

MULTIPLICITÉS DE CERTAINES COMPOSANTES SINGULIÈRES

En hommage à Oscar Zariski, à l'occasion de son
soixantième anniversaire

PAR

PIERRE SAMUEL

Etant donnés deux variétés (ou cycles) X, Y portés par une variété algébrique ambiante A , et une composante C de leur intersection qui soit *singulière* sur A , aucune théorie générale ne nous dit, pour l'instant, comment définir la multiplicité d'intersection relative $i_A(C; X \cdot Y)$, même si C a la bonne dimension ($\dim(X) + \dim(Y) - \dim(A)$). Seul est traité le cas très particulier où X et Y sont, au voisinage de C , des intersections complètes de A ([5], II, §6, n° 5). Nous allons donner ici quelques indications sur un autre cas très particulier.

Soient V et V' deux variétés normales de même dimension, et f une application birationnelle et partout régulière de V' dans V (ainsi f est "génériquement surjective"). Etant donné un diviseur D de V , nous cherchons à donner un sens à la notation $f^{-1}(D)$. Les seules difficultés proviennent des composantes W'_j de $f^{-1}(\text{Supp}(D))$ (pris au sens ensembliste) telles que $f(W'_j)$ soit *singulière* sur V , et par conséquent de codimension > 1 puisque V est normale; en effet, si $f(W'_j)$ est simple, le coefficient de W'_j dans $f^{-1}(D)$ est celui de W'_j dans le cycle $\text{pr}_{V'}((D \times V') \cdot T)$ (où T est le graphe de f dans $V \times V'$); rappelons que, si $f(W'_j)$ est de codimension 1 sur V , la restriction de f à W'_j est une application birationnelle régulière de W'_j sur $f(W'_j)$, et le coefficient de W'_j dans $f^{-1}(D)$ est égal à celui de $f(W'_j)$ dans D . Notons aussi que les sous variétés W'_j de codimension 1 de V' telles que $f(W'_j)$ soit *singulière* sur V sont *en nombre fini* (puisque'il en est ainsi de celles telles que $\text{codim}(f(W'_j)) > 1$).

Ceci étant, il est naturel d'imposer à $f^{-1}(D)$ les trois conditions suivantes:

- (a) Si D est positif, il en est de même de $f^{-1}(D)$, et f^{-1} est un homomorphisme.
- (b) Si D est le diviseur (x) d'une fonction x sur V , $f^{-1}(D)$ est le diviseur (x') de la fonction x' sur V' correspondant à x . ($x' = x \circ f$).
- (c) Si D est algébriquement équivalent à 0, il en est de même de $f^{-1}(D)$ (plus précisément, si D parcourt un système algébrique, il en est de même de $f^{-1}(D)$).

Dans ce qui va suivre, et qui n'est qu'une solution partielle du problème posé, nous nous occuperons seulement des conditions (a) et (b). Notons K le corps des fonctions rationnelles sur V (identifié au corps des fonctions rationnelles sur V'). Soient W' une sous variété de codimension 1 de V' et w la valuation correspondante de K ; posons $W = f(W')$, et notons $\mathfrak{o}$

l'anneau local de W sur V . Pour tout diviseur D sur V , nous cherchons à définir le coefficient $\bar{w}(D)$ de W' dans $f^{-1}(D)$. Nous ajouterons à (a) et (b) la condition naturelle que $\bar{w}(D)$ a un "caractère local", c'est à dire ne dépend que des composantes de D qui passent par W . Nous sommes ainsi ramenés au problème algébrique suivant:

(P) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$, notons $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation correspondante. Il s'agit de trouver une application $\mathfrak{p} \rightarrow \bar{w}(\mathfrak{p})$ à valeurs réelles positives telle que l'on ait*

$$(1) \quad w(x) = \sum_{\mathfrak{p}} \bar{w}(\mathfrak{p}) v_{\mathfrak{p}}(x)$$

pour tout élément non nul x de K .

Notons qu'il revient au même d'imposer (1) seulement aux éléments non nuls de $\mathfrak{o}$. Si (P) admet une solution $\bar{w}$, nous étendrons celle ci aux diviseurs locaux en W (qui correspondent aux combinaisons linéaires formelles des idéaux $\mathfrak{p}$), et les conditions (a) et (b) seront satisfaites.

