ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 25, Number 3, Fall 1981

NORMALITA' ASINTOTICA DI CATENE MARKOVIANE NON ϕ-MIXING[1]

DI

RODOLFO DE DOMINICIS

Introduzione

Nel 1948 Sapogov in [1] dimostrò un teorema del limite centrale per successioni di variabili aleatorie dipendenti nel senso di Bernstein, utilizzando alcune stime di errore da lui stesso introdotte in [2].

Successivamente nel 1950 Sapogov in [3] generalizzò i risultati ottenuti e li utilizzò per studiare la validità della legge del logaritmo iterato per catene di Markov, sotto varie ipotesi, generalmente più deboli di quella di Doeblin.

L'idea di dimostrare teoremi limiti per catene markoviane non soddisfacenti alla classica condizione di Doeblin è stata ripresa da De Dominicis in [4].

In questo lavoro si dimostra un teorema del limite centrale per una vasta famiglia di catene markoviane, adoperando le stime di errore introdotte da Sapogov in [1]. Il risultato principale del lavoro è interessante innanzitutto perchè l'introduzione delle stime di Sapogov aumenta la velocità di convergenza alla gaussiana, ma anche perchè non si fà alcuna ipotesi di "ϕ-mixing" nel senso di Billingsley [5] sulla catena markoviana stessa. E' quest ultimo punto che differenzia sostanzialmente il risultato qui ottenuto da taluni precedenti (vedi ad es. Nagaev [6] e Dobrusin [7]).

Risultati similari in ipotesi diverse sono stati recentemente introdotti da Athreya e Ney [8].

1. Preliminari

Sia Q un nucleo markoviano sullo spazio misurabile (K, Γ). Consideriamo lo spazio Ω, munito della σ-algebra prodotto $\mathscr{F}$ e su di esso il processo canonico $(X_n)_{n \geq 0}$.

Per ogni misura di probabilità su (K, Γ), indichiamo con P_x l'unica legge su $(\Omega, \mathscr{F})$ rispetto alla quale $(X_n)_{n \geq 0}$ sia una catena di Markov ammettente Q come nucleo di transizione e μ come legge iniziale, concentrata in $x \in K$.

Indichiamo inoltre con $\mathbf{E}_x$ l'operatore di speranza matematica corrispondente a P_x.

Sia ora H una sottoalgebra dell'algebra B di tutte le funzioni f limitate e misurabili su (K, Γ) e sia H munita di norma che ne faccia un'algebra normata;

Received September 18, 1979.

[1] Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Informatica Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche Italiano.

denoteremo questa norma con $\| \;\; \|$ per distinguerla dalla norma uniforme che indicheremo semplicemente con $| \;\; |$.

L'operatore di transizione $T\colon B \to B$, definito come

$$Tf(\cdot) = \int_K f(x)Q(\cdot, dx)$$

è un operatore lineare e limitato ($|T| = 1$).

Inoltre vale la seguente relazione

$$T^n f(\cdot) = \int_K f(x)Q^n(\cdot, dx)$$

dove $Q^n(\cdot\,;\,\cdot)$ è la convoluzione $n - ma$ del nucleo markoviano Q.

Per il seguito supporremo che:

(A) H sia stabile per l'operatore T, è cioè che

$$Tf(\cdot) \in H, \quad \forall f \in H, \tag{1}$$

(B)
$$\|T^n f(\cdot)\| \le k_f, \quad \forall f \in H \text{ e } n \ge 0, \tag{2}$$

dove k_f è una costante positiva che dipende da f.

(C) Esistano una legge di probabilità Q^∞ su (K, Γ) ed una successione $(\varepsilon_n)_{n\ge 0}$ di numeri reali positivi soddisfacente alla condizione $\exists \alpha > 0$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2+\alpha}\varepsilon_n < \infty, \tag{3}$$

$$|T^n f - T^\infty f| \le \varepsilon_n \cdot \|f\|, \tag{4}$$

dove $T^\infty f = \int_K f(x)Q^\infty(dx)$.

Sia inoltre $f_n = f \circ X_n$, $\forall n \ge 0$ e $\forall f \in H$.

