J. Math. Soc. Japan
Vol. 37, No. 2, 1985

Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes II. Groupes discontinus arithmétiquement définis

Dédié au professeur Y. Kusunoki, à l'occasion
de son soixantième anniversaire

Par Toshiaki TERADA

(Reçu le 4 mars, 1981)
(Revisé le 8 août, 1983)

Introduction.

Pour obtenir le groupe modulaire elliptique G, il existe deux méthodes. L'une des définitions est arithmétique: G est le groupe de transformations linéaires fractionnaires donné par

$$G_{ar}=\left\{T\in GL(2, \boldsymbol{Z})\ \middle|\ T^*\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

L'autre est analytique ou géométrique. En partant de deux solutions

$$\omega_1(x)=\int_0^x du/v \quad \text{et} \quad \omega_2(x)=\int_0^1 du/v \quad (\text{avec } v=\sqrt{u(u-x)(u-1)})$$

de l'équation différentielle hypergéométrique

$$x(x-1)y''+(2x-1)y'+y/4=0,$$

on a d'abord la fonction automorphe $x=\lambda(\tau)$ avec $\tau=\omega_1/\omega_2$ et puis en divisant le domaine fondamental par un groupe fini de transformations linéaires fractionnaires, on arrive au nouveau groupe G_{an} et à la nouvelle fonction automorphe

$$J(\tau)=4(\lambda^2-\lambda+1)^3/27\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

La première définition G_{ar} est très claire et il en est de même du rapport à la théorie des nombres. Mais elle n'est pas commode pour étudier les générateurs du groupe, le domaine fondamental, la fonction-même ou les relations avec les courbes elliptiques. Cependant la deuxième G_{an} est tout l'opposé. Donc il est à désirer qu'un groupe discontinu soit, si possible, défini par ces deux méthodes.

Or, d'une part, quant aux groupes analytiquement définis, Schwarz [6] avait établi que, lorsque ω_1 et ω_2 sont des solutions convenables de l'équation différentielle hypergéométrique

$$x(x-1)y''+[\lambda_0+\lambda_1-2+(4-\lambda_0-2\lambda_1-\lambda_2)x]y'+(1-\lambda_1)\lambda_\infty y=0$$

et que les paramètres λ_i admettent certaines conditions (voir 1.3), la fonction inverse de $\omega_1(x)/\omega_2(x)$ donne une fonction automorphe sur le cercle unité. Le groupe est défini évidemment par le groupe de monodromie. Ensuite cela est généralisé au cas du système (F_1) d'équations différentielles aux dérivées partielles (voir 1.1), dont une solution est la fonction hypergéométrique F_1 d'Appell (si $n>2$, F_D de Lauricella), par Picard [4], [5], Deligne et Mostow [1], Mostow [3] et l'auteur [8], [10] : l'inverse de l'application sur l'espace projectif de dimension n, définie par $n+1$ solutions linéairement indépendantes de (F_1) donne, sous certaines conditions sur les paramètres, des fonctions automorphes sur un domaine biholomorphe à la boule unité. Le groupe est naturellement induit par le groupe de monodromie.

D'autre part, quant aux groupes arithmétiquement définis, Shimura [7] a présenté six groupes comme des exemples de son théorie de fonctions automorphes (voir ci-dessus), qui proviennent de modules de courbes algébriques.

Notre but est d'établir une relation entre ces deux sortes de groupes : parmi les groupes de monodromie de (F_1) (y compris le cas d'une variable) qui sont aussi des groupes discontinus analytiquement définis, il existe dix groupes dont des extensions finies peuvent se définir aussi arithmétiquement. Voici l'énoncé grossier de notre théorème : pour chacun de ces dix, il existe une extension naturelle d'ordre fini G telle que, avec un entier positif m, une m-ième racine primitive ζ de 1, un anneau $K=\boldsymbol{Z}[\zeta]$ et une matrice hermitienne $A\in GL(n+1, K)$ [1], le groupe de transformations projectives donné par G coïncide avec celui donné par le groupe de matrices

$$G_{ar}=\{T\in GL(n+1, K) \mid T^*AT=A\},$$

ce qui est l'expression d'après Shimura.

Notre table contient tous les groupes de Shimura, et les groupes de (4), (6), (7), (8), (9) et (10) correspondent, par une transformation linéaire, respectivement à (4), (6), (1), (3), (5) et (2) de son liste. Pour ces six, notre résultat est une autre démonstration du sien. Et les groupes de (7), (8), (9) et (10) correspondent à (1), (9), (2) et respectivement (28) présentés dans [10]. D'ailleurs l'auteur ne sait pas encore s'il existe d'autres groupes de monodromie arithmétiquement définis (en notre sense).

Dans la Section 1, on explique quelques propriétés des fonctions automorphes provenant du système (F_1) d'équations hypergéométriques et leur groupe analytiquement défini. La Section 2 traite les propriétés d'une famille de courbes algébriques dont nos fonctions automorphes donnent le module. Et l'énoncé exact du Théorème et la démonstration se trouvent dans la Section 3.

---

1) Il existe une exception : le (1) de la Table de p. 182.

Enfin l'auteur témoigne sincèrement de la reconnaissance à K. Aomoto et M. Yoshida pour les conversations précieuses.

§ 1. Préliminaire.