Remarque. Si $W = f(W')$ est de codimension 1 sur V , $\mathfrak{o}$ est l'anneau de la valuation w , le seul idéal $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}$, on a $v_{\mathfrak{m}} = w$, et la seule solution de (P) est donnée par $\bar{w}(\mathfrak{m}) = 1$. Plus généralement, si $\mathfrak{o}$ est un anneau factoriel (en particulier si W est simple sur V), l'idéal $\mathfrak{p}$ est un idéal principal $\mathfrak{o}y$, et (1) implique $\bar{w}(\mathfrak{p}) = w(y)$; l'application $\bar{w}$ ainsi définie est l'unique solution de (P) et, lorsque W est simple, coïncide avec la solution fournie par la théorie des intersections (cf. ci dessus, et [5], II, §5, n° 7).

1. Un théorème d'existence

THÉORÈME 1. *Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local noethérien, intègre et intégralement clos (plus généralement un anneau de Krull local), K son corps des fractions, I l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de $\mathfrak{o}$, $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation normée de K correspondant à $\mathfrak{p} \in I$, et w une valuation discrète normée de K dont l'anneau domine $\mathfrak{o}$. Il existe une application $\bar{w}$ de I dans R_+ (ensemble des nombres réels ≥ 0) telle que*

$$(1)' \quad w(x) = \sum_{\mathfrak{p} \in I} \bar{w}(\mathfrak{p}) v_{\mathfrak{p}}(x)$$

pour tout élément x non nul de K .

Notons, en effet, E l'espace vectoriel réel ayant I pour base (ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de I), P l'ensemble de ses éléments positifs (éléments dont toutes les composantes sont positives), H le sous-groupe de E formé par les diviseurs de fonctions (i.e. les éléments $\sum v_{\mathfrak{p}}(x) \cdot \mathfrak{p}$ pour $x \in K$, $x \neq 0$), et F le sous-espace vectoriel de E engendré par H . L'application $x \rightarrow w(x)$ de H dans $\mathbb{R}$ se prolonge de façon unique, en une forme $\mathbb{R}$ -linéaire sur F (que nous noterons encore w). Il s'agit de prolonger cette forme linéaire en une forme linéaire $\bar{w}$ sur E de telle sorte que ce prolongement prenne des valeurs positives sur P . Nous allons,

pour celà, utiliser une forme classique du *théorème de Hahn-Banach* ([2], Chap. II, §3, exerc. 1 et 2). Notons F^+ l'ensemble des $\alpha \in F$ tels que $w(\alpha) \geq 0$; l'ensemble $P + F^+$ est un cône convexe dans E .

Nous allons d'abord montrer que, pour tout $p \in I$, on a $-p \notin P + F^+$. En effet, dans le cas contraire, il existerait des nombres réels positifs presque tous nuls $a(q)$ ($q \in I$), un entier $n \geq 0$, n éléments $x_i (\neq 0)$ de K et n nombres réels b_i tels que

$$(2) \quad -p = \sum_q a(q) \cdot q + \sum_{i,q} b_i v_q(x_i) \cdot q \quad \text{et} \quad \sum_i b_i w(x_i) \geq 0.$$

Nous allons nous ramener au cas où les nombres réels $a(q)$, b_i sont *rationnels*, et pour celà nous utiliserons le lemme classique suivant de la théorie des approximations diophantiennes (voir, par exemple, [1], Chap. VII, §1, n° 1, prop. 2):

LEMME 1. *Etant donnés une famille finie (c_i) de nombres réels et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe des entiers $q > 0$ et s_i tels que $|c_i - s_i q^{-1}| \leq \varepsilon q^{-1}$ pour tout i .*

Ceci étant, pour chaque i ($i = 1, \dots, n$), les éléments $q \in I$ tels que $v_q(x_i) \neq 0$ sont en nombre fini; il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon \cdot \sum_i |v_q(x_i)| \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $q \in I$, et $\varepsilon \cdot \sum_i |w(x_i)| < 1$. Comme les nombres $a(q)$ qui sont $\neq 0$ sont en nombre fini, il existe, d'après le lemme 1, des entiers q (> 0), s_i et $s(q)$ tels que

$$|b_i - s_i q^{-1}| \leq \varepsilon q^{-1} \quad \text{et} \quad |a(q) - q^{-1}s(q)| \leq 1/3q$$