Se P_Q^∞ è la probabilità su $(\Omega, \mathscr{F})$, corrispondente alla distribuzione iniziale Q^∞ ed al nucleo di transizione $Q(\cdot, \cdot)$, allora $\mathbf{E}_\infty$ è la speranza matematica, calcolata in base alla P_Q^∞; possiamo quindi porre

$$\sigma^2 = \mathbf{E}_\infty(f_1^2) - (\mathbf{E}_\infty(f_1))^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty}\{\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{i+1}) - \mathbf{E}_\infty(f_1)^2\} \tag{5}$$

Nella sezione seguente faremo vedere che, assegnata una $f \in B$, se

$$|T^n g - T^\infty g| \le \varepsilon_n, \quad \forall g \in \{f, f\,T^n f, n \ge 0\},$$

dove $(\varepsilon_n)_{n\ge 0}$ è una successione che soddisfa alla (3) e $T^\circ f = f$, vale il teorema del limite centrale per una successione $(f_n)_{n\ge 0} = (f \circ X_n)$ se $\sigma^2 \ne 0$.

2. Teorema fondamentale

TEOREMA 1. *Nell'ipotesi che siano verificate le* (1), (2), (3), (4) *allora la serie in* (5) *è assolutamente convergente e* $\sigma^2 \ge 0$*; se in più* $\sigma^2 \ne 0$, *allora* $\exists C > 0$ *e*

$v > 0$ *tali che*

$$\left| P_x\left(\frac{\sum_{k=1}^n f_k - n\mathbf{E}_\infty(f_1)}{\sigma \cdot n^{1/2}} < a\right) - (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right|$$
$$\leq Cn^{-v}, \quad \forall a \in R \text{ e } \forall x \in K. \quad (6)$$

Per la dimostrazione del Teorema 1 non ci serviremo del classico metodo di Bernstein (cfr. ad es. Loève [10]), ma della stima dell' errore contenuta nel seguente teorema.

TEOREMA 2. *Sia* $(\rho_n)_{n\geq 0}$ *una successione di variabili aleatorie per cui esista il momento* $\mathbf{E}|\rho_n|^3$. *Se si effettuano le seguenti posizioni,*

$$B_n = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \rho_i\right)^2; \ \alpha_i = \text{ess sup}\|\mathbf{E}(\rho_i|\rho_{i-1}, \ldots, \rho_1) - \mathbf{E}(\rho_i)|,$$

$$\beta_i = \text{ess sup}|\mathbf{E}(\rho_i^2|\rho_{i-1}, \ldots, \rho_1) - \mathbf{E}(\rho_i^2)|,$$

$$\gamma_i = \mathbf{E}(|\rho_i|)^3 < \infty,$$

e si suppone che

$$\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{B_n^{1/2}} + \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{B_n} + \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i}{B_n^{3/2}} = \frac{1}{S_n} \quad (7)$$

allora esiste una costante positiva C_1, *tale che*

$$\left| P_x\left(\frac{\sum_{i=1}^n \rho_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(\rho_i)}{B_n^{1/2}} \leq a\right) - (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right|$$
$$\leq \frac{C_1}{S_n^{1/8}}, \quad \forall a \in R. \quad (8)$$

Dimostrazione. Consultare Sapogov [1] e [3].
Per la dimostrazione del Teorema 1 premettiamo i seguenti lemmi.

LEMMA 1. *Se sono verificate le* (1), (3), (4), *allora*

$$T^\infty T^k f = T^\infty f \quad (9)$$

per ogni $f \in H$ *e* $k \geq 0$.

Dimostrazione. Dalla (3) si ha $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.
Dalle (1) e (4) viene che

$$|T^\infty f - T^\infty T^k f| \leq |T^\infty f - T^{n+k} f| + |T^n(T^k f) - T^\infty(T^k f)|$$
$$\leq \varepsilon_{n+k} \cdot \|f\| + \varepsilon_n \cdot \|T^k f\|, \quad \forall n \geq 0.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene la (9).

Per il seguito, senza perdita evidente di generalità, supporremo che

$$\mathbf{E}_\infty(f_1) = 0. \tag{10}$$

Con la (10) le (4) e (5) si semplificano nelle seguenti:

$$|T^n f| \leq \varepsilon_n \cdot \|f\| \tag{4'}$$

e

$$\sigma^2 = \mathbf{E}_\infty(f_1^2) + 2\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{i+1}) \tag{5'}$$

Siano $S_\delta = \sum_{n=1}^{\infty} n^\delta \varepsilon_n$ e $\mathscr{R}_{\delta,m} = \sum_{n=m}^{\infty} n^\delta \varepsilon_n$, dalla (3) risulta che

$$S_\delta < \infty, \quad \lim_{m \to \infty} \mathscr{R}_{\delta,m} = 0, \quad \forall \delta \in [0, 2+\alpha] \tag{11}$$

LEMMA 2. *Se valgono* (1), (4'), (3) *e* (10), *la serie nella* (5') *è assolutamente convergente e* $\sigma^2 \geq 0$.