1.1. Le domaine $\mathscr{D}$ et les fonctions ω_i. Dans l'espace numérique $\boldsymbol{C}^n(x_1, \cdots, x_n)$, posons, avec $x_0=0$ et $x_{n+1}=1$,

$$\mathscr{D}=\{x=(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \neq x_j \, (0 \leqq i<j \leqq n+1)\},$$

et désignons par $\tilde{\mathscr{D}}$ le revêtement universel de $\mathscr{D}$, et par π la projection. Et considérons un système d'équations différentielles aux $n+3$ paramètres $\lambda=(\lambda_i)$ $(i=0, 1, \cdots, n+1, \infty, \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i=n+1)$, avec $\partial_i=\partial/\partial x_i$ et $\sum=\sum_{1\leq\alpha\leq n, \alpha\neq i}$,

$$(F_1)\begin{cases} (x_i-x_j)\partial_i\partial_j F+(\lambda_j-1)\partial_i F-(\lambda_i-1)\partial_j F=0 \qquad (1\leqq i<j\leqq n) \\ x_i(x_i-1)\partial_i^2 F+[x_i(x_i-1)\sum(1-\lambda_\alpha)/(x_i-x_\alpha)+\lambda_0+\lambda_i-2+(1-\lambda_0-2\lambda_i-\lambda_{n+1})x_i] \\ \qquad \cdot\partial_i F+(\lambda_i-1)\sum x_\alpha(x_\alpha-1)\partial_\alpha F/(x_i-x_\alpha)+\lambda_\infty(1-\lambda_i)F=0 \qquad (1\leqq i\leqq n). \end{cases}$$

Il a $n+1$ solutions linéairement indépendantes, holomorphes sur $\tilde{\mathscr{D}}$, et si aucun de λ_i n'est entier, on peut, pour un $Q\in\tilde{\mathscr{D}}$ avec $\pi(Q)=x=(x_1, \cdots, x_n)$, les représenter par l'intégrale

$$\omega_i(\lambda, Q)=(1-\mu_i)\int_0^{x_i}\prod_{\alpha=0}^{n+1}(u-x_\alpha)^{\lambda_\alpha-1}du^{\,2)} \qquad (\text{avec } \mu_i=\exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_i)).$$

Soit P une permutation avec $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & n+1 & \infty \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_{n+1} & p_\infty \end{pmatrix}$. Alors, en la correspondant, il existe un automorphisme T_P [**9**] de $\mathscr{D}$: $x=(x_1, \cdots, x_n)\mapsto x'=(x_1', \cdots, x_n')$ avec

$$x_i'=\frac{x_{p_i}-x_{p_0}}{x_{p_{n+1}}-x_{p_0}}\bigg/\frac{x_{p_i}-x_{p_\infty}}{x_{p_{n+1}}-x_{p_\infty}}$$

où on pose $x_0\equiv 0$, $x_{n+1}\equiv 1$ et $x_\infty\equiv\infty$, T_P est bien défini si on considère la limite où $x_\infty\to\infty$. On désigne par $T_{(ij)}$ l'automorphisme T_P dont P est la transposition entre i et j. $T_{(ij)}$ est le reboursement par rapport à $x_i=x_j$.

1.2. Les changements des ω_i. Désignons par I la matrice unité d'ordre $n+1$, par $M_i(\cdots)$ la matrice d'ordre $n+1$ dont la i-ième ligne est $(\cdots)$ et les autres sont nulles et par diag$(\cdots)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $(\cdots)$, et posons $\mu_{i_0 i_1\cdots i_p}=\exp[2\pi\sqrt{-1}(\lambda_{i_0}+\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p})]$ et $\mu_i'=1-\mu_i$. Ensuite on pose, lorsque $0<i<j\leqq n+1$,

$$R_{ij}=I+\mu_j'\,{}^tM_i(***)-\mu_i'\,{}^tM_j(***)$$

2) Le chemin dépend de Q. Il est précisé dans [**10**], § 1. Et les ω_i-ci sont égaux à $(1-\mu_i)(\omega_i-\omega_0)$ de [**10**].

où $(***)=(0 \cdots 0\ -\mu_i\ \mu'_{i+1} \cdots \mu'_{j-1}\ 1\ 0 \cdots 0)$, lorsque $0<i\leqq n+1$,

$$R_{0i}=I-{}^tM_i(\mu'_1 \cdots \mu'_{i-1}\ 1-\mu_{0i}\ \mu_0\mu'_{i+1} \cdots \mu_0\mu'_{n+1})$$

et

$$R_{i\infty}=(R_{i0}R_{i1} \cdots R_{i\ i-1}R_{i\ i+1} \cdots R_{i\ n+1})^{-1}.$$

Posons encore, lorsque $0<i<j\leqq n+1$ et $\lambda_i=\lambda_j$,

$$T_{ij}=I+{}^tM_i(***)-{}^tM_j(***),$$

lorsque $0<i\leqq n+1$ et $\lambda_0=\lambda_i$,

$$T_{0i}=I-(1/\mu'_i){}^tM_i(\mu'_i \cdots \mu'_{i-1}\ \mu'_i(\mu_i+1)\ \mu_i\mu'_{i+1} \cdots \mu_i\mu'_{n+1}),$$

lorsque $0<i\leqq n+1$ et $\lambda_i=\lambda_\infty$,

$$\begin{aligned} T_{i\infty}=&\operatorname{diag}(1 \cdots 1\ \overset{\overset{i}{\vdots}}{\mu'_\infty}\ 1 \cdots 1)-\mu_i^2M_i(\mu_0\ \mu_{01} \cdots \mu_{01\cdots n}) \\ &+\sum_{\alpha=i+1}^{n+1}\mu'_\alpha\mu_iM_\alpha(\mu_0 \cdots \mu_{01\cdots i-2}\ \mu_{01\cdots i-1}+1/\mu_i\ \mu_{01\cdots i} \cdots \mu_{01\cdots n}) \end{aligned}$$

et lorsque $\lambda_0=\lambda_\infty$,

$$T_{0\infty}=I+(\mu_\infty/\mu'_\infty)\sum_{\alpha=1}^{n+1}\mu'^2_\alpha M_\alpha(\mu_0\ \mu_{01} \cdots \mu_{01\cdots n}).$$

On a, si $\lambda_i=\lambda_j$, $(T_{ij})^2=R_{ij}$.