pour tout i et pour tout q ; on aura pris $s(q) = 0$ si $a(q) = 0$, et $s(q) \geq 0$ si $a(q) > 0$. Pour $q \neq p$, la relation (2) donne $a(q) + \sum_i b_i v_q(x_i) = 0$, d'où

$$q^{-1} |s(q) + \sum_i s_i v_q(x_i)| \leq 3^{-1} q^{-1} + \varepsilon q^{-1} \sum_i |v_q(x_i)| \\ \leq 3^{-1} q^{-1} + 2^{-1} q^{-1} < q^{-1};$$

comme le nombre $|s(q) + \sum_i s_i v_q(x_i)|$ est entier, on en déduit

$$(3) \quad s(q) + \sum_i s_i v_q(x_i) = 0 \quad (\text{pour } q \neq p).$$

Pour $q = p$, la relation $-1 = a(p) + \sum_i b_i v_p(x_i)$ (dédue de (2)) donne de même $|q + s(p) + \sum_i s_i v_p(x_i)| < 1$, d'où

$$(4) \quad q + s(p) + \sum_i s_i v_p(x_i) = 0.$$

Posons $x = \prod_i x_i^{s_i}$ ($x \in K$). On a

$$w(x) = \sum_i s_i w(x_i) \geq \sum_i (b_i q - \varepsilon \operatorname{sgn}(w(x_i)) w(x_i)) \\ \geq q \sum_i b_i w(x_i) - \varepsilon \sum_i |w(x_i)| > q \sum_i b_i w(x_i) - 1 \geq -1$$

(en vertu de (2)); comme $w(x)$ est un entier, on en déduit $w(x) \geq 0$. Les relations (3) et (4) donnent alors

$$(5) \quad -qp = \sum_q (s(q) + v_q(x)) \cdot q \quad (q > 0, \quad s(q) \geq 0, \quad w(x) \geq 0).$$

On a ainsi $v_q(x^{-1}) \geq 0$ pour tout $q \in I$, et $v_p(x^{-1}) > 0$, d'où $x^{-1} \notin p$. Comme l'anneau de w domine $\mathfrak{o}$ par hypothèse, il en résulte que $w(x^{-1}) > 0$, contrairement à la relation $w(x) \geq 0$.

Choisissons un élément p de I . Nous venons de voir que l'ensemble des cônes convexes C de E contenant $P + F^+$ et tels que $-p \notin C$ est non-vide; il est évidemment inductif si on l'ordonne par inclusion. Un élément maximal de cet ensemble est un demi-espace fermé E^+ de E (cf. [2], Chap. II, §3, exerc. 1 et 2), ce qui veut dire qu'il existe une forme linéaire $g \neq 0$ sur E telle que les points de E^+ sont ceux qui vérifient $g(\alpha) \geq 0$. Ce demi-espace E^+ ne contient pas F , sinon il contiendrait le diviseur $(x) = \sum_q v_q(x) \cdot q$ d'un élément x de K tel que $x^{-1} \notin p$; d'où, $(x) - p \geq 0$ et $-p \in E^+$ puisque $P \subset E^+$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $E^+ \cap F$ est un demi-espace fermé de F , nécessairement égal à F^+ puisqu'il le contient. La restriction de g à F est donc proportionnelle à w , et il existe donc bien une forme linéaire positive $\bar{w}$ sur E qui prolonge w . CQFD.

2. Condition d'unicité

Conservons les hypothèses et notations du théorème 1. Il montre que, pour $p \in I$, on a $\bar{w}(p) \leq w(x)/v_p(x)$ quel que soit $x \in p$, $x \neq 0$. Posons

$$(6) \quad w'(p) = \inf_{x \in p, x \neq 0} (w(x)/v_p(x)).$$

On a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Les hypothèses et notations étant celles du théorème 1 et de (6), on a $\bar{w}(p) \leq w'(p)$ pour toute application $\bar{w}$ de I dans R_+ vérifiant (1)'. Si w' vérifie (1)', toute autre application $\bar{w}$ de I dans R_+ vérifiant (1)' est égale à w' . Pour tout $p \in I$, il existe une application $\bar{w}$ de I dans R_+ vérifiant (1)' et telle que $\bar{w}(p) = w'(p)$. Si une seule application $\bar{w}$ de I dans R_+ vérifie (1)', cette application est w' .*

