KŌDAI MATH. SEM. REP.
22 (1970), 324—337

SUR LA CROISSANCE DE FONCTIONS ALGEBROIDES A VALEURS DEFICIENTES[1)]

PAR NOBUSHIGE TODA

1. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde à n branches dans le plan fini définie par une équation irréductible

$$A_0(z)f^n+A_1(z)f^{n-1}+\cdots+A_n(z)=0 \tag{1}$$

où $A_0(z), \cdots, A_n(z)$ sont des fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que au moins un rapport entre elles est transcendant. Ozawa [5] a donné quelques conditions suffisantes pour que l'ordre de $f(z)$ soit entier, à l'égard du problème suivant:

S'il y a $n+1$ valeurs a_i $(i=0, 1, \cdots, n)$ telles que $\delta(a_i, f)=1$, est-ce que l'ordre de $f(z)$ est entier quand il est fini?

De plus, on a donné une solution positive pour ce problème dans [7]. Dans ce mémoire, on donne quelques résultats pour des fonctions algébroïdes et des systèmes qui contiennent des améliorations des théorèmes dans [7] et d'nn théorème de Valiron en appliquant des méthodes dans [2] et [3]. On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg ([4], [6]).

2. Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes,

$$u(re^{i\theta})=\max_{0\leqq j\leqq n}\log|f_j(re^{i\theta})|$$

et

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta-u(0).$$

$T(r,f)$ est dite la fonction caractéristique du système $f=(f_0, \cdots, f_n)$, qui est convexe par rapport à $\log r$ ([1]).

On dit que

$$\rho=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \qquad \text{est l'order de } f$$

et

$$\mu=\liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r} \qquad \text{est l'ordre inférieur de } f.$$

Reçu le 2 février 1970.

1) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

Si $\rho=\mu$, f est dite à croissance régulière.

Soit

$$F=\sum_{j=0}^{n} a_j f_j$$

une combinaison linéaire, homogène à coefficients constants des fonctions $f_0, \cdots, f_n$. Pour cette combinaison, on désigne par $\delta(F)$ la déficience du zéro de F:

$$\delta(F)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F)}{T(r,f)} \qquad 0\leqq\delta(F)\leqq 1.$$

parce que

$$N(r,0,F)<T(r,f)+O(1).$$

Soit l'ordre ρ de f fini et non-entier, alors on a démontré [7] que

$$K(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{n} N(r,0,f_j)}{T(r,f)}\geqq K(\rho)>0$$

où

$$K(\rho)=\inf_{f \text{ d'ordre } \rho} K(f).$$

On donne deux lemmes qui sont utilisés quelquesfois par la suite.

LEMMA 1. *Pour tout* $i\neq j$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$,

$$T(r,f_j/f_i)-O(1)<T(r,f)<\sum_{k\neq j} T(r,f_k/f_j)+O(1)$$

([7]).

LEMMA 2. *Soient* $A=(a_{ij})_{j=0,\cdots,n}^{i=0,\cdots,n}$ *une matrice régulière où les* a_{ij} *sont constants et*

$$(F_0,\cdots,F_n)^t=A(f_0,\cdots,f_n)^t,$$

alors, on a

$$T(r,f)-O(1)<T(r,F)<T(r,f)+O(1)$$

où $F=(F_0,\cdots,F_n)$ ([1]).

3. On améliore d'abord les théorèmes 1 et 2 dans [7]. Pour cet effet, on utilise quelques lemmes.

LEMME 3. *Soient* $\Pi(z)$ *un produit canonique de genre* q *et* $n(t)=n(t,0,\Pi)$. *Alors, on a*

$$\log M(r,\Pi)\leqq c(q)r^q\left\{\int_0^r\frac{n(t)}{t^{q+1}}dt+r\int_r^\infty\frac{n(t)}{t^{q+2}}dt\right\}$$

où $c(0)=1$ *et* $c(q)=2(2+\log(q+1))$ *si* $q\geqq 1$ ([4]).