Désignons par G_{an} (resp. G'_{an}) le groupe engendré par les R_{ij} et T_{ij} (resp. seulement par les R_{ij}). Sa signification est comme ce qui suit. Le groupe fondamental de $\mathfrak{D}$ est engendré par les lacets A_{ij} $(0\leqq i<j\leqq n+1)$ par rapport à $x_i=x_j$ ([**9**]), et le prolongement analytique de $\omega={}^t(\omega_1, \cdots, \omega_{n+1})$ est égal à $R_{ij}\omega$ (si $i=0$ et $j=n+1$, à $\mu_\infty R_{0\ n+1}\omega$). De plus, si $\lambda_i=\lambda_j$, il existe une courbe C qui lie un point x de $\mathfrak{D}$ et $x'=T_{(ij)}(x)$ telle que le prolongement analytique de ω le long de C soit $k_{ij}T_{ij}\omega$ où k_{ij} est une fonction de x ([**10**], §5). Pour une matrice T, désignons par T_{pr} la transformation linéaire projective donnée par T et par $G_{an,pr}$ (resp. $G'_{an,pr}$) le groupe engendré par tous les T_{pr} avec $T\in G_{an}$ (resp. G'_{an}). Ainsi on a le

LEMME 1. *Q et $Q'\in\tilde{\mathfrak{D}}$ avec $\pi(Q)=x$ et $\pi(Q')=x'$ étant donnés, s'il existe une permutation* $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & \infty\\ p_0 & p_1 & \cdots & p_\infty\end{pmatrix}$ *telle qu'on ait $x'=T_P(x)$, il existe un $T\in G_{an}$ tel qu'on ait*

$$\omega(\lambda, Q')=T_{pr}\omega(\lambda, Q)$$

où ω est ici regardé comme un point de l'espace projectif à n dimensions.

D'ailleurs, si tous les λ_i sont réels et aucun en n'est entier, en posant

$$A'=(a_{ij})=\overline{W}\sum_{\alpha=1}^{n+1}(\bar{a} \cdots \bar{a}\ (\bar{a}-a\mu_\alpha)/(1-\mu_\alpha)\ a \cdots a)W$$

(avec $W=\mathrm{diag}(\mu_0\ \mu_{01}\cdots\mu_{01\cdots n})$ et $a=\sqrt{\mu_\infty}$), on a $T^*A'T=A'$ pour tout $T\in G_{an}$ ([**10**], § 1, 5). A' est évidemment hermitienne, et toute matrice hermitienne A telle qu'on ait $R^*AR=A$ pour tout $R\in G'_{an}$ est égale à A' à une constante réelle multiplicative près ([8]).

1.3. Les fonctions automorphes sur B. Les fonctions ω_i déterminent naturellement une application $\boldsymbol{\omega}$: $w_i=\omega_i$ locallement isomorphe de $\tilde{\mathscr{D}}$ sur un espace projectif aux coordonnées homogènes $w_1, \cdots, w_{n+1}$. Sous la condition

(C): $0<\lambda_i<1$ $(0\leqq i\leqq\infty)$, et, pour tout $0\leqq i_0<i_1<\cdots<i_p\leqq n+1$, $\lambda_{i_0}+\lambda_{i_1}+\cdots+\lambda_{i_p}-p$ est égal à l'inverse d'un entier (sauf ± 1) ou zéro,

l'image de l'application ω est contenue dans un domaine biholomorphe à la boule unité:

$$B=\{w\mid \sum a_{ij}\bar{w}_i w_j>0\}.$$

Et il existe une application méromorphe ϕ de B sur un domaine $\mathscr{D}_1$ avec $\mathscr{D}\subset\mathscr{D}_1\subset\boldsymbol{P}_n(\boldsymbol{C})$ telle que $\phi\circ\omega=\pi$ et que $B\setminus\phi^{-1}(\mathscr{D})$ est un ensemble analytique de codimension 1 ([**10**]). Il est évident que $B_0\equiv\phi^{-1}(\mathscr{D})=\omega(\tilde{\mathscr{D}})$ et la restriction de ϕ sur B_0 est biholomorphe, et que $\phi(w)=\phi(w')$ si et seulement si $w'=T_{pr}w$ pour un $T\in G'_{an}$. Par suite ϕ détermine des fonctions automorphes sur B avec le groupe discontinu $G'_{an,pr}$. En divisant encore le domaine fondamental par un groupe fini, on obtient des nouvelles fonctions automorphes dont le groupe est $G_{an,pr}$ et le domaine fondamental est isomorphe à $H\backslash\mathscr{D}_0$ où H est le groupe engendré par tous les $T_{(ij)}$ avec $\lambda_i=\lambda_j$, et $\mathscr{D}_0$ est une variété birationnelle à $\mathscr{D}_1$.

§ 2. Famille de courbes algébriques.

2.1. Les courbes algébriques V_x et leur équivalence. Soient m et m_i $(i=0, 1, \cdots, n+1, \infty)$ des entiers avec $0<m_i<m$ $(0\leqq i\leqq n+1)$, $m\nmid m_\infty$ et $m(n+1)=\sum_{i=0}^{\infty}m_i$, et supposons encore la condition (P): m et m_0 sont premiers entre eux. Pour tout point fixe x de $\mathscr{D}$ avec les coordonnées $x=(x_1, \cdots, x_n)$, définissons une courbe algébrique V_x sur l'espace des variables u et v par l'équation

$$v^m=\prod_{i=0}^{n+1}(u-x_i)^{m-m_i}.$$

On a obtenu ainsi une famille $\{V\}$ de courbes algébriques. Tout V_x a un automorphisme

$$\zeta_0:\ (u, v)\longmapsto(u, \zeta v),$$

où ζ est une m-ième racine primitive de 1.

DÉFINITION. Pour x et $x'\in\mathscr{D}$, on dira que V_x et $V_{x'}$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $f: V_x\to V_{x'}$ qui est permutable avec ζ_0.