La première assertion résulte de l'inégalité $\bar{w}(p) \leq w(x)/v_p(x)$ ($x \in p$, $x \neq 0$). Si w' vérifie (1)', on a $\sum_p (w'(p) - \bar{w}(p))v_p(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{o}$, d'où $w'(p) - \bar{w}(p) = 0$ pour tout p puisque ces nombres sont positifs; ceci démontre la seconde assertion. La quatrième étant une conséquence immédiate de la troisième, il nous reste à démontrer cette dernière. Pour cela nous distinguerons deux cas:

(a) *Cas où $p \in F$* (notations de la démonstration du théorème 1). Il existe alors des $x_1 \in K$ et des nombres réels b_i tels que $p = \sum_i b_i(x_i)$ (où (x) désigne le diviseur $\sum_q v_q(x) \cdot q$ de l'élément x). Le raisonnement d'approximations diophantiennes menant à (5) montre qu'il existe des entiers $s(i)$ et q ($q > 0$) tels que $q \cdot p = \sum_i s(i)(x_i)$; en posant $y = \prod_i x_i^{s(i)}$, on a donc $q \cdot p = (y)$. Comme, dans (6), on peut remplacer $w(x)/v_p(x)$ par $w(x^q)/v_p(x^q)$, et que, pour x non nul dans p , on a $x^q = y^r z$ avec $r = v_p(x)$ et $z \in \mathfrak{o}$, il vient $w'(p) = \inf_{r \geq 1, z \in \mathfrak{o}} ((rw(y) + w(z))/qr) = w(y)/q$. Comme, d'après (1)',

on a $w(y) = q\bar{w}(\mathfrak{p})$, on a bien $\bar{w}(\mathfrak{p}) = w'(\mathfrak{p})$ (et ceci pour toute $\bar{w}$ vérifiant (1)').

(b) *Cas où $\mathfrak{p} \notin F$.* Nous commençons par prolonger w en une forme linéaire u sur $F + R \cdot \mathfrak{p}$ en posant $u(\mathfrak{p}) = w'(\mathfrak{p})$. Si $w'(\mathfrak{p}) = 0$, la double inégalité $0 \leq \bar{w}(\mathfrak{p}) \leq w'(\mathfrak{p})$ montre qu'on a aussi $\bar{w}(\mathfrak{p}) = 0$; on peut donc supposer $w'(\mathfrak{p}) > 0$. Soit D l'ensemble des éléments α de $F + R \cdot \mathfrak{p}$ tels que $u(\alpha) \geq 0$. Nous allons montrer que le cône convexe $D + P$ (P : ensemble des éléments positifs de l'espace vectoriel E) ne contient pas $-\mathfrak{p}$, ce qui, comme dans le théorème 1, permettra de prolonger u en une forme linéaire positive $\bar{w}$ sur E , et démontrera donc notre assertion.

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'on ait une relation de la forme

$$(7) \quad -\mathfrak{p} = \sum_i b_i(x_i) + b \cdot \mathfrak{p} + \sum_a a(\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{q}$$

où $x_i \in K$, $b, b_i, a(\mathfrak{q})$ réels, $a(\mathfrak{q}) \geq 0$ et $bw'(\mathfrak{p}) + \sum_i b_i w(x_i) \geq 0$. Un raisonnement d'approximations diophantiennes analogue à celui du théorème 1 montre qu'il existe des entiers $q > 0$, $s(i)$, c et $n(\mathfrak{q})$ tels que

$$(8) \quad -q \cdot \mathfrak{p} = \sum_i s(i)(x_i) + c\mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}} n(\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{q}, \quad n(\mathfrak{q}) \geq 0, \\ cw'(\mathfrak{p}) + \sum_i s(i)w(x_i) \geq 0.$$

En posant $y = \prod_i x_i^{s(i)}$, on a

$$(9) \quad -q \cdot \mathfrak{p} = (y) + c \cdot \mathfrak{p} + \sum_{\mathfrak{q}} n(\mathfrak{q}) \cdot \mathfrak{q}, \quad w(y) + cw'(\mathfrak{p}) \geq 0.$$