THÉORÈME 1. *Soient* $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ *fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que l'ordre* ρ *du système* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *est fini et non-entier. Alors,*

$$K(f)\geqq\frac{|\sin\pi\rho|}{2.2\rho+|\sin\pi\rho|/2}.$$

Démonstration. On peut supposer que l'ordre de f_j $(j=0,\cdots,n)$ est au plus égal à ρ. Par conséquent, on peut représenter f_j $(j=0,\cdots,n)$ comme

$$f_j(z)=z^{p_j}\exp(P_j(z))\Pi_j(z)$$

où p_j est entier non-négatif, $P_j(z)$ est polynome de degré $q=[\rho]$ au plus et $\Pi_j(z)$ est produit canonique des zéros $(\neq 0)$ de $f_j(z)$ dont l'ordre ρ_j est au plus égal à ρ.

Si le genre q_i de $\Pi_i(z)$ est plus petit que q, on a d'après le lemma 3

$$T(r,\Pi_i)\leqq\log M(r,\Pi_i)=O(r^q)\qquad(r\to\infty).$$

En utilisant cela et d'après l'inégalité (4, 3) dans [3], on a, pour tout $j=0,\cdots,n$,

$$2T(r,f_j)-N(r,0,f_j)\leqq r^q\int_0^\infty n_j(t)t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt+O(r^q)\tag{2}$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes, où $n_j(t)=n(t,0,\Pi_j)$ et

$$\phi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(t^2-2t\cos\theta+1)^{1/2}}.$$

Or, en appliquant le lemme 1 à $(1,f_0,\cdots,f_n)$, on a

$$T(r,f)<\sum_{j=0}^{n}T(r,f_j)+O(1),$$

de sorte que l'on a de (2)

$$2T(r,f)-N(r,f)\leqq r^q\int_0^\infty n(t)t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt+O(r^q)$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes, où

$$n(t)=\sum_{j=0}^{n}n_j(t)\qquad\text{et}\qquad N(r,f)=\sum_{j=0}^{n}N(r,0,f_j).$$

En suite, on calcule tout à fait de la même manière comme dans la démonstration du théorème 1 dans [3] et obtient le résultat.

LEMME 4. *Soient* $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ *fonctions entières sans zéros communs à toutes. Si* $\sigma>1$ *et* $r>0$,

$$T(r,f)\leqq\frac{4}{\sigma-1}T(\sigma r,f)+\max_{0\leqq j\leqq n}N(\sigma r,0,f_j)+O(1) \tag{3}$$

où $f=(f_0,\cdots,f_n)$.

Démonstration. Soit $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ les zéros de $f_0(z)$. On applique la formule (7. 4)[2] dans [3] à f_j/f_0 (soit$=g_j$), alors on a

$$\begin{aligned}\log|f_j(z)|\leqq\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\log|g_j(\mathrm{Re}^{i\varphi})|\,d\varphi+\frac{2}{\sigma-1}\int_0^{2\pi}|\log|g_j(\mathrm{Re}^{i\varphi})||\,d\varphi\right\}\\ -\sum_{|b_k|<R}\log|g(z,b_k)|+\log|f_0(z)|,\end{aligned} \tag{4}$$

où

$$R=\sigma r,\qquad z=re^{i\theta}\qquad\text{et}\qquad g(z,\alpha)=\frac{R(z-\alpha)}{R^2-\bar{\alpha}z}.$$

Ici,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|g_j(Re^{i\varphi})|d\varphi=N(R,0,f_j)-N(R,0,f_0)+O(1) \tag{5}$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\log|g_j(Re^{i\varphi})||d\varphi=m(R,g_j)+m\left(R,\frac{1}{g_j}\right)\leqq 2T(R,g_j). \tag{6}$$