Soit $P^{-1}=\begin{pmatrix} 0\ 1\ \cdots\ \infty \\ p_0 p_1 \cdots\ p_\infty \end{pmatrix}$ une permutation avec $m_i=m_{p_i}$ $(i=0, 1, \cdots, n+1, \infty)$. Si x et $x'\in\mathfrak{D}$ vérifient $x'=T_P(x)$, V_x et $V_{x'}$ sont équivalents. En effet, posons, avec $x_0=0$, $x_{n+1}=1$, et $x_\infty=\infty$,

$$u'=\frac{u-x_{p_0}}{x_{p_{n+1}}-x_{p_0}}\bigg/\frac{u-x_{p_\infty}}{x_{p_{n+1}}-x_{p_\infty}}$$

$$v'=\begin{cases} v(x_{p_{n+1}}-x_{p_0})^{-1-m_\infty/m} & (p_\infty=\infty) \\ v\dfrac{(u-x_{p_j})^{1-m_j/m}}{(u-x_{p_\infty})^{l+1}}\displaystyle\prod_{i=0}^{n+1}\left[\frac{(x_{p_{n+1}}-x_{p_\infty})(x_{p_0}-x_{p_\infty})}{(x_{p_{n+1}}-x_{p_0})(x_{p_i}-x_{p_\infty})}\right]^{1-m_i/m} & (p_\infty\neq\infty)\,, \end{cases}$$

où $p_j=\infty$ et l est l'entier tel que $0<lm-m_\infty<m$. Alors l'application $T_{V_x,P}$: $(u, v)\mapsto(u', v')$ donne une équivalence; ce qu'on voit, dans la formule $v'^m=\prod(u'-x_i')^{m-m_i}$, en remplaçant u', v' et x_i' par les fonctions correspondantes de u, v et x_i. Et de plus on a le

LEMME 2. *V_x et $V_{x'}$ étant donnés, ils sont équivalents si et seulement s'il existe une permutation P et une application $T_{V_x,P}$ comme plus haut.*

En effect, soit $f: u'=\sum_{i=0}^{m-1}s_i(u)v^i$, $v'=\sum_{i=0}^{m-1}t_i(u)v^i$ un isomorphisme donnant une équivalence entre V_x et $V_{x'}$, où s_i et t_i sont des fonctions rationnelles de u. f étant permutable avec ζ_0, on a

$$\sum s_i v^i=\sum s_i\zeta^i v^i \quad \text{et} \quad \zeta\sum t_i v^i=\sum t_i\zeta^i v^i$$

et, par suite, $u'=s_0(u)$ et $v'=t_1(u)v$. f étant un isomorphisme, $s_0(u)$ est une fraction linéaire. Dans la formule $v'^m=\prod(u'-x_i')^{m-m_i}$, en remplaçant u' par $s_0(u)=(au+b)/(cu+d)$ et v' par $t_1(u)v$, on voit l'existence de P, T_P et $T_{V_x,P}$.

2.2. Une représentation de l'anneau K_0 et les cycles de V_x. Soit $K_0=\boldsymbol{Z}[\zeta_0]$ un anneau qui consiste en tous les polynomes formels en ζ_0 à coefficients des entiers $\boldsymbol{Z}$ dont ζ_0 est le générateur du groupe cyclique d'ordre m et dont on désigne l'unité par 1. K_0 a une involution naturelle: $\zeta_0\mapsto\bar{\zeta}_0=\zeta_0^{-1}$, et, étant donné un nombre algébrique ζ avec $\zeta^m=1$, il existe un homomorphisme σ de K_0 sur $\boldsymbol{Z}[\zeta]: \zeta_0\mapsto\sigma(\zeta_0)=\zeta$. Un anneau R étant donné, désignons par $\mathcal{M}_{p,q}(R)$ l'ensemble de toutes les (p, q)-matrices aux éléments dans R, et surtout notons $\mathcal{M}_{p,p}(R)=\mathcal{M}_p(R)$. L'involutions et l'application σ peuvent se généraliser: pour $\Gamma=(\gamma_{ij})\in\mathcal{M}_p(K_0)$, on note $\Gamma^*={}^t\bar{\Gamma}=(\bar{\gamma}_{ji})$ et $\sigma(\Gamma)=(\sigma(\gamma_{ij}))$. Et disons qu'un $\Gamma\in\mathcal{M}_p(K_0)$ est (anti-)K_0-hermitien si on a $\Gamma^*=(-1)\Gamma$.

Tout élément e de K_0 est représenté par une matrice $\hat{e}$ avec la formule $\hat{\zeta}_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & 0 & & 0\ \ 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_m(\boldsymbol{Z})$. Et pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_{p,q}(K_0)$, il existe une matrice $\hat{M}\in\mathcal{M}_{pm,qm}(\boldsymbol{Z})$ y correspondante.

Pour fixer l'idée, nous nous donnons d'abord une courbe arbitraire $V=V_x$ où $x\in\mathcal{D}$, et envisageons un système des cycles de V :

$$c={}^t(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{2g}),$$

où g est le genre de V. Prenons le point a_0 sur V tel que $\pi_V(a_0)=0$ où π_V est la projection de V sur le plan de u. Comme m est premier avec m_0, a_0 se détermine uniquement. Et soit γ_i $(0<i\leqq n+1)$ une courbe continue sur V dont $\pi_V(\gamma_i)$ est un lacet par rapport à x_i partant de $u=0$.[3] Par la condition (P), γ_i est cycle sur V et tout cycle y est une combinaison linéaire des $\zeta_0^k(\gamma_i)$ $(1\leqq i\leqq n+1,$ $0\leqq k<m)$. Etant donné un élément e de K_0, e peut se regarder comme une transformation de $H_1(V,\boldsymbol{Z})$, ce qu'on voit en considérant $\hat{e}$. Donc, il existe une matrice $D_0\in\mathcal{M}_{2g,\,n+1}(K_0)$ telle qu'on ait

$$c=D_0\gamma \qquad (\text{avec } \gamma={}^t(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_{n+1})).$$

On peut ainsi regarder la courbe V munie du système de cycles γ et de la matrice D_0 comme une surface de Riemann marquée qu'on désigne par $\tilde{V}=\tilde{V}_Q$ où Q est un point de $\tilde{\mathcal{D}}$ avec $\pi(Q)=x$ et est choisi arbitrairement une fois pour toute.

