Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial

# Algèbres enveloppantes et groupes de Chevalley généralisés

Jacques Tits

msp

Vol. 16 No. 1 2018

Innovations in Incidence Geometry
Algebraic, Topological and Combinatorial

vol. 16, no. 1, 2018
dx.doi.org/10.2140/iig.2018.16.259

msp

# Algèbres enveloppantes et groupes de Chevalley généralisés

Jacques Tits

[121] Originally published in *Actes des Journées Groupes et langages*, Amiens, May 1981. Reused with permission.

# ALGÈBRES ENVELOPPANTES ET GROUPES DE CHEVALLEY GÉNÉRALISÉS

par Jacques TITS

Par un jeu de mot involontaire, résultant d'un léger malentendu sur le thème général de ces journées, j'ai choisi pour mon exposé un sujet se rapportant aux <u>applications du langage algébrique à la théorie des groupes</u>.

Une technique algébrique particulièrement féconde en théorie des groupes est celle des <u>algèbres de Lie</u>. Elle est notamment à la base de deux des résultats les plus marquants de la théorie des groupes avant 1960: la classification des groupes analytiques complexes semi-simples par W. Killing et E. Cartan [1], et la découverte par C. Chevalley [2] des groupes qui portent son nom.

Au langage près, qui n'était pas le leur, la méthode de Killing et Cartan consiste à remplacer le problème posé, essentiellement analytique, par celui, purement algébrique, de la classification des algèbres de Lie complexes simples. Mais une fois ce dernier résolu, il faut encore repasser des algèbres de Lie aux groupes et, en particulier, montrer que toute algèbre de Lie complexe simple $\underline{L}$ est l'algebre de Lie d'un groupe. Une façon classique de procéder consiste à plonger $\underline{L}$ dans une algèbre de matrices puis à former le groupe engendré par $\exp \underline{L}$ dans cette algèbre.

Le problème du passage des algèbres de Lie aux groupes s'est posé aussi dans dans la théorie de Chevalley et, plus récemment, pour les algèbres de Lie de Kac-Moody [3][4]. On l'a chaque fois résolu par "l'exponentiation" de représentations linéaires (une des grandes habiletés de Chevalley est de faire voir que, même en caractéristique $p$, on peut donner un sens aux exponentielles nécessaires à la définition du groupe).

L'utilisation des représentations linéaires pour l'intégration des algèbres de Lie a au moins deux inconvénients. Il n'est pas canonique (et nécessite donc l'étude des relations entre groupes construits à l'aide de représentations différentes). Il implique le développement préalable de la théorie des représentations linéaires, qui n'est pas tout à fait élémentaire (pour la construction des groupes <u>simples</u>, il suffit de considérer la représentation adjointe, facile à définir, mais ce n'est plus le cas si l'on veut construire les groupes simplement connexes; c'est ainsi que les groupes Spin sont traditionnellement construits à l'aide de l'algèbre de Clifford).

L'exposé a pour objet l'esquisse d'une méthode d'intégration "directe" des algèbres de Lie. Cette méthode s'applique dans tous les cas cités plus haut (cf. [5]), mais nous nous bornons ici, pour la simplicité de l'exposé, à considérer le cas des algèbres de Lie complexes, semi-simples, de dimension finie.

Soit $\underline{L}$ une algèbre de Lie complexe quelconque. Une idée qui se présente naturellement pour intégrer $\underline{L}$ consiste à essayer de donner un sens à $\exp x$, pour $x \in \underline{L}$. Les sommes finies $\sum_0^n x^i/i!$ en ont un: ce sont des éléments de l'algèbre enveloppante $U(\underline{L})$. Ne pourrait-on compléter celle-ci de façon à y inclure les séries formelles $\exp x$ ? La réponse est en général négative, mais elle est positive lorsque l'algèbre $\underline{L}$ est nilpotente. Dans ce cas, $\exp \underline{L}$ est bien défini et est un sous-groupe du groupe multiplicatif de l'algèbre complétée $\widehat{U(\underline{L})}$. (On peut aussi intégrer une algèbre nilpotente en dotant l'algèbre elle-même d'une loi de groupe définie par la formule de Campbell-Hausdorff, mais cette méthode se prête moins bien aux généralisations dont on a besoin pour traiter notamment des algèbres de Kac-Moody).

Considérons à présent une algèbre semi-simple $\underline{L}$, soient $\underline{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\underline{h}^*$ l'espace vectoriel dual de $\underline{h}$, $\Phi \subset \underline{h}^*$ le système des racines de $\underline{L}$ par rapport à $\underline{h}$, $\underline{u}_\alpha$ la sous-algèbre à une dimension correspondant à $\alpha \in \Phi$, $\Delta$ une base de $\Phi$, $\Phi_+$ l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires à coefficients positifs des éléments de $\Delta$ et $\underline{u}_+$ l'algèbre engendrée par les $\underline{u}_\alpha$ pour $\alpha \in \Phi_+$. Pour $\alpha \in \Delta$, soient $\underline{u}'_\alpha$ l'algèbre engendrée par les $\underline{u}_\beta$ pour

