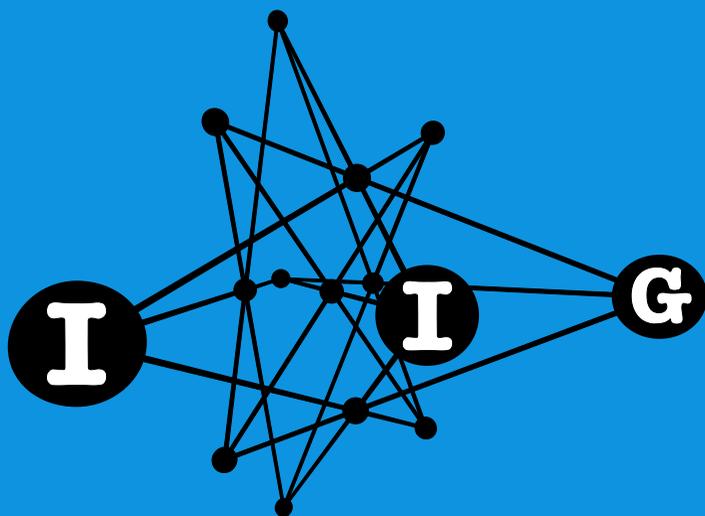


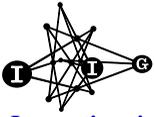
Innovations in Incidence Geometry

Algebraic, Topological and Combinatorial



Groupes algébriques simples sur un corps local

François Bruhat and Jacques Tits



Groupes algébriques simples sur un corps local

François Bruhat and Jacques Tits

[72] Originally published in *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math.* **263** (1966), 822–825. Reused with permission.

THÉORIE DES GROUPEs. — *Groupes algébriques simples sur un corps local.*

Note (*) de MM. FRANÇOIS BRUHAT et JACQUES TITS, présentée par M. Jean Leray.

On garde les notations d'une Note précédente (1). En particulier, K est un corps muni d'une valuation v discrète non triviale, \mathcal{K} est l'anneau et k le corps résiduel de v . On suppose, de plus, K complet et k parfait. On désigne par \tilde{K} l'extension non ramifiée maximale de K , par $\tilde{\mathcal{K}}$ l'anneau des entiers, par \tilde{k} le corps résiduel et par Γ le groupe de Galois de cette extension. On note τ un homomorphisme de groupes de \tilde{k}^* dans $\tilde{\mathcal{K}}^*$ relevant l'application canonique et s'étendant en un homomorphisme d'anneaux de \tilde{k} dans \tilde{K} lorsque $\text{car } k = \text{car } K$. Enfin, on note G un groupe algébrique simple, simplement connexe, défini sur K et de K -rang l .

Si \mathcal{X} est un schéma en groupes affine de type fini lisse sur \mathcal{K} , on note X sa fibre générique, X^0 sa fibre spéciale et X^n le groupe algébrique défini sur k obtenu par application du foncteur de Greenberg au schéma $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{K}} (\mathcal{K}/\pi^{n+1}\mathcal{K})$ (pour $n \in \mathbf{N}$). On identifie le groupe $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$ (resp. $\mathcal{X}_{\tilde{\mathcal{K}}}$) des points de \mathcal{X} à valeurs dans \mathcal{K} (resp. $\tilde{\mathcal{K}}$) avec un sous-groupe de X_K (resp. $X_{\tilde{K}}$). Les X^n forment un système projectif, les homomorphismes de transition étant définis sur k , surjectifs et de noyaux unipotents connexes, et $\mathcal{X}_{\mathcal{K}}$ s'identifie à $\lim_{\leftarrow} X^n_{\tilde{k}}$.

1. Reprenons les hypothèses et notations du n° 1 de (1) (G est donc déployé sur K). Pour toute racine affine $(a, \lambda) \in \Sigma$, posons

$$\tilde{U}(a, \lambda) = \{u_a(t) \mid t \in \tilde{K}, v(t) \geq \lambda\}.$$

Notons \mathfrak{S} le spectre de la \mathcal{K} -algèbre engendrée par les caractères de T ; c'est un schéma en groupes sur \mathcal{K} , dont la fibre générique s'identifie à T . Pour $\alpha \in \Sigma$, notons \mathcal{U}_{α} un schéma en groupes sur \mathcal{K} , isomorphe à $\mathcal{A}dd$, ayant U_{α} pour fibre générique et tel que $(\mathcal{U}_{\alpha})_{\tilde{K}} = \tilde{U}_{\alpha}$; ceci caractérise \mathcal{U}_{α} à isomorphisme près et l'on a aussi $(\mathcal{U}_{\alpha})_K = U_{\alpha}$.

