1 = \varepsilon^{1/2q}; \quad z_2 = 0; \quad z_3 = 0; \quad z_4 = 1-\varepsilon;$$

en ces points l'inégalité précédente entraîne

$$\left|\frac{1}{z_1} + g(z_1, 0, 0, 1-\varepsilon)\right| \lesssim \varepsilon^{\theta - 1/2q},$$

par conséquent,

$$\int_{|z_1|=\varepsilon^{1/2q}} \left(\frac{1}{z_1} + g(z_1, 0, 0, 1-\varepsilon)\right) dz_1 = \mathcal{O}(\varepsilon^{\theta}).$$

D'autre part,

$$\int_{|z_1|=\varepsilon^{1/2q}} g(z_1, 0, 0, 1-\varepsilon)\, dz_1 = 0$$

car g est holomorphe sur D, et donc,

$$2\pi i = \int_{|z_1|=\varepsilon^{1/2q}} \frac{1}{z_1}\, dz_1 = \int_{|z_1|=\varepsilon^{1/2q}} \left(\frac{1}{z_1} + g(z_1, 0, 0, 1-\varepsilon)\right) dz_1,$$

ce qui conduit à une contradiction quand ε tends vers zéro si $\theta > 0$. □

Remarque. A notre avis, ce résultat est très surprenant; en effet, f est très régulière sauf en $(0, 0, 0, 1)$, mais, en ce point z_1 est une direction de faible pseudoconvexité et z_2 de stricte pseudoconvexité, on pourrait donc s'attendre à trouver f_1 dans $B_{1/2+1/2q}(D)$.

6. Lemmes d'Intégration

Lemme 6.1. *Soient $\zeta, z \in \mathbb{C}$ et $B(\zeta, r)$ la boule centrée en ζ de rayon r, alors il existe des constantes réelles positives ne dépendant que de r, q et α vérifiant*:

(i) $$\int_{B(\zeta,r)} \frac{|\zeta|^{2q}\, d\lambda(z)}{[A+|\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^{\alpha}} \leq \begin{cases} C(A)^{1-\alpha} & si\ \alpha > 1, \\ D|\ln(A)| & si\ \alpha = 1, \end{cases}$$

(ii) $$\int_{B(\zeta,r)} \frac{|\zeta|^{q}\, d\lambda(z)}{[A+|\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^{\alpha}} \leq \begin{cases} C(A)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q+2}-\alpha} & si\ \alpha > \frac{1}{2}+\frac{1}{2q+2}, \\ D|\ln(A)| & si\ \alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2q+2}, \end{cases}$$

où $q \in N$ et A une constante positive assez petite.

Preuve. Pour (i), utilisons le changement de variables $z' = |\zeta|^q(\zeta - z)$; ceci est légitime si $\zeta \neq 0$, mais dans le cas $\zeta = 0$ l'intégrale est nulle:

$$\text{(i)} \leq \int_{B(0,R)} \frac{d\lambda(z')}{[A+|z'|^2+|z'|^{2q+2}]^{\alpha}} \leq \begin{cases} C(A)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \\ D|\ln(A)| & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pour (ii), utilisons le changement de coordonnées $t_1 + it_2 = |\zeta|^q \operatorname{Re}(\zeta - z) + i \operatorname{Im}(\zeta - z)$, ceci est possible si $\zeta \neq 0$ mais si $\zeta = 0$ l'intégrale est nulle:

$$\text{(ii)} \leq \int_{B(0,R)} \frac{dt_1 dt_2}{[A + t_1^2 + t_2^{2q+2}]^\alpha} \leq \begin{cases} C(A)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q+2}-\alpha} & \text{si } \alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{2q+2}, \\ D|\ln(A)| & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2q+2}. \end{cases} \qquad \square$$