Combinant (4), (5) et (6), on a

$$\begin{aligned}\log|f_j(z)|\leqq N(R,0,f_j)-N(R,0,f_0)+\frac{4}{\sigma-1}T\left(R,\frac{f_j}{f_0}\right)\\ -\sum_{|b_k|<R}\log|g(z,b_k)|+\log|f_0(z)|+O(1)\end{aligned} \tag{7}$$

pour $j=0,1,\cdots,n$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\max_{0\leqq j\leqq n}\log|f_j(z)|\leqq\max_{0\leqq j\leqq n}N(R,0,f_j)-N(R,0,f_0)\\ +\frac{4}{\sigma-1}\max_{0\leqq j\leqq n}T\left(R,\frac{f_j}{f_0}\right)-\sum_{|b_k|<R}\log|g(z,b_k)|+\log|f_0(z)|+O(1).\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité à l'égard de θ de 0 à 2π, on a

$$\begin{aligned}T(r,f)+u(0)&\leqq\max_{0\leqq j\leqq n}N(R,0,f_j)-N(R,0,f_0)+\frac{4}{\sigma-1}\max_{0\leqq j\leqq n}T\left(R,\frac{f_j}{f_0}\right)\\ &\quad+N(R,0,f_0)-N(r,0,f_0)+N(r,0,f_0)+O(1)\\ &=\max_{0\leqq j\leqq n}N(R,0,f_j)+\frac{4}{\sigma-1}\max_{0\leqq j\leqq n}T\left(R,\frac{f_j}{f_0}\right)+O(1),\end{aligned}$$

2) Cette formule est vraie aussi quand $f(0)=0$ ou ∞.

et en utilisant le lemme 1,

$$T(r,f)\leqq\frac{4}{\sigma-1}T(\sigma r,f)+\max_{0\leqq j\leqq n}N(\sigma r,0,f_j)+O(1).$$

THÉORÈME 2. *Soient $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes, μ l'ordre inférieur du système $f=(f_0,\cdots,f_n)$ et*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty.$$

S'il y a $n+1$ combinaisons $F_0,\cdots,F_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions $f_0,\cdots,f_n$, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que

$$\gamma=\max_{0\leqq i\leqq n}(1-\delta(F_i))<1,$$

alors,

$$\mu\geqq\log\left(\frac{1}{\gamma(2-\gamma)}\right)\Big/\log\left(1+\frac{4}{\gamma(1-\gamma)}\right)\qquad(\gamma\neq 0),$$

$$\mu\geqq 1\qquad(\gamma=0).$$

Démonstration. Soit $A=(a_{ij})_{j=0,\cdots,n}^{i=0,\cdots,n}$ une matrice telle que

$$(F_0,\cdots,F_n)^t=A(f_0,\cdots,f_n)^t,$$

alors, $|A|\neq 0$ par l'hypothèse. Manifestement, les fonctions $F_0,\cdots,F_n$ n'ont pas de zéros communs à toutes. D'après le lemme 2,

$$T(r,f)\sim T(r,F)\qquad(r\to\infty),\tag{8}$$

en conséquence,

$$1-\delta(F_i)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F_i)}{T(r,f)}=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F_i)}{T(r,F)}\tag{9}$$

où $F=(F_0,\cdots,F_n)$. On applique le lemme 4 à F. Alors, on a

$$T(r,F)\leqq\frac{4}{\sigma-1}T(\sigma r,F)+\max_{0\leqq j\leqq n}N(\sigma r,0,F_j)+O(1)\tag{10}$$

où $\sigma>1$ et $r>0$.

Soit

$$\gamma<c'<c<1,$$

alors, d'après l'hypothèse et de (9),

$$N(r,0,F_j)<c'T(r,F)\qquad(j=0,\cdots,n)$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes.

Choisissons

$$\sigma=1+\frac{4}{c(1-c)}.$$

Alors, de (10), on obtient

$$T(r,F)<c(2-c)T(\sigma r,F)$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes.

En suite, on calcule comme dans [3] et utilise (8), et obtient le résultat tout de suite.