Dimostrazione. A norma del Lemma 1, si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\infty(f_i f_j) &= T^\infty T^i(f T^{j-i+1} f)\\ &= T^\infty(f T^{j-1+i} f)\\ &= \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{j-i+1}), \quad \forall i, j \geq 0,\ i < j.\end{aligned}$$

Ed ancora

$$\begin{aligned}|\mathbf{E}_x(f_i f_j) - \mathbf{E}_\infty(f_i f_j)| &= \left|\int_K f(x')Q^i(x, dx') \int_K f(x'')Q^{j-i}(x', dx'')\right.\\ &\qquad \left. - \int_K f(x')Q^\infty(dx') \int_K f(x'')Q^{j-1}(x, dx'')\right|\\ &= \left|\int_K \left[f(x)\int_K f(x'')Q^{j-i}(x', dx'')\right][Q^i(x, dx')\right.\\ &\qquad \left. - Q^\infty(dx')]\right|\\ &\leq 2|f| \sup_{x' \in K}\left|\int_K f(x'')Q^{j-i}(x', dx'')\right|\\ &\leq 2|f| \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_{j-i}\end{aligned} \tag{12}$$

Per l'ultima disuguaglianza cfr. [11], pagina 40.

D'atra parte per $i < j$, si ha

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{E}_x(f_i f_j)| &= |\mathbf{E}_x(f_i)\mathbf{E}_x(f_j | X_i)| \\
&\leq |f| \cdot \sup_{x' \in K} \left| \int_K f(x'') Q^{j-i}(x', dx'') \right| \qquad (13) \\
&\leq |f| \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_{j-i}
\end{aligned}
$$

Dalle (12) e (13) per $i = 1$ e $j = h + 1$, si ha

$$
|\mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1})| \leq \int_K Q^\infty(dx) |f(x)| \, |(T^h f)(x)| \leq |f| \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_h \qquad (14)
$$

Dal fatto che $S_\delta < \infty$, per $\delta = 0$, viene che la serie (5') è assolutamente convergente.

Non è difficile verificare che $\sigma^2 \geq 0$, infatti si ha che

$$
\mathbf{E}_\infty(f_k)^2 = T^\infty T^k f^2 = T^\infty f^2 = \mathbf{E}_\infty(f_1^2),
$$

$$
\mathbf{E}_\infty(f_i f_j) = T^\infty T^i (f T^{j-1+i} f) = T^\infty (f T^{j-1+i} f) = \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{j-i+1}).
$$

Per cui

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\infty \left(\sum_{j=1}^n f_j \right)^2 &= n \cdot \mathbf{E}_\infty(f_1^2) + 2 \sum_{h=1}^{n-1} (n - m) \cdot \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1}) \\
&= n \cdot \left(\sigma^2 - 2 \sum_{h \geq n} \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1}) \right) - 2 \sum_{h=1}^{n-1} (h \cdot \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{h+1})) n^{-1} \\
&= n \cdot (\sigma^2 + w_n),
\end{aligned}
$$

dove

$$
|w_n| \leq 6 \cdot |f| \cdot \|f\| \cdot \mathscr{R}_{0,n} + (2/n) \cdot |f| \cdot \|f\| \cdot S_1 = O(1).
$$

Risultano dunque dimostrati il presente lemma e la prime parte del Teorema 1.