LEMME 6.2. *Sous les mêmes hypothèses qu'au Lemme 6.1*:

$$\text{(i)} \int_{B(z,r)} \frac{|\zeta|^{2q}\, d\lambda(\zeta)}{[A + |\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^\alpha} \leq \begin{cases} C(A)^{1-\alpha} & \textit{si } \alpha > 1, \\ D|\ln(A)| & \textit{si } \alpha = 1; \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \int_{B(z,r)} \frac{|\zeta|^{2q-1}\, d\lambda(\zeta)}{[A + |\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^\alpha} \leq \begin{cases} C(A)^{1-\alpha-\frac{1}{2q+2}} & \textit{si } \alpha > 1, \\ D|\ln(A)A^{\frac{-1}{2q+2}}| & \textit{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Preuve. (i) Scindons $B(z,r)$ en deux parties, $\gamma_1 := \left\{\zeta \in B(z,r) \mid \frac{1}{2}|z| \leq |\zeta - z|\right\}$ et $\gamma_2 := \left\{\zeta \in B(z,r) \mid \frac{1}{2}|z| \geq |\zeta - z|\right\}$ alors:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \leq & \int_{\gamma_1} \frac{d\lambda(\zeta)}{[A + |\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^{\alpha-1+1/(q+1)}} \\ & + \int_{\gamma_2} \frac{|z|^{2q}\, d\lambda(\zeta)}{[A + |z|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^\alpha} \end{aligned}$$

il est clair que la premiére intégrale vérifie l'estimation et la seconde aussi en utilisant le Lemme 6.1.

(ii) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder avec les paramétres $\frac{2q}{2q-1}$ et $2q$:

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \lesssim & \left(\int_{B(z,r)} \frac{|\zeta|^{2q}\, d\lambda(\zeta)}{[A + |\zeta|^{2q}|\zeta - z|^2 + |\zeta - z|^{2q+2}]^\alpha} \right)^{\frac{2q-1}{2q}} \\ & \times \left(\int_{B(z,r)} \frac{d\lambda(\zeta)}{[A + |\zeta - z|^{2q+2}]^\alpha} \right)^{\frac{1}{2q}}, \end{aligned}$$

le résultat suit immédiatement en appliquant le (i) de ce même lemme. $\square$

References

[1] M. Andersson and B. Berndtsson, *Henkin–Ramirez formulas with weight factors,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982), 91–110.

[2] B. Berndtsson, *A formula for interpolation and division in* $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 263 (1983), 399–419.

[3] P. Bonneau, A. Cumenge, and A. Zeriahi, *Division dans les espaces de Lipschitz de fonctions holomorphes,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 297 (1983), 517–520.

[4] K. Diederich, B. Fischer, and J. E. Fornaess, *Hölder estimates on convex domains of finite type,* Math. Z. 232 (1999), 43–61.

[5] K. Diederich and J. E. Fornaess, *Support functions for convex domains of finite type,* Math. Z. 230 (1999), 145–164.

[6] K. Diederich and E. Mazzilli, *Zero varieties for the Nevanlinna class on all convex domains of finite type,* Nagoya Math. J. 163 (2001), 215–227.

[7] P. Dolbeault, *Sur la structure des courants résiduels,* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 33 (1988), 31–37.
[8] J. E. Fornaess, *Embedding strictly pseudoconvex domains in convex domains,* Amer. J. Math. 98 (1976), 529–569.
[9] G. M. Henkin and J. Leiterer, *Theory of functions on complex manifolds,* Akademie-Verlag, Berlin, 1984.
[10] J. J. Kohn, *Global regularity for* $\bar{\partial}$ *on weakly pseudoconvex manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1973), 273–292.
[11] P. Lelong, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives,* Gordon & Breach, Paris, 1968.
[12] E. Mazzilli, *Extension des fonctions holomorphes,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 321 (1995), 837–841.
[13] J. McNeal, *Estimates on the Bergman kernels of convex domains,* Adv. Math. 109 (1994), 108–139.
[14] M. Passare, *Residues, currents, and their relation to ideals of holomorphic functions,* Math. Scand. 62 (1988), 75–152.
[15] ———, *A new division formula for complete intersection,* Ann. Polon. Math. 55 (1991), 283–286.
[16] M. Range, *On Hölder estimates for* $\bar{\partial}u = f$ *on weakly pseudoconvexs domains,* Several complex variables (Cortona, 1976/1977), pp. 247–267, Scuola Norm. Sup. Pisa, Pisa, 1978.

Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie
C.N.R.S. U.R.A. D751
U.F.R. de Mathématiques
Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France