Si on a $c + q > 0$, (9) montre qu'on a $(y^{-1}) \geq 0$ et $v_{\mathfrak{p}}(y^{-1}) \geq c + q > 0$, d'où $y^{-1} \notin \mathfrak{p}$; il vient alors $w'(\mathfrak{p}) \leq w(y^{-1})/v_{\mathfrak{p}}(y^{-1}) \leq -w(y)/(c + q)$, d'où $cw'(\mathfrak{p}) + w(y) + qw'(\mathfrak{p}) \leq 0$, et donc $cw'(\mathfrak{p}) + w(y) < 0$ puisque $q > 0$ et $w'(\mathfrak{p}) > 0$; ceci contredit $w(y) + cw'(\mathfrak{p}) \geq 0$. Dans le cas contraire ($c + q \leq 0$), soit ε un nombre > 0 tel que $-\varepsilon(c + q) < w'(\mathfrak{p})$, et soit x un élément non nul de $\mathfrak{p}$ tel que $w'(\mathfrak{p}) \leq w(x)/v_{\mathfrak{p}}(x) \leq w'(\mathfrak{p}) + \varepsilon$; posons $z = x^{-(c+q)}y^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$; on a $v_{\mathfrak{p}}(z) = -(c + q + v_{\mathfrak{p}}(y))v_{\mathfrak{p}}(x) = n(\mathfrak{p})v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$, et, pour $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, $v_{\mathfrak{q}}(z) \geq -v_{\mathfrak{q}}(y)v_{\mathfrak{p}}(x) = n(\mathfrak{q})v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$; d'où $z \in \mathfrak{o}$ et donc $w(z) \geq 0$. Or cette dernière relation s'écrit $0 \leq -(c + q)w(x) - v_{\mathfrak{p}}(x)w(y)$, d'où $0 \leq (-(c + q)(w'(\mathfrak{p}) + \varepsilon) - w(y)) \cdot v_{\mathfrak{p}}(x)$, et donc $0 < (1 - c - q)w'(\mathfrak{p}) - w(y)$ (puisque $v_{\mathfrak{p}}(x) > 0$ et que $-(c + q)\varepsilon < w'(\mathfrak{p})$). Or, d'après (9), on a $w(y) + cw'(\mathfrak{p}) \geq 0$; il vient donc $0 < (1 - q)w'(\mathfrak{p})$, ce qui est contradictoire puisque $q \geq 1$ et que $w'(\mathfrak{p}) > 0$. CQFD.

Ceci étant, nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{p} \in I$ est *presque-principal* (relativement à w) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \neq 0$ dans $\mathfrak{p}$ tel que

$$\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{q}}(x)w'(\mathfrak{q}) \leq \varepsilon v_{\mathfrak{p}}(x).$$

Nous dirons que $\mathfrak{o}$ est *presque-factoriel* (relativement à w) si tout idéal $\mathfrak{p} \in I$ est presque-principal. On a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si $\mathfrak{p} \in I$ est presque-principal, on a $\bar{w}(\mathfrak{p}) = w'(\mathfrak{p})$ pour toute application $\bar{w}$ de I dans R_+ vérifiant (1)'. Pour qu'une telle application soit unique (c'est à dire égale à w'), il faut et il suffit que $\mathfrak{o}$ soit presque-factoriel.*

En effet, s'il existe $x \neq 0$ dans $\mathfrak{p}$ tel que $\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{q}}(x)w'(\mathfrak{q}) \leq \varepsilon v_{\mathfrak{p}}(x)$, et si $\bar{w}$ vérifie (1)', les relations

$$w(x) = v_{\mathfrak{p}}(x)\bar{w}(\mathfrak{p}) + \sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{q}}(x)\bar{w}(\mathfrak{q}) \quad \text{et} \quad \bar{w}(\mathfrak{q}) \leq w'(\mathfrak{q})$$

montrent qu'on a $\bar{w}(x)/v_{\mathfrak{p}}(x) \leq \bar{w}(\mathfrak{p}) + \varepsilon$; on a donc $\bar{w}(\mathfrak{p}) = w'(\mathfrak{p})$ en vertu de (6) et de l'inégalité $\bar{w}(\mathfrak{p}) \leq w'(\mathfrak{p})$; ceci démontre la première assertion. Le "il suffit" de la seconde en résulte aussitôt. Enfin, si $\bar{w}$ est unique, on a $w(x) = \sum_{\mathfrak{q}} w'(\mathfrak{q})v_{\mathfrak{q}}(x)$ (théorème 2) pour tout x dans K ; étant donné $\mathfrak{p} \in I$, prenons x dans $\mathfrak{p}$ tel que $w'(\mathfrak{p}) \leq w(x)/v_{\mathfrak{p}}(x) \leq w'(\mathfrak{p}) + \varepsilon$ (cf. (6)); on déduit aussitôt de ceci qu'on a $\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} w'(\mathfrak{q})v_{\mathfrak{q}}(x) \leq \varepsilon v_{\mathfrak{p}}(x)$; donc $\mathfrak{p}$ est presque-principal; comme ceci a lieu pour tout $\mathfrak{p} \in I$, $\mathfrak{o}$ est presque factoriel. CQFD.