COROLLAIRE 1. *Soit f un système comme dans le théorème 2. S'il existe au moins $n+1$ combinaisons $F_0,\cdots,F_m$ $(m\geqq n)$ linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions $f_0,\cdots,f_n$, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que*

$$\delta(F_i)>0 \qquad (i=0,\cdots,m),$$

alors, l'ordre inférieur du système f est positif.

En modifiant le théorème 5 dans [3], on obtient pour des systèmes le

LEMME 5. *Soient $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes, ρ l'ordre du système $f=(f_0,\cdots,f_n)$ et μ l'ordre inférieur de f.*

Supposons qu'il y a un nombre q entier non-négatif et β, $0<\beta<1/2$, tels que

$$K(f)<\frac{\beta}{10e(q+1)}. \tag{11}$$

I. *Si*

$$\rho>q+1-\beta, \tag{12}$$

alors, il y a un nombre x_0 positif tel que, pour tout x plus grand que x_0, tout intervalle

$$x\leqq r\leqq(100n)^{1/\beta}x \tag{13}$$

contient un point s tel que

$$T(u,f)u^{-q-1+\beta}\leqq T(s,f)s^{-}e^{-1+\beta} \qquad (x_0\leqq u\leqq s).$$

II. *Si*

$$\mu<q+\beta, \tag{14}$$

alors, tout intervalle (13) *contient un point t tel que*

$$T(t,f)t^{-q-\beta}\geqq T(v,f)v^{-q-\beta} \qquad (t\leqq v).$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, il suffit de prouver le fait suivant

qui correspont au lemme 3 dans [3].

"Sous la condition (11), si

$$\sigma=(100n)^{1/\beta}$$

et

$$q+\beta\leqq c\leqq q+1-\beta,$$

alors,

$$\frac{T(r,f)}{r^c}<\sup_{r/\sigma\leqq u\leqq r}\frac{T(u,f)}{u^c}$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes."

En effet, mettons

$$\tau=\frac{\beta}{10e(q+1)},$$

alors, d'après (11)

$$N(u,f)<\tau T(u,f)$$

pour toutes valeurs u suffisamment grandes, où

$$N(u,f)=\sum_{i=0}^{n}N(u,0,f_i).$$

Ici, on applique la formule (10. 2) dans [3] à f_j/f_i $(i\neq j)$, alors, on a

$$2T\left(r,\frac{f_j}{f_i}\right)-2\{N(r,0,f_i)+N(r,0,f_j)\}$$

$$<(q+1)r^q\int_\rho^R\{N(\alpha t,0,f_i)+N(\alpha t,0,f_j)\}t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt$$

$$+8.5\left(\frac{r}{\rho}\right)^q T\left(\alpha\rho,\frac{f_j}{f_i}\right)+8.5\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T\left(\alpha R,\frac{f_j}{f_i}\right)$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes, où

$$\alpha=e^{1/(q+1)},\qquad \rho=\frac{r}{\alpha\sigma}\qquad\text{et}\qquad R=\frac{\sigma r}{\alpha}.$$

En utilisant lemme 1, on a

$$2(n+1)T(r,f)-2(2n+1)N(r,f)$$

$$<(2n+1)(q+1)r^q\int_\rho^R N(\alpha t,f)t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt$$

$$+8.5n(n+1)\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^q T(\alpha\rho,f)+\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(\alpha R,f)\right\},$$

par conséquent,

$$2T(r,f)-4N(r,f)<2(q+1)r^q\int_\rho^R N(\alpha t,f)t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt$$
$$+8.5n\left\{\left(\frac{r}{\rho}\right)^q T(\alpha\rho,f)+\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(\alpha R,f)\right\}$$

pour toutes valeurs r suffisamment grandes.

En suite, on calcule comme dans [3] et arrive à une contradiction suivante si on nie la conclusion.

$$1\leqq 2\tau+\frac{4.4e(q+1)\tau}{\beta}+\frac{17ne}{100n}$$
$$<\frac{1}{10e}+\frac{4.4}{10}+\frac{17e}{100}<\frac{5}{100}+\frac{44}{100}+\frac{48}{100}<1.$$

On peut démontrer d'autres choses comme dans [3] et obtient le résultat.