$\beta \in \Phi_+ - \{\alpha\}$, $\sigma_\alpha$ un homomorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{sl}_2(\underline{\underline{C}})$ (algèbre des matrices d'ordre deux et de trace nulle) dans $\underline{L}$ qui applique $\{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \underline{\underline{C}}^\times\}$ sur $\underline{u}_\alpha$ et $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \underline{\underline{C}}^\times\}$ sur $\underline{u}_{-\alpha}$, $\alpha^\vee (\in \underline{h})$ l'image de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par $\sigma_\alpha$ et $S_\alpha$ une copie du groupe $SL_2(\underline{\underline{C}})$, dont l'algèbre de Lie est identifiée à $\underline{s}_\alpha = \sigma_\alpha(\underline{sl}_2(\underline{\underline{C}}))$. L'élément de $S_\alpha$ correspondant à une matrice $m$ donnée est noté $m_\alpha$. Pour $\alpha, \alpha' \in \Delta$, avec $\alpha \neq \alpha'$, on sait que $\alpha(\alpha'^\vee)$ et $\alpha'(\alpha^\vee)$ sont des entiers négatifs dont le produit vaut 0, 1, 2 ou 3; selon le cas, nous posons $c_{\alpha\alpha'} =$ 2, 3, 4 ou 6 (autrement dit, $\pi - \pi/c_{\alpha\alpha'}$ est l'angle des racines $\alpha$ et $\alpha'$).

Pour définir un groupe (connexe) d'algèbre de Lie $\underline{L}$, il faut encore se donner un réseau $\Lambda \subset \underline{h}^*$ intermédiaire entre le réseau des racines (engendré par $\Phi$) et le réseau des poids ($\underline{\underline{Z}}$-dual du réseau engendré par les $\alpha^\vee$). Notons $H$ le groupe $\mathrm{Hom}(\Lambda, \underline{\underline{C}}^\times)$.

Nous définissons le groupe $G = G(\underline{L}, \Lambda)$ associé à l'algèbre de Lie $\underline{L}$ et au réseau $\Lambda$ par un système générateur, à savoir l'ensemble $E = \bigcup_{\alpha \in \Delta} S_\alpha \cup H \cup \exp \underline{u}_+$ (où $\exp \underline{u}_+ \subset \widehat{U(\underline{u}_+)}$ est défini comme plus haut), et des relations que nous allons décrire sous forme de propriétés requises de l'application canonique $\varphi : E \to G$ :

les restrictions de $\varphi$ aux groupes $S_\alpha$, $H$ et $\exp \underline{u}_+$ doivent être des homomorphismes;

on demande que, pour $x \in \underline{u}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$, l'élément $\exp x$ de $S_\alpha$ (rappelons qu'on a identifié $\underline{s}_\alpha$ à l'algèbre de Lie de $S_\alpha$) et l'élément de même nom de $\exp \underline{u}_+$ aient même image par $\varphi$ ; de même pour l'élément $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}_\alpha$ de $S_\alpha$ et l'élément $\lambda \mapsto t^{\alpha^\vee(\lambda)}$ de $H$, pour $t \in \underline{\underline{C}}^\times$ ;

on veut que l'image par $\varphi$ de l'action de $S_\alpha$ sur $\exp \underline{u}'_\alpha$ induite par l'action adjointe (au sein de $\underline{L}$) de $\underline{s}_\alpha$ sur $\underline{u}'_\alpha$ soit la conjugaison, et que $\varphi(S_\alpha)$ centralise l'image par $\varphi$ de $\mathrm{Ker}_H\, \alpha$ (ensemble des $h \in H$ tels que $h(\alpha) = 1$);

enfin, notant $m_\alpha$ l'image de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_\alpha$ par $\varphi$ , on impose la relation

$$m_\alpha m_{\alpha'} m_\alpha \ldots = m_{\alpha'} m_\alpha m_{\alpha'} \ldots \qquad (\alpha, \alpha' \in \Delta),$$

les deux membres comportant chacun $c_{\alpha\alpha'}$ facteurs.

Pour justifier le procédé, il faut encore montrer que le groupe $G$ , ainsi défini par générateurs et relations, n'est ni trop gros (existence d'une décomposition de Bruhat), ni trop petit (injectivité des restrictions de $\varphi$ à $H$ et à $\exp \underline{u}_+$). Cela se fait à l'aide d'un théorème général d'existence de BN-paires (cf. [6]).

Remarques. 1) En caractéristique $p$ non nulle, on doit faire usage de la réduction modulo $p$ de la $\underline{\underline{Z}}$ -forme de Cartier-Kostant de l'algèbre enveloppante et utiliser les puissances réduites pour définir les exponentielles.

2) Dans ce texte, on a profité des conditions particulières où l'on s'était mis, et notamment du fait que le corps de base était supposé algébriquement clos, pour simplifier la forme des relations définissant $G$ ; le cas général n'est cependant pas beaucoup plus compliqué.

3) La méthode esquissée ici, et plus particulièrement le théorème de [6] auquel il a été fait allusion, peut aussi être utilisée pour établir l'existence de certaines extensions centrales de groupes de Chevalley.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CARTAN - Oeuvres complètes, partie I, volume 1. Gauthier Villars, Paris, 1952.

[2] C. CHEVALLEY - Sur certains groupes simples. Tôhoku Math. J. 7 (1955), 14-66.

[3] R. MARCUSON - Tits systems in generalized nonadjoint Chevalley groups. J. Algebra 34 (1975), 84-96.

[4] R. V. MOODY and K. L. TEO - Tits' systems with crystallographic Weyl groups. J. Algebra 21 (1972), 178-190.

[5] J. TITS - Résumé de cours. Annuaire du Collège de France 1980-1981, à paraître.

[6] J. TITS - Définition par générateurs et relations de groupes avec BN-paires. C. R. Acad. Sci., Série I, 293 (1981), à paraître.

Collège de France, Paris

# Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig



See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US $275/year for the electronic version, and $325/year (+$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

**mathematical sciences publishers**

**nonprofit scientific publishing**

http://msp.org/

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1 2018

# Complement to the Collected Works of Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series Heritage of European Mathematics.