En termes imagés un idéal premier presque-principal, est un idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 dans lequel existent des éléments dont le diviseur est presque entièrement concentré en $\mathfrak{p}$ (i.e. dont les composantes en dehors de $\mathfrak{p}$ sont négligeables). Un idéal premier principal (ou, plus généralement, dont une puissance symbolique est principale) est évidemment presque-principal. Mais il en existe d'autres, comme le montre le:

THÉORÈME 4. *L'anneau local $\mathfrak{o}$ du sommet du cône V projetant une courbe plane non-singulière C est presque-factoriel (relativement à n'importe quelle valuation w dominant $\mathfrak{o}$). Si d est le degré de C , et si w est la valuation déduite de la filtration de $\mathfrak{o}$ par les puissances de son idéal maximal, on a $w'(\mathfrak{p}) = d^{-1}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ correspondant à une génératrice de V .*

Démontrons d'abord que, si $\mathfrak{p} \in I$ correspond à une génératrice D de V , $\mathfrak{p}$ est presque-principal pour toute valuation w dominant $\mathfrak{o}$. Notons d le degré de C , et A le point de C correspondant à D . L'espace vectoriel des formes de degré n à 3 variables est de dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, et le sous espace vectoriel des formes de degré n qui sont multiples de l'équation de C est de dimension $\frac{1}{2}(n-d+1)(n-d+2)$; un supplémentaire est donc de dimension $dn - \frac{1}{2}(d^2 - 3d)$. Il existe ainsi une courbe plane C_n de degré n ne contenant pas C et vérifiant

$$dn - \frac{1}{2}(d^2 - 3d) - 1 = dn - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

conditions linéaires. Imposons donc à C_n de passer par A et d'y avoir avec C un contact d'ordre tel que A figure au moins $dn - \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ fois dans le cycle intersection $C \cdot C_n$; alors $C \cdot C_n$ contiendra, en dehors de A , un cycle de degré $\leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2) = g$ (g est d'ailleurs le genre de C). Soit x_n l'équation homogène de C_n ($x_n \in \mathfrak{o}$); on a $v_{\mathfrak{p}}(x_n) \geq dn - g$ et $\sum_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} v_{\mathfrak{q}}(x_n) \leq g$ (noter que $v_{\mathfrak{q}}(x_n) = 0$ lorsque $\mathfrak{q}$ ne correspond pas à une génératrice du cône V). Notons L l'ensemble des classes dans $\mathfrak{o}$ des formes linéaires à 3 variables; c'est un espace vectoriel de dimension 3 ou 2 sur le corps de base (2 seulement lorsque V est un plan); en notant L_j l'ensemble des $y \in L$ tels que $w(y) \geq j$, les L_j forment une suite décroissante de sous-

espaces vectoriels de L ; comme $\cap L_j = (0)$, il existe un entier k tel que $E_k = (0)$. Or, si $q \in I$ correspond à une génératrice de V , q contient un élément $y \neq 0$ de L (il est même engendré par deux éléments de L); on a donc $w'(q) \leq w(y)/v_q(y) \leq w(y) \leq k$. D'où $v_p(x_n)^{-1} \sum_{q \in I} v_q(x_n) w'(q) \leq gk/(dn - g)$; comme le second membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini, $\mathfrak{p}$ est presque-principal.

Ceci prouve (théorème 3) que, si $\bar{w}$ vérifie (1)', $\bar{w}(\mathfrak{p})$ est uniquement déterminé lorsque $\mathfrak{p}$ correspond à une génératrice. Or on sait que tout diviseur sur V est linéairement équivalent à une combinaison linéaire de génératrices ([4]). Donc, d'après (1)', $\bar{w}$ est déterminé de façon unique. Par conséquent $\mathfrak{o}$ est presque-factoriel (théorème 3).