Ensuite, considérons les intersections des cycles. Posons $\hat{\gamma}={}^t(\gamma_1,\ \zeta_0(\gamma_1),\ \cdots,$ $\zeta_0^{m-1}(\gamma_1),\ \gamma_2,\ \cdots,\ \zeta_0^{m-1}(\gamma_{n+1}))$ et $\hat{\Gamma}=\hat{\gamma}\cdot{}^t\hat{\gamma}$ où $\cdot$ signifie le nombre de points d'intersection de deux cycles. On a $\hat{\Gamma}\in\mathcal{M}_{m(n+1)}(\boldsymbol{Z})$ et ${}^t\hat{\Gamma}=-\hat{\Gamma}$. Puisque $\zeta_0^k(\gamma_i)\cdot\zeta_0^k(\gamma_j)=$ $\gamma_i\cdot\gamma_j$, on peut déterminer de la manière unique une matrice $\Gamma_0\in\mathcal{M}_{n+1}(K_0)$ telle que $\hat{\Gamma}_0=\hat{\Gamma}$. Γ_0 peut se regarder comme la matrice d'intersection de γ et est anti-K_0-hermitienne vu que $\hat{\Gamma}$ est anti-symétrique. Puisque, avec $\Gamma_0=(\gamma_{ij})$ et $\gamma_{ij}=\sum_{\beta=0}^{m-1}\gamma_{ij\beta}\zeta_0^\beta$, on a $\gamma_{ij\beta}=\gamma_i\cdot\zeta_0^\beta\gamma_j$, on peut explicitement déterminer γ_{ij} sous la condition (P) :

$$\gamma_{ij}=1+\zeta_0+\cdots+\zeta_0^{m-\alpha_j-1}+(\zeta_0^{\alpha_i}+\zeta_0^{\alpha_i+1}+\cdots+\zeta_0^{\alpha_i+m-\alpha_j-1}) \qquad (i<j)$$

et

$$\gamma_{ii}=\zeta_0+\zeta_0^2+\cdots+\zeta_0^{m-\alpha_i-1}-(\zeta_0^{\alpha_i+1}+\cdots+\zeta_0^{m-1})$$

où $0<\alpha_i\leqq m-1$ et $\alpha_i m_0\equiv m_i$ (mod. m).

Ensuite, on fait Q parcourir $\tilde{\mathcal{D}}$. A mesure, on obtient les systèmes c_Q des cycles canoniques sur $\tilde{V}_Q$ et les système γ_Q de cycles comme plus haut qui dépendent continument de Q ; et la matrice D_0 ne dépend pas de Q : on a $c_Q=D_0\gamma_Q$. On a ainsi obtenu une famille $\{\tilde{V}\}$ de surfaces de Riemann marquées. Evidemment la matrice d'intersection Γ_0 de γ_Q est aussi indépendante de Q.

2.3. Les différentielles, les périodes et la variété jacobiennes.[4] D'après Kuribayashi [2], toute différentielle abélienne de la première espèce de V_x est donné par

---

3) Exactement dire, γ dépend du chemin de l'intégrale définissant ω_i.

4) Dans la suite, "variété jacobienne" signifie "variété jacobienne canoniquement polarisée", et il en est ainsi de "transformation d'une variété jacobienne".

$$\left[\prod_{i=0}^{n+1}(u-x_i)^{k_i}\right]du/v^b$$

où $0<b\leqq m-1$, $0\leqq k_0, k_1, \cdots, k_{n+1}<m$, $(m-d_i)-b(m-m_i)+mk_i\geqq 0$ (d_i est le plus grand commun diviseur des m et m_i) et

$$k_\infty m+b(m+m_\infty)-(m+d_\infty)\geqq 0 \qquad (k_\infty=-(k_0+\cdots+k_{n+1}))\,,$$

et le genre g est donné par

$$g=\sum_{i=1}^{\infty}(m-d_i)/2-(m-1)\,.$$

Donc on peut choisir

$$d\omega^1=du/v \quad \text{et} \quad d\omega^j=\left[\prod_{\alpha=0}^{n+1}(u-x_\alpha)^{k_{j\alpha}}\right]du/v^{b_j} \ (2\leqq j\leqq g)$$

comme les bases de différentielles. La période $\gamma_i\cdot d\omega^j$ le long du cycle γ_i est donnée par

$$\gamma_i\cdot d\omega^j=\omega_i^j=\omega_i(\lambda^j, Q)\,,$$

où $\lambda^j=(\lambda_0^j, \cdots, \lambda_{n+1}^j)$ et $\lambda_\alpha^j=m_\alpha b_j/m+k_{j\alpha}$ $(0\leqq\alpha\leqq n+1)$. Les $\omega_i(\lambda^j, Q)$ ne sont pas toujours bien définis parce que quelques-uns des λ_α^j peuvent être entiers. Mais on peut le débrouiller en posant $\omega_\alpha^j=0$ lorsque λ_α^j l'est. En conséquence, la matrice de périodes relative à c et $d\omega^j$ est donnée par

$$\Omega=c\cdot(d\omega^1, \cdots, d\omega^g)=(D^1\omega^1, \cdots, D^g\omega^g)\in\mathcal{M}_{g,2g}(\boldsymbol{C})$$

où $D^j=\sigma^{b_j}(D_0)$ et $\sigma^\alpha: \mathcal{M}_{p,q}(K_0)\to\mathcal{M}_{p,q}(K)$ (avec $K=\boldsymbol{Z}[\zeta]$) est l'application de matrices définie par $\zeta_0\mapsto\zeta^\alpha$, et par suite on peut construire la variété jacobienne $J=J_x$ de $V=V_x$ et, un $Q\in\pi^{-1}(x)$ étant donné, le plongement canonique de V dans J. L'automorphisme ζ_0 de V produit celui de J défini, avec les coordonnés analytiques, par $D_0\mapsto\zeta_0 D_0$. Grâce à Shimura [7], l'équivalence des V s'exprime par celle des J, où on dira que J et J' sont équivalents si et seulement s'il existe un isomorphisme de J sur J' permutable avec ζ_0.