COROLLAIRE 2. *Soit f un système comme dans le lemme* 5. *Les conditions* (11) *et* (12) *entraînent*

$$\mu\geqq q+1-\beta.$$

Les conditions (11) *et* (14) *entraînent*

$$\rho\leqq q+\beta.$$

LEMME 6. *Soient f un système comme dans le lemme* 5 *et p le nombre entier défini par*

$$p-\frac{1}{2}\leqq\mu<p+\frac{1}{2}.$$

Si

$$K(f)<\frac{\beta}{10e(p+1)}\qquad\left(0<\beta<\frac{1}{2}\right), \tag{15}$$

alors,

$$p\geqq 1,\qquad |\rho-p|<\frac{\beta}{20}$$

et

$$p-\beta\leqq\mu\leqq\rho<p+\frac{\beta}{20}.$$

Démonstration. De (15), on a

$$K(f)<\frac{1}{20e}. \tag{16}$$

D'après le théorème 2,

$$\begin{aligned} &\mu\geqq 1 \qquad (K(f)=0),\\ &\mu\geqq\log\left(\frac{1}{\gamma(2-\gamma)}\right)\Big/\log\left(1+\frac{4}{\gamma(1-\gamma)}\right)>\log\frac{1}{2\gamma}\Big/\left(\log\frac{1}{2\gamma}+\log\left(\frac{8}{1-\gamma}+2\gamma\right)\right) \quad (\gamma\neq 0) \end{aligned} \tag{17}$$

où

$$\gamma=\max_{0\leqq i\leqq n}(1-\delta(f_i))<K(f)<\frac{1}{20e}. \tag{18}$$

Par (18),

$$20<10e<\frac{1}{2\gamma}, \qquad \frac{1}{1-\gamma}<\frac{40}{39}<1.5$$

et

$$\frac{3}{1-\gamma}+2\gamma<12+1<20<\frac{1}{2\gamma}.$$

De (17),

$$\mu>\frac{1}{2},$$

par conséquent,

$$p\geqq 1.$$

Puis, on démontre

$$\rho\leqq p+1-\beta. \tag{19}$$

En effet, si (19) n'est pas vrai, en appliquant le corollaire 2 à $q=p$, on obtient

$$\mu\geqq p+1-\beta,$$

qui est contraire à l'hypothèse.

En suite, de (15) et (19) et d'après le théorème 1,

$$\frac{|\sin\pi\rho|}{e(p+1)}\leqq\frac{|\sin\pi\rho|}{2.2(p+1-\beta)+1/2}\leqq\frac{|\sin\pi\rho|}{2.2\rho+1/2}\leqq K(f)<\frac{\beta}{10e(p+1)}.$$

En conséquence, on a

$$|\sin\pi\rho|<\frac{\beta}{10}.$$

Soit l l'entier tel que

$$|l-\rho| \leqq \min(\rho-[\rho], [\rho]+1-\rho),$$

alors,

$$2|l-\rho| \leqq |\sin \pi(l-\rho)| = |\sin \pi\rho| < \frac{\beta}{10}.$$

Parce que

$$p-\frac{1}{2} \leqq \mu \leqq \rho < p+1-\beta,$$

on a

$$l=p \qquad \text{et} \qquad |p-\rho| < \frac{\beta}{20}.$$

Puis, on peut démontrer

$$\mu \geqq p-\beta$$

en appliquant le corollaire 2 à $q+1=p$.

THÉORÈME 3. *Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{\log r} = \infty$$

où $f=(f_0, \cdots, f_n)$. S'il y a $n+1$ combinaisons $F_0, \cdots, F_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions $f_0, \cdots, f_n$, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que

$$\delta(F_i)=1 \qquad (i=0, \cdots, n),$$

alors, l'ordre ρ de f est positif entier ou infini. De plus, f est à croissance régulière.