Supposons enfin que w soit déduite de la filtration de $\mathfrak{o}$ par les puissances de son idéal maximal. Avec les notations précédentes, on a $v_p(x_n) \sim dn$ et $w(x_n) = n$. D'où, d'après (6), $w'(\mathfrak{p}) \leq \inf_n (w(x_n)/v_p(x_n)) = d^{-1}$, et ceci pour tout $\mathfrak{p} \in I$ correspondant à une génératrice. D'autre part, pour $y \in L$, on a $\sum_p v_p(y) = d$, d'où les inégalités $1 = w(y) = \sum_p w'(\mathfrak{p}) v_p(y) \leq d^{-1} \sum_p v_p(y) = 1$. Comme, pour tout $\mathfrak{p}$ correspondant à une génératrice, il existe $y \neq 0$ dans L tel que $v_p(y) > 0$, on en déduit $w'(\mathfrak{p}) = d^{-1}$. CQFD.

Remarque. Comme tout diviseur sur V est linéairement équivalent à une combinaison linéaire de génératrices, $w'(q)$ est un multiple de d^{-1} pour tout $q \in I$. D'autre part le théorème 4 montre que, si on note V' la transformée monoïdale du cône V relativement à son sommet W , f l'application canonique de V' sur V , et W' la courbe de V' correspondant au point W , alors le cycle image réciproque $f^{-1}(D)$ doit nécessairement être $d^{-1}W' + D'$ (D génératrice de V , D' courbe de V' correspondant régulièrement à D) si on veut que les conditions (a) et (b) de l'introduction soient vérifiées. Dans ce cas, comme toutes les génératrices de V sont algébriquement équivalentes entre elles, et que tout diviseur de V est linéairement équivalent à une combinaison linéaire de génératrices, notre solution w' vérifie aussi la condition (c) relative à l'équivalence algébrique.

3. Un exemple de non-unicité

Remarquons d'abord que, avec les notations du théorème 1, les applications $\bar{w}$ qui vérifient (1)' forment une partie convexe de R^f (ou, ce qui revient au même, du dual de E).

Considérons la quadrique V^0 d'équation $(X_0 X_1 - X_2 X_3 = 0)$ et le cône V de dimension 3 ayant V^0 pour base; notons W le sommet de V et $\mathfrak{o}$ l'anneau local de W sur V ; celui-ci contient l'anneau de coordonnées homogènes A de V^0 et est l'anneau de fractions de A relativement à son idéal homogène maximal. La filtration de $\mathfrak{o}$ par les puissances $\mathfrak{m}^n$ de son idéal maximal définit une valuation w qui domine $\mathfrak{o}$. Soient G^0 une génératrice de la quadrique V^0 , G ($\subset V$) le plan la projetant à partir de W , et $\mathfrak{p}$ l'idéal de G dans $\mathfrak{o}$. Nous allons d'abord montrer que, avec les notations de (6), on a $w'(\mathfrak{p}) = 1$.

Démonstration. Notons $\mathfrak{P}$ l'idéal de G^0 dans A , et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal homogène de A . Montrons qu'on a $\mathfrak{P}^{(n)} \subset \mathfrak{M}^n$ (où $\mathfrak{P}^{(n)}$ désigne la puissance symbolique $n^{\text{ème}}$ de $\mathfrak{P}$); comme ce sont des idéaux homogènes, il suffit de montrer que, si u est un élément homogène de degré q de $\mathfrak{P}^{(n)}$, on a $q \geq n$; or u est l'équation d'une surface S^0 de degré q ; on a $S^0 \cdot V^0 = nG^0 + H^0$ où H^0 est un diviseur positif sur V^0 ; intersectons avec une génératrice G'^0 de V^0 , appartenant à l'autre système que celui de G^0 et intersectant proprement H^0 ; le cycle $(S^0 \cdot V^0) \cdot_{V^0} G'^0 = S^0 \cdot G'^0$ est de degré q , et $(nG^0) \cdot_{V^0} G'^0$ est de degré 1; d'où $q \geq n$. Comme $\mathfrak{P}^{(n)}$ et $\mathfrak{M}^n$ engendrent $\mathfrak{p}^{(n)}$ et $\mathfrak{m}^n$ dans $\mathfrak{o}$, on a $\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{m}^n$, d'où $w(y) \geq v_{\mathfrak{p}}(y)$ pour tout $y \in \mathfrak{p}$. L'égalité est possible, par exemple pour les formes linéaires nulles sur G et pour leurs puissances. D'où $w'(\mathfrak{p}) = 1$ d'après (6).