LEMMA 3. *Nell'ipotesi che valgano le* (1), (2), (3), (4), (10), *si verifica che*

$$
|\mathbf{E}_x(f_j f_t) - \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{t-j+1})| \leq \min \{k_f \cdot \|f\| \cdot \varepsilon_j ; 2|f| \cdot \|f\| \varepsilon_{t-j}. \qquad (15)
$$

Dimostrazione. Per la (1) e dato che H è un'algebra, si ha

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{E}_x(f_j f_t) - \mathbf{E}_\infty(f_1 f_{t-j+1})| &= \left| \int_K f(x') Q^j(x, dx') \int_K f(x'') Q^{t-j}(x', dx'') \right. \\
&\qquad \left. - \int_K f(x') Q(dx') \int_K f(x'') Q^{t-j}(x', dx'') \right| \\
&= \left| \int_K \hat{f}(x') Q^j(x, dx') - \int_K \hat{f}(x') Q^\infty(dx') \right| \\
&\leq \|\hat{f}\| \varepsilon_j,
\end{aligned}
$$

dove $$\hat{f}(x') = f(x') \int_K f(x'')Q^{t-j+1}(x', dx'') \in H.$$

Dalla (2) deriva poi che

$$\|\hat{f}\| \leq \|f\| \cdot \|T^{t-j+1}f\| \leq k_f \cdot \|f\|.$$

Di qui e dal Lemma 2 risulta immediatamente la (15).

Considerazione 1. Dalla (15) non difficilmente si ricava che

$$|(1/n) \cdot D_x^2(Y_n) - \sigma^2| \leq r_n \tag{16}$$

dove $Y_n = \sum_{i=1}^n f_i$ e $r_n = O(1)$.
D'altra parte dal fatto che

$$(1/n)|\mathbf{E}_x(Y_n)|^2 \leq (1/n)\|f\|S_0^2 \tag{17}$$

segue dalla (16) la seguente

$$|(1/n) \cdot \mathbf{E}_x(Y_n^2) - \sigma^2| \leq s_n \tag{18}$$

dove $s_n = O(1)$.
Siamo ora in grado di dimostrare la seconda parte del Teorema 1.

Dimostrazione del Teorema 1. Se poniamo, per ogni $n \geq 0$ fissato,

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{n_1} f_{(i-1)(n_1+n_2)+j}, \quad 1 \leq i \leq l_n,$$

$$g_i = \sum_{j=1}^{n_2} f_{in_1+(i-1)n_2+j}, \quad 1 \leq i \leq l_n - 1,$$

$$g_{l_n} = f_{l(n_1)+(l_n-1)n_2+1} + \cdots, + f_n,$$

$$\sum_{i=1}^{l_n} \rho_i = Y'_n, \qquad \sum_{i=1}^{l_n} g_i = Y''_n,$$

dove $n_1 = [n^\beta]$, $n_2 = [n^\gamma]$, $l_n = [n \cdot (n_1 + n_2)^{-1}]$, $\gamma = (2+\alpha)^{-1}$, $\beta \in \{(2+\alpha)^{-1}, \frac{1}{2}\}$, si ha $l_n > n_1 > n_2$ e $\lim_{n\to\infty} n \cdot (n^{\beta-1}) = 1$.
Evidentemente sarà $Y_n = Y'_n + Y''_n$. Vogliamo verificare che la successione $(\rho_n)_{n\geq 0}$ soddisfa le condizioni del teorema 2.
Si ha

$$B'_n = \mathbf{E}_x\left(\sum_{i=1}^{l_n} \rho_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_x(\rho_i^2) + 2\sum_{i=1}^{l_n-1} \mathbf{E}_x \left(\rho_i \sum_{j=i+1}^{l_n} \rho_j\right).$$

Per la condizione di markovianità, calcoli simili a quelli che conducono alla (13), consentono di affermare che

$$|\mathbf{E}_x(\rho_i\rho_j)| \leq n_1 \cdot |f|^2 \cdot \|f\| + \sum_{t=1}^{n_1} \varepsilon_{(j-1)(n_1+n_2)+t-in_1-(i-1)n_2}.$$

Risulta allora che

$$\left|\sum_{i=1}^{l_n-1} \mathbf{E}_x\left(\rho_i \sum_{j=l+1}^{l_n} \rho_j\right)\right| \leq l_n \cdot n_1 \cdot |f|^2 \cdot \|f\| \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1} \to 0,$$

dato che

$$l_n \cdot n_1 \cdot \mathscr{R}_{0,n_2} = l_n \cdot n_1 \cdot n_2^{-(2+\alpha)} \cdot n_2^{(2+\alpha)} \cdot \mathscr{R}_{0,n_2},$$

$$n_2^{2+\alpha} \cdot \mathscr{R}_{0,n_2} \leq \mathscr{R}_{2+\alpha,n_2} \to 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} l_n \cdot n_1/n_2^{2+\alpha} = 1.$$

E' evidente allora che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} B_n'/n &= \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1_n}^{l_n} \mathbf{E}_x(\rho_i^2) \\ &= \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=n}^{l_n} n_1(\sigma^2 + s_{n_1}') \qquad (19) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

conformemente alla (18).