Démonstration. D'après le théorème 2,

$$\rho \geqq 1.$$

1) Le cas où $\rho=\infty$. Dans ce cas, les inégalités (11) et (12) sont vraies pour tout entier q. D'après le corollaire 2, $\mu \geqq q+1$, où μ est l'ordre inférieur de f. Cela veut dire que $\mu=\infty$.

2) Le cas où $\rho<\infty$. D'après le lemme 6, on peut démontrer ce cas tout de suite.

En modifiant le théorème 4a dans [2], on a le

THÉORÈME 4. *Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n \geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs*

à toutes, $\rho(\leqq\infty)$ *l'ordre du système* $f=(f_0,\cdots,f_n)$, μ *l'ordre inférieur de* f *et de plus*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=\infty.$$

Alors, pour tout $\tau(\neq\infty)$ *tel que*

$$\mu\leqq\tau\leqq\rho,$$

on a

$$K(f)\geqq\frac{n+1}{n}\frac{|\sin\pi\tau|}{4.4e(\tau+1)+|\sin\pi\tau|}.$$

Démonstration. En vertu du théorème 1, il suffit de prouver le cas où $\mu<\rho$. Soit τ un nombre non-entier tel que

$$\mu<\tau<\rho$$

et q le nombre entier le plus grand plus petit que τ. On applique la formule (10. 1) dans [2] à f_i/f_j $(i\neq j)$ et après utilise le lemme 1.

$$\begin{aligned}&2T\left(r,\frac{f_i}{f_j}\right)-\{N(r,0,f_i)+N(r,0,f_j)\}\\ &\leqq r^q\int_0^\infty\{n_R^*(t,0,f_i)+n_R^*(t,0,f_j)\}t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt\\ &\quad+14\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T\left(2R,\frac{f_i}{f_j}\right)+O(r^q)+O(\log r)\qquad\left(r_0\leqq r\leqq\frac{R}{2}\right),\end{aligned}$$

où

$$n_R^*(t,0,f_i)=\begin{cases}n(t,0,f_i)-n(0,0,f_i), & t\leqq R\\ n(R,0,f_i)-n(0,0,f_i), & t>R\end{cases}$$

et r_0 est un nombre positif suffisamment grand. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}&2(n+1)T(r,f)-2nN(r,f)\\ &\leqq 2nr^q\int_0^\infty n_R^*(t,f)t^{-q-1}\phi\left(\frac{t}{r}\right)dt+14n(n+1)\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R,f)+O(r^q)+O(\log r),\end{aligned}$$

où $n_R^*(t,f)=\sum_{i=0}^n n_R^*(t,0,f_i)$.

En suite, on calcule comme dans [2] et obtient le résultat.

N.B. Comme une conséquence des théorèmes 2 et 4, on a le théorème 3 aussi.

4. Les résultats dans le paragraphe 3 s'appliquent en particulier aux fonctions algébroïdes d'après le lemme suivant.

LEMME 7. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1), *alors,*

$$\left|T(r,f)-\frac{1}{n}T(r,A)\right|<O(1)$$

où $A=(A_0,\cdots,A_n)$ ([8]).

Soient $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation (1), $a_0,\cdots,a_n$ $n+1$ valeurs distinctes, finies ou non et

$$K(f;a_0,\cdots,a_n)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}N(r,a_i)}{T(r,f)}.$$

Alors, on note que, d'après les lemmes 2 et 7,

$$K(f;a_0,\cdots,a_n)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}N(r,0,F(z,a_i))}{T(r,F)}$$

où

$$F(z,a)=A_0(z)a^n+\cdots+A_n(z)\qquad(a\neq\infty)$$

$$F(z,\infty)=A_0(z)$$

et

$$F=(F(z,a_0),\cdots,F(z,a_n)).$$

THÉORÈME 5. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde défine par l'équation* (1) *d'ordre ρ fini et non-entier. Alors, pour n'importe quelles valeurs distinctes $a_0,\cdots,a_n$ finies ou non,*

$$K(f;a_0,\cdots,a_n)\geqq\frac{|\sin\pi\rho|}{2.2\rho+|\sin\pi\rho|/2}.$$

En effet, en appliquant le théorème 1 à

$$F=(F(z,a_0),\cdots,F(z,a_n)),$$

d'après le lemme 7, on obtient ce théorème.