LEMME 3. *Si le genre g est >1, les courbes V_x et $V_{x'}$ sont équivalentes si et seulement s'il en est de même des variétés jacobiennes J_x et $J_{x'}$.*

En effet, la démonstration se fait, d'après Shimura, en appliquant le théorème de Torelli: le plongement de V_Q dans J_Q est unique à déplacement et à $\pm$ près.

2.4. La forme hermitienne A et la forme anti-K_0-hermitienne Γ_0. Maintenant dans les formules explicites de R_{ij} et T_{ij}, remplaçons μ_i par $\zeta_0^{\alpha_i}$ $(0\leqq\alpha_i<m$, $m_i\equiv m_0\alpha_i$ (mod. m)). On a les nouvelles matrices R_{0ij} et $T_{0ij}\in\mathcal{M}_{n+1}(K_0)$ et des nouveaux groupes G_0 et G_0' engendrés par eux. G_0 et G_0' sont bien définis puisqu'on a $\det(R_{0ij})=\zeta_0^{\alpha_i+\alpha_j}$ et $\det(T_{0ij})=\zeta_0^{\alpha_i}$. Dans [10], on a calculé les matrices R_{ij} et T_{ij} en étudiant les changements des cycles et de la fonction intégrée. Parallèlement on peut voir que, pour tout $T_0\in G_0$ et $Q\in\tilde{\mathfrak{D}}$, il existe une per-

mutation P et un $Q'\in\tilde{\mathfrak{D}}$ avec $T_p(\pi(Q))=\pi(Q')$ tel qu'on ait, avec un entier q convenable,

$$\gamma_{Q'}=\zeta_0^q T_0\gamma_Q .$$

Donc on a

$$T_0^*\Gamma_0 T_0=\Gamma_0 ,$$

parce que le changement des cycles causé par T_0 rend invariant les nombres de points d'intersection. Et il est évident, d'après § 1, que $\sigma^{b_j}(T_0)=T^j$ exprime le changement des ω_i^j, et que, si aucun de λ_i^j $(0\leqq i\leqq\infty)$ n'est entier, il existe une matrice hermitienne A^j telle que $(T^j)^*A^jT^j=A^j$ pour tout $T^j\in G_{an}^j$ où $G_{an}^j=\sigma^{b_j}(G_0)$.

LEMME 4. *Si α_j et m_0 sont premiers entre eux, une constante purement imaginaire a^j existant, on a*

$$\sigma^{b_j}(\Gamma_0)=a^jA^j$$

et de plus, si $b_j+b_k=m$,

$${}^t\omega^k A^j\omega^j=0 .$$

En effet la première formule provient de ce que A^j est unique à une constante réelle près, que $\sigma^{b_j}(\Gamma_0)$ est un conjugué de $\sigma^1(\Gamma_0)$ et que, comme $\gamma_{1b_j}=1-\zeta^{m-\alpha_j}$, $\sigma^1(\Gamma_0)\neq 0$. D'ailleurs grâce à Riemann, on a

$${}^t\omega^k({}^tD_1^kD_2^j-{}^tD_2^kD_1^j)\omega^j=0 \quad (\text{avec } {}^tD^j=({}^tD_1^j\ {}^tD_2^j),\ D_i^j\in\mathcal{M}_g(K)\ (i=1,\ 2))$$

et

$$D_{12}^j=-\sqrt{-1}({}^t\bar{D}_1^jD_2^j-{}^t\bar{D}_2^jD_1^j)>0 .$$

Or comme on le voit facilement par la démonstration de l'inégalité de Riemann, on a $(T^j)^*D_{12}^jT^j=D_{12}^j$ pour $T_0\in G_0$, et par suite D_{12}^j est égal à A^j à une constante réelle multiplicative près. Comme $D^j=\bar{D}^k$, on a la deuxième formule.

§ 3. Groupes arithmétiquement définis.

3.1. Les exemples de groupes arithmétiquement définis.

Avant d'exposer l'enoncé exacte de la Théorème, présentons et expliquons une table. Chaque numéro de la Table est muni d'une famille de courbes algébriques à n paramètres

$$(v_0/v)^m=\prod_{i=0}^{n+1}(u-x_i)^{m_i} \quad (\text{avec } x_0=0,\ x_{n+1}=1,\ v_0=\prod_{i=0}^{n+1}(u-x_i)) ,$$

le genre g et des $g-1$ différentielles abéliennes de première espèce autre que du/v de courbes génériques et une matrice hermitienne A qui est égale à A' de 1.2 à une constante réelle multiplicative près (avec les notations ci-dessous). Et on pose $\zeta=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,m_0/m)$ et $K=\boldsymbol{Z}[\zeta]$ (le (5) est exceptionnel: $\zeta=\exp(5\pi\sqrt{-1}/3)$). On a $A\in GL(n+1,\ K)$ (le (1) est exceptionnel: $A\in$

$GL(2, \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}])$). Dans cette situation, d'une part, on définit un groupe par

$$G_{ar}=\{T\in GL(n+1,\ K)\mid T^{*}AT=A\}.$$

D'autre part, en posant $\lambda_i=m_i/m$, $\lambda_\infty=n+1-\sum_{i=0}^{n+1}\lambda_i$ et $\mu_i=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\lambda_i)$, on définit le groupe G_{an} de matrices, qui est une extention finie du groupe de monodromie du système (F_1) hypergéométrique et qui est engendré par R_{ij} $(0\leqq i<j\leqq n+1)$ et T_{ij} $(0\leqq i<j\leqq\infty,\ \lambda_i=\lambda_j)$ de 1.2. Et enfin notons $G_{ar,pr}$ (resp. $G_{an,pr}$) le groupe de transformations linéaires projectives donné par G_{ar} (resp. G_{an}).