Ceci étant, comme tout diviseur sur le cône V est linéairement équivalent à un diviseur "conique" ([4], loc. cit.) et comme tout diviseur sur V^0 est linéairement équivalent à une combinaison linéaire de deux génératrices données, G_1^0 et G_2^0 , de systèmes distincts, l'espace vectoriel E du théorème 1 est engendré par F et par les deux idéaux $\mathfrak{p}_i$ des plans G_i projetant les droites G_i^0 ($i = 1, 2$). D'autre part l'élément $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ de E est le diviseur (y) de la classe y dans $\mathfrak{o}$ d'une forme linéaire et, pour toute application $\bar{w}$ vérifiant (1)', on a donc $\bar{w}(\mathfrak{p}_1) + \bar{w}(\mathfrak{p}_2) = w(y) = 1$. Ainsi $\bar{w}$ est entièrement déterminée par le nombre $a = \bar{w}(\mathfrak{p}_1)$, et on a nécessairement $0 \leq a \leq 1$. Comme $w'(\mathfrak{p}_1) = w'(\mathfrak{p}_2) = 1$, le théorème 3 montre l'existence de deux applications $\bar{w}_0$ et $\bar{w}_1$ vérifiant (1) et telles que $\bar{w}_0(\mathfrak{p}_2) = 1$ (d'où $\bar{w}_0(\mathfrak{p}_1) = 0$) et que $\bar{w}_1(\mathfrak{p}_1) = 1$ (d'où $\bar{w}_1(\mathfrak{p}_2) = 0$). Par convexité les applications vérifiant (1)' sont les $\bar{w}_a = (1 - a)\bar{w}_0 + a\bar{w}_1$ où a parcourt l'intervalle $[0, 1]$.

Soient alors V' la transformée monoïdale du cône V relativement au sommet W , f l'application canonique de V' sur V , et W' la surface de V' correspondant à W ; la restriction de f à $V' - W'$ est un isomorphisme de $V' - W'$ sur $V - W$. Pour tout diviseur D sur V nous noterons D' le diviseur sur V' correspondant régulièrement à D (D' est l'adhérence de $f^{-1}(D) \cap (V - W)$ dans V'). L'anneau local de W' sur V' est l'anneau de la valuation w définie ci dessus. Pour $0 \leq a \leq 1$, nous étendrons $\bar{w}_a$ aux diviseurs sur V (et pas seulement aux diviseurs locaux en W) en posant $\bar{w}_a(D) = 0$ si aucune composante de D ne contient W . Alors l'application

$$D \rightarrow f_a^{-1}(D) = \bar{w}_a(D) \cdot W' + D'$$

vérifie les conditions (a) et (b) de l'Introduction. Comme V (resp. V') est une variété rationnelle, l'équivalence linéaire des diviseurs y coïncide avec l'équivalence algébrique; donc la condition (c) de l'Introduction se réduit à (b) et est aussi vérifiée.

Il semble donc que, dans cet exemple, il y ait une infinité de façons raisonnables de définir le diviseur $f^{-1}(D)$. Notons que, pour chacune d'elles, on a $f(f^{-1}(D)) = D$ (D diviseur sur V) et $f^{-1}(f(D')) = D'$ multiple de W' (D' diviseur sur V').

Remarque. Dans les cas où il n'y a pas unicité de $\bar{w}$, les cycles à coefficients réels s'introduisent naturellement. Dans les cas d'unicité (c.à.d. quand $\mathfrak{o}$ est presque factoriel relativement à w) il serait intéressant de savoir si, comme dans l'exemple traité au théorème 4, ces coefficients seront toujours rationnels; plus généralement on peut se demander si les nombres réels $w'(\mathfrak{p})$ définis par (6) sont toujours rationnels (cf. [3]).

BIBLIOGRAPHIE

1. N. BOURBAKI, *Topologie générale, Chapitres V-VIII*, Éléments de Mathématique, Livre III, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1029, Paris, Hermann, 1947.
2. ———, *Espaces vectoriels topologiques, Chapitres I-II*, Éléments de Mathématique, Livre V, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1189, Paris, Hermann, 1953.
3. M. NAGATA, *Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of ideals*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, Math., vol. 30 (1957), pp. 165-175.
4. P. SAMUEL, *Multiplicités des composantes singulières d'intersection*, Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1949, pp. 87-90.
5. ———, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, N. F., Heft 4, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1955.

UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND
CLERMONT-FERRAND, FRANCE