THÉORÈME 6. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1) *d'ordre inférieur μ qui admet $n+1$ valeurs $a_0,\cdots,a_n$ telles que*

$$\delta(a_i)>0\qquad(i=0,\cdots,n).$$

Alors, si

$$\gamma=\max_{0\leqq i\leqq n}(1-\delta(a_i)),$$

$$\mu\geqq\log\frac{1}{\gamma(2-\gamma)}\Big/\log\left(1+\frac{4}{\gamma(1-\gamma)}\right)\qquad(\gamma\neq 0),$$

$$\mu\geqq 1\qquad(\gamma=0).$$

En effet, soit

$$F=(F(z,a_0),\cdots,F(z,a_n)),$$

alors, d'après les lemmes 2 et 7, d'ordre inférieur de F est égal à μ et

$$1-\delta(a_i)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F(z,a_i))}{T(r,F)}.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème 2 à F, on a le résultat.

COROLLAIRE 3. *Si $\mu=0$, $f(z)$ admet au plus n valeurs déficientes.*

C'est une extension du théorème 10 dans [9].

THÉORÈME 7. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1) *qui admet $n+1$ valeurs distinctes $a_0,\cdots,a_n$ telles que*

$$\delta(a_i)=1\qquad(i=0,\cdots,n),$$

alors, l'ordre de $f(z)$ est positif entier ou infini. De plus, $f(z)$ est à croissance régulière.

En effet, soit

$$F=(F(z,a_0),\cdots,F(z,a_n)),$$

alors,

$$\delta(F(z,a_i))=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F(z,a_i))}{T(r,F)}$$

$$=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,a_i)}{T(r,f)}=\delta(a_i)\qquad(i=0,\cdots,n)$$

d'après les lemmes 2 et 7. Par conséquent,

$$K(F)=0,$$

de sorte que l'on a le résultat en vertu du théorème 3 et lemme 7.

THÉORÈME 8. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1) *d'ordre $\rho(\leqq\infty)$ et d'ordre inférieur $\mu<\infty$. Alors, pour tout $\tau(\neq\infty)$ tel que*

$$\mu\leqq\tau\leqq\rho$$

et pour $n+1$ valeurs quelconque $a_0, \cdots, a_n$ distinctes, finies ou non,

$$K(f; a_0, \cdots, a_n) \geqq \frac{n+1}{n} \frac{|\sin \pi\tau|}{4.4e(\tau+1)+|\sin \pi\tau|}.$$

On obtient ce théorème du théorème 4 comme d'habitude.

Bibliographie

[1] Cartan, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica **7** (1933), 5–33.

[2] Edrei, A., The deficiencies of meromorphic functions of finite lower order. Duke Math. J. **31** (1964), 1–22.

[3] Edrei, A., et W. H. J. Fuchs, On the growth of meromorphic functions with several deficient values. Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 292–328.

[4] Nevanlinna, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris (1929).

[5] Ozawa, M., Deficiencies of an algebroid function. Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 262–276.

[6] Selberg, H. L., Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo **8** (1934), 1–72.

[7] Toda, N., Sur une relation entre la croissance et le nombre de valeurs déficientes de fonctions algébroïdes ou de systèmes. Kōdai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 114–121.

[8] Valiron, G., Sur la dérivée des fonctions algébroïdes. Bull. Soc. Math. **59** (1931), 17–39.

[9] Valiron, G., Sur les valeurs déficientes des fonctions algébroïdes méromorphes d'ordre nul. J. d'Analyse Math. **1** (1950), 28–42.

Institut de Mathématiques,
Université de Tôhoku.