	n	courbe algébrique	genre	différentielles de la première espèce autre que du/v	A
(1)	1	$(v_0/v)^2=v_0$	1		$\sqrt{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$
(2)	1	$(v_0/v)^3=v_0(u-1)$	2	$u(u-1)du/v^2$	$\begin{pmatrix}0 & \zeta^2\\ \zeta & -1\end{pmatrix}$
(3)	1	$(v_0/v)^4$ $=v_0(u-x_1)^2(u-1)$	2	$u^2(u-1)du/v^3$	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
(4)	1	$(v_0/v)^5=v_0^3$	4	v_0du/v^4 ; du/v^2, $(u-x_1)du/v^2$	$\begin{pmatrix}1 & \zeta+\zeta^3\\ \zeta^2+\zeta^4 & 1\end{pmatrix}$
(5)	1	$(v_0/v)^6=v_0^2u(u-x_1)$	2	$v_0u(u-x_1)du/v^5$	$\begin{pmatrix}1 & \zeta^2\\ \zeta^2 & 0\end{pmatrix}$
(6)	1	$(v_0/v)^7=v_0^4$	6	v_0^2du/v^6 ; du/v^2, $(u-x_1)du/v^2$; v_0du/v^4, $(u-x_1)v_0du/v^4$	$\begin{pmatrix}1+\zeta^3+\zeta^4 & \zeta+\zeta^5\\ \zeta^2+\zeta^6 & 1+\zeta^3+\zeta^4\end{pmatrix}$
(7)	2	$(v_0/v)^3=v_0^2$	3	du/v^2, $(u-x_1)du/v^2$	$-\begin{pmatrix}0 & \zeta^2 & 1\\ \zeta & 0 & \zeta^2\\ 1 & \zeta & 0\end{pmatrix}$
(8)	2	$(v_0/v)^4=v_0^2u(u-x_1)$	3	$(u-x_2)(u-1)du/v^3$, $(u-x_1)(u-x_2)(u-1)du/v^3$	$-\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & \zeta^3\\ 1 & \zeta & 0\end{pmatrix}$
(9)	2	$(v_0/v)^5=v_0^3$	6	v_0du/v^4, $(u-x_1)v_0du/v^4$; du/v^2, $(u-x_1)du/v^2$, $(u-x_1)(u-x_2)du/v^2$	$-\begin{pmatrix}2+\zeta+\zeta^4 & \zeta+\zeta^2 & \zeta^2+\zeta^3\\ \zeta^3+\zeta^4 & 2+\zeta+\zeta^4 & \zeta+\zeta^2\\ \zeta^2+\zeta^3 & \zeta^3+\zeta^4 & 2+\zeta+\zeta^4\end{pmatrix}$
(10)	3	$(v_0/v)^3=v_0^2$	4	du/v^2, $(u-x_1)du/v^2$, $(u-x_1)(u-x_2)du/v^2$	$\begin{pmatrix}-1 & 1 & \zeta & \zeta^2\\ 1 & -1 & 1 & \zeta\\ \zeta^2 & 1 & -1 & 1\\ \zeta & \zeta^2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

THÉORÈME. *Sous les notations plus haut et pour les dix numéros de la Table, on a*

$$G_{ar,pr}=G_{an,pr}\,.$$

En effet, puisque la relation $G_{an}\subset G_{ar}$ est évident vu les générateurs de G_{an} et la matrice A', on a besoin que de démontrer $G_{ar,pr}\subset G_{an,pr}$; ce qu'on effectura dans les sections suivantes.

3.2. Les démonstrations des cas sauf (1) et (5).

La condition (P) étant remplie et g étant >1, tous les résultats jusqu'ici sont vrais. Prenons une matrice $T\in G_{ar}$. D'une part, comme $T^*AT=A$, T_{pr} est un automorphisme du domaine $B=\{w \mid w^*Aw=A\}$ sur l'espace projectif, et par suite ii existe d'après 1.3, de deux points Q et $Q'\in\mathscr{D}$ tels que

$$\omega(\lambda,\ Q')=T_{pr}\omega(\lambda,\ Q)\,,$$

parce que $B\setminus\omega(\tilde{\mathscr{D}})$ est un ensemble analytique. D'autre part, il existe un $T_0\in\mathscr{M}_{n+1}(K_0)$ tel que $\sigma^1(T_0)=T^1=T$ (pas nécessairement unique). Dans notre situation on a $\sigma^j(\Gamma_0)=0$ lorsque m et j ne sont pas premiers entre eux vu l'expression explicite de Γ_0, et, $\sigma^j(\Gamma_0)$ est égale à un conjugué de A à une constante réelle près par le Lemme 4. Donc on a toujours $\sigma^j(T_0^*)\sigma^j(\Gamma_0)\sigma^j(T_0)=\sigma^j(\Gamma_0)$ et en conséquence,

$$T_0^*\Gamma_0T_0=\Gamma_0\,,$$

vu le déterminant de Vandermonde. Désignons J, J' et respectivement J_T la variété jacobienne dont la matrice de périodes est $\Omega=(D^1\omega^1,\ D^2\omega^2,\ \cdots,\ D^g\omega^g)$, $\Omega'=(D^1\omega'^1,\ \cdots,\ D^g\omega'^g)$ et respectivement $\Omega_T=(D^1T^1\omega^1,\ \cdots,\ D^gT^g\omega^g)$ où $\omega^i=\omega^i(\lambda^i,\ Q)$, $\omega'^i=\omega^i(\lambda^i,\ Q')$ et $T^j=\sigma^{b_j}(T_0)$.