D'altra parte

$$\alpha_i = \operatorname{esssup} \left|\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(\rho_i - \mathbf{E}_x(\rho_i) \,|\, X_1, \ldots, X_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) \,|\, \rho_1, \ldots, \rho_{i-1})\right|,.$$

Ma, posto $\hat{k} = (i-1)(n_1+n_2)+1$ e $k' = in_1 + (i-1)n_2$,

$$|\mathbf{E}_x(\rho_i - \mathbf{E}_x(\rho_i) \,|\, X_{(i-1)n_1+(i-2)n_2})| \leq \sum_{j=\hat{k}}^{k'} |\mathbf{E}_x(f_j \,|\, X_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f_j)|$$

e

$$|\mathbf{E}_x(f_j \,|\, X_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f_j| \leq \|f\|(\varepsilon_{j-(i-1)n_1-(i-2)n_2} + \varepsilon_j)$$

per cui, essendo

$$\sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i \leq l_n \cdot \|f\| \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1},$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i \leq \|f\| \cdot \lim_{n\to\infty} l_n \cdot n_2^{-(2+\alpha)} \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1} = 0. \qquad (20)$$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \beta_i &= \operatorname{esssup} |\mathbf{E}_x(\mathbf{E}_x(\rho_i^2 - \mathbf{E}_x \mathbf{M} \rho_i^2) \,|\, X_{(t-1)n_1+(i-2)n_2}, \ldots, X_1)| \\ &\quad \cdot \rho_{i-1}, \ldots, \rho_1) \,|\, \mathbf{E}_x(\rho_i^2 - \mathbf{E}_x(\rho_i^2) \,|\, X_{(i-1)n_1+n_2(i-2))}| \\ &\leq \sum_{j=\hat{k}}^{k'} \left| \mathbf{E}_x(f_j^2 \,|\, X_{(i-1)n_1+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f_j^2) \right. \\ &\quad + 2 \sum_{k=\hat{k}}^{k'-1} \sum_{1=k+1}^{k'} \left| \mathbf{E}_x(f_k\, k_1) \,|\, X_{(i-1n_1+(i-2)n_2}) - \mathbf{E}_x(f_k f_1) \right| \end{aligned}$$

da cui banalmente si ricava che

$$\beta_i = \|f\|^2 \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1} + k_f \|f\| \cdot n_1 \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1}$$

e quindi che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{l_n} \beta_i \cdot (B_n')^{-1} = 0 \tag{21}$$

se si pensa che valgono la (19) e la seguente

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \cdot l_n \cdot n_1 \cdot \mathscr{R}_{0,n_2+1} = 0.$$

Infine si ha che

$$\gamma_i = \mathbf{E}_x(|\rho_i|^3) \le n_1 \cdot |f| \cdot \mathbf{E}_x(\rho_i^2)$$

e quindi che $\exists n_1$, n_2 tali che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{l_n} \gamma_i\right) \cdot (B_n')^{-3/2} = 0. \tag{22}$$

Dalle (20), (21), (22) si evince che $\exists \nu_1 > 0$ tale che

$$\left(\sum_{i=1}^{l_n} \alpha_i\right) \cdot (B_n')^{-1/2} + \left(\sum_{i=1}^{l_n} \beta_i\right) \cdot (B_n')^{-1} + \left(\sum_{i=1}^{l_n} \gamma_i\right) \cdot (B_n')^{-3/2} \le n^{-\nu_1}$$

e quindi, sulla base del Teorema 2, si ha

$$|P_x((Y_n' - \mathbf{E}_x(Y_n')) \cdot (B_n')^{-1} \le a)| - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{a} \exp(-Z^2/2)\, dz \le C_1 n^{-\nu_1/8}. \tag{23}$$