Or T_0 peut se regarder comme une transformation des cycles: $c=D_0\gamma\mapsto c_T=D_0T_0\gamma$, et il existe $M_T\in\mathscr{M}_{2g}(\boldsymbol{Z})$ tel qu'on ait

$$c_T=M_Tc\,.$$

La formule $T_0^*\Gamma_0T_0=\Gamma_0$ signifiant que T_0 rend invariant les nombres de points d'intersection, M_T est simplectique. Conséquemment J et J_T sont équivalents vu la commutativité de ζ_0I et T_0. Cela établi, supposons que J' et J_T sont équivalents. Alors J et J' le sont aussi et par suite V_x et V'_x sont équivalents selon Lemme 3, où $x=\pi(Q)$ et $x'=\pi(Q')$. Donc par Lemme 2 et 1, on a $T_{pr}\in G_{an,pr}$. En conséquence, notre problème réduit à l'équivalence de J' et J_T, à savoir, au

LEMME 5. *Lorsque les différentielles de la première espèce $d\omega^1=d\omega=du/v$ et $d\omega^j=f_j(u)du/v^{b_j}$ $(2\leqq j\leqq g)$ (f_j étant des polynomes en u) vérifient que $g/(n+1)=q+1$ est entier, qu'on a $b_{s_p}=\cdots=b_{s_p+n}$ $(p=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$ où $s_p=(n+1)p+1$ et que $b_2=\cdots=b_{n+1}=m-1$, J' et J_T sont équivalents.*

En effet, comme on le verra facilement, il ne faut que le démontrer au cas où $q=1$. D'une part, on peut supposer, sans restreindre la généralité,

$$d\omega^{s+k}=(u-x_1)\cdots(u-x_k)d\omega^s \quad (k=1, 2, \cdots, n,\ s=s_1=n+2).$$

Alors on a

$$\omega_i^{s+k}=a_0\partial_{k+1}\cdots\partial_n\omega_i^{s+n}$$

où a_0 est une constante non nulle pour x fixé. ω_i^j vérifiant (F_1) avec $\lambda=\lambda^j$, on peut supposer, par une transformation linéaire,

$$\omega_i^{s+k-1}=\partial_k\omega_i^{s+n}.$$

Parce que le déterminant wronskien ne s'annule jammais sur $\mathcal{D}$ ([8]), on a, avec $E'=(\omega'^s, \cdots, \omega'^{s+n})$ et $E_T=(T^s\omega^s, \cdots, T^{s+n}\omega^{s+n})$,

$$(\det E_T)(\det E')\neq 0.$$

D'autre part, on a, d'après Lemme 4,

$${}^t(T^j\omega^j)(AT\omega)={}^t\omega^j\,{}^tT^jAT\omega={}^t\omega^jA\omega=0 \quad (2\leqq j\leqq n+1)$$

et, par le prolongement analytique,

$${}^t\omega'^jA\omega'={}^t\omega'^j(AT\omega)=0.$$

En peu de mot, tous les $T^j\omega^j$ et ω'^j $(2\leqq j\leqq n+1)$ sont orthogonaux au vecteur $\overline{AT\omega}$ par rapport à la norme euclidienne. Encore par les wronskiens, on voit que les $T^j\omega^j$ et respectivement les ω'^j sont linéairement indépendants; donc il existe un $E_1\in GL(n, \boldsymbol{C})$ tel que

$$(\omega'^2, \cdots, \omega'^{n+1})=(T^2\omega^2, \cdots, T^{n+1}\omega^{n+1})E_1.$$

Enfin la transformation de J_T sur J':

$$y_1'=y_1, \quad (y_2', \cdots, y_{n+1}')=(y_2, \cdots, y_{n+1})E_1,$$
$$(y_s', \cdots, y_{s+n}')=(y_s, \cdots, y_{s+n})E_T^{-1}E'$$

où y_j (resp. y_j') sont les coordonnées analytiques de J_T (resp. J'), donne l'équivalence, ce qui achève la démonstration de ce lemme et conséquemment de notre théorème sauf les cas (1) et (5).

3.3. Les démonstrations pour (1) et (5). Lemme 3 n'est pas généralement vrai lorsque le genre est un, mais pour le cas (1), notre théorème est bien connu. La seul difficulté pour (5) est ce que m et m_0 ne sont plus premiers entre eux et en conséquence la courbe γ_2 définie comme dans 2.2 n'est plus un cycle. Donc nous n'avons qu'à définir les cycles γ_1' et γ_2' convenablement.

Pour cela, il ne faut que poser $\gamma_1'=\gamma_1$, que définir γ_2' par un double lacet et que poser

$${}^tD_0'=\begin{pmatrix}1 & \zeta_0^2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \zeta_0\end{pmatrix}.$$

Alors, en remplaçant Γ_0 par

$$\Gamma_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1-\zeta_0^2-\zeta_0^3+\zeta_0^5 \\ -1-\zeta_0+\zeta_0^3+\zeta_0^4 & -\zeta_0-\zeta_0^2+\zeta_0^4+\zeta_0^5 \end{pmatrix},$$

A par $A'=E^{-1}AE^{-1}$ avec $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ω par $E\omega$, $T\in G_{an}$ par ETE^{-1} et ζ par $\zeta'=\exp(5\pi\sqrt{-1}/3)$, on peut suivre tous les procédés des démonstrations plus haut, ce qui achève la démonstration.

D'ailleurs, il sera facile de voir la relation entre les exemples de Shimura et les nôtres, parce que les deux proviennent des mêmes familles de courbes algébriques.

Bibliographies

[1] P. Deligne et G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, Preprint.

[2] A. Kuribayashi, Périodes de surfaces de Riemann et équations différentielles, (en japonais) Sém. Math. Univ. Métropolitaine de Tokyo, 1975.

[3] G. D. Mostow, Existence of nonarithmetic monodromy groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **78** (1981), 5948-5950.

[4] E. Picard, Sur les fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires, Acta Math., **2** (1883), 114-126.

[5] ———, Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables, Ann. Sci. École Norm. Sup. III, **2** (1885), 357-384.

[6] H. A. Schwarz, Ueber diejenigen Falle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Funktion algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt, J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle), **54** (1873), 292-335.

[7] G. Shimura, On purely transcendental fields of automorphic functions of several variables, Osaka J. Math., **1** (1964), 1-14.

[8] T. Terada, Problème de Riemann et fonctions automorphes provenant des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, J. Math. Kyoto Univ., **13** (1973), 557-578.

[9] ———, Quelques propriétés géométriques de domaine de F_1 et le groupe de tresses colorées, Publ. RIMS Kyoto Univ., **17** (1981), 1-17.

[10] ———, Fonctions hypergéométriques F_1 et fonctions automorphes I, J. Math. Soc. Japan, **35** (1983), 452-475.

Toshiaki TERADA
Université de la Science Médicale de Shiga
Seta, Otsu 520-21
Japon