Dalla (23), $\exists \nu_2 > 0$ tale che

$$P_x(|(Y_n'' - \mathbf{E}_x(Y_n'')) \cdot \sigma^{-1} \cdot n^{-1/2}| \ge \varepsilon) \le \varepsilon^{-2} \cdot n^{\nu_2}; \tag{24}$$

se si considera che, posto $B_n'' = \mathbf{E}_x(\sum_{i=1}^{l_n} g_i)^2$, si ha

$$(Y_n - \mathbf{E}_x(Y_n))\sigma^{-1} \cdot n^{-1/2} = (Y_n' - \mathbf{E}_x(Y_n')) \cdot (B_b')^{-1/2} \cdot (B_n')^{1/2} \cdot \sigma^{-1} \cdot n^{-1/2} + (Y_n'' - \mathbf{E}_x(Y_n'') \cdot (B_n'')^{-1/2} \cdot (B_n'')^{1/2} \cdot \sigma^{-1} \cdot n^{-1/2}$$

ed inoltre vale che

$$B_n'' = \sum_{i=1}^{l_n} n_2(\sigma^2 + s_{n_2}'') \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Dalle (23) e (24) non è difficile far vedere che $\exists C > 0$ e $\nu > 0$ tali che

$$|P_x((Y_n - \mathbf{E}_x(Y_n))\sigma^{-1} \cdot n^{-1/2} < a)| - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2/2)\, dz \le C \cdot n^{-\nu} \tag{25}$$

$\forall a \in R$ e $x \in K$.

Dalla (25) e dal fatto che

$$|n^{-1}\mathbf{E}_x(Y_n) - \mathbf{E}_\infty(f_1)| \leq n^{-1} \cdot \|f\| \cdot S_0,$$

risulta completata la dimostrazione del teorema.

Forniamo infine un corollario del Teorema 1 nel seguente.

COROLLARIO. *Nelle ipotesi del Teorema* 1, *se* $\sigma^2 > 0$, *si ha*

$$\left| P_\lambda\left(\left(\sum_{k=1}^{n} f_k - n \cdot \mathbf{E}_\infty(f_1)\right)\sigma^{-1} \cdot n^{-1/2} \leq a\right) - (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{a} \exp(-z^2/2)\, dz \right| \leq C \cdot n^{-\nu},$$

per ogni numero reale a e per ogni distribuzione iniziale λ, *dove* P_λ *è la misura di probabilità sullo spazio* $(\Omega, \mathscr{F})$, *corrispondente alla distribuzione iniziale ed al nucleo markoviano* $Q(\cdot, \cdot)$.

Dimostrazione. E' evidentemente ricavabile dalla (6) con semplici passaggi.

Considerazione 2. Come si può notare, per la dimostrazione del Teorema 1 non è stata imposta alcuna condizione di ϕ-mixing sulla catena markoviana.

Ringraziamenti. L'autore è molto grato al prof. Giorgio Letta ed al referee per gli utili commenti e suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

1. N. A. SAPOGOV, *On the law of the iterated logarithm for dependent random variables*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 63 (1948), pp. 487–490.
2. ———, *On sums of dependent random variables*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 63 (1948), pp. 353–356.
3. ———, *Law of the iterated logarithm for sums of dependent quantities*, Leningrad Gos. Univ. Učen. Zap. Ser. Mat. Nauk., vol. 19 (1950), pp. 160–179.
4. R. DE DOMINICIS, *Some limit theorems for Markov chains not necessarily fulfilling Doeblin's condition*, Ricirche Mat., in corso di stampa (1980).
5. P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measure*, Wiley, N.Y., 1968.
6. S. V. NAGAEV, *Some limit theorems for non-stationary Markov chains*, Theor. Probability Appl., vol. 2 (1957), pp. 378–406.
7. R. L. DOBRUSIN, *Central limit theorem for non-stationary Markov chains*, Theor. Probability Appl., vol. 1 (1956), pp. 65–80.
8. K. B. ATHREYA, P. E. NEY, *A new approach to the limit theory of recurrent Markov chains*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 245 (1978), pp. 493–501.
9. D. J. H. GARLING, *Radonifying mappings and functional central limit theorem*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, vol. 26 (1973), pp. 297–308.
10. P. LOÈVE, *Probability theorey*, 3rd Ed., Van Nostrand, Princeton, 1963.
11. M. IOSIFESCU, R. TEODORESCU, *Random processes and learning*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
12. V. V. PETROV, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

UNIVERSITÀ DI NAPOLI
NAPOLI, ITALY