Soit Ω une partie bornée non vide de A . Le sous-groupe de G_K (resp. $G_{\tilde{K}}$) engendré par $H = \mathfrak{S}_{\mathcal{K}}$ (resp. $\text{Ker } \tilde{v} = \mathfrak{S}_{\tilde{\mathcal{K}}}$) et les U_{α} (resp. \tilde{U}_{α}) pour $\alpha \supset \Omega$ est noté P_{Ω} (resp. \tilde{P}_{Ω}). Pour toute racine $a \in \Sigma_0$, soit $\alpha(a)$ l'intersection des racines (a, λ) qui contiennent Ω .

THÉORÈME 1. — *Il existe un schéma en groupes \mathcal{G}_{Ω} affine, de type fini et lisse sur \mathcal{K} et un isomorphisme φ de la fibre générique G_{Ω} sur G tels que :*

- (i) *la bijection $\varphi_{\tilde{K}} : (G_{\Omega})_{\tilde{K}} \rightarrow G_{\tilde{K}}$ induite par φ envoie le groupe $(\mathcal{G}_{\Omega})_{\tilde{\mathcal{K}}}$ sur \tilde{P}_{Ω} ;*

- (ii) l'algèbre affine de \mathcal{G}_Ω s'identifie par φ à l'algèbre des fonctions régulières sur G , définies sur K et prenant des valeurs dans $\tilde{\mathcal{K}}$ en tout point de P_Ω ;
- (iii) La fibre spéciale G_Ω^0 est connexe et les schémas $\mathcal{U}_{\alpha(a)}$ pour $a \in \Sigma_0$, et \mathcal{C} , peuvent être identifiés à des sous-schémas fermés de \mathcal{G}_Ω de telle façon que les restrictions de φ aux fibres génériques U_a et T soient les injections canoniques et que, pour un ordre convenable des racines, l'application produit donne un isomorphisme du schéma produit

$$\prod_{a \in \Sigma_0} \mathcal{U}_{\alpha(a)} \times \mathcal{C}$$

sur un sous-schéma ouvert de \mathcal{G}_Ω .

Chacune de ces propriétés caractérise la paire $(\mathcal{G}_\Omega, \varphi)$ à isomorphisme près. On a $\varphi_{\tilde{\mathcal{K}}}((\mathcal{G}_\Omega)_{\tilde{\mathcal{K}}}) = P_\Omega$.

Le quotient \overline{G}_Ω de G_Ω^0 par son radical unipotent est un groupe réductif connexe de rang égal à celui de G . Désormais, nous identifierons G_Ω à G .

Remarque 1. — Si l'on prend pour Ω une facette, on obtient ainsi un schéma en groupes dont le groupe des points entiers s'identifie à un sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{\mathcal{K}}}$. Lorsque Ω est un point spécial de A [point de V où toutes les racines prennent leurs valeurs dans $\nu(K^*)$], \mathcal{G}_Ω est isomorphe au schéma de Chevalley-Demazure; c'est le seul cas où G_Ω^0 est réductif. Si Ω est réduit au sommet d'une chambre, c'est-à-dire si P_Ω est un sous-groupe parahorique maximal, \overline{G}_Ω est semi-simple; si, par contre, $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ (par exemple, si Ω est une chambre, cas où P_Ω est un sous-groupe d'Iwahori), alors \overline{G}_Ω est un tore (i. e. G_Ω^0 est résoluble).

Remarque 2. — On peut généraliser ce qui précède au cas où Ω n'est pas borné; on trouve alors des schémas en groupes de fibre générique isomorphe à des sous-groupes algébriques de G contenant T .

2. Reprenons maintenant les hypothèses (G quasi déployé et résiduellement déployé sur K) et notations du n° 2 de (1) et gardons celles du numéro précédent, mais en y remplaçant K par L . Soit $\Omega \subset A^{\frac{1}{2}}$ et notons $P_\Omega^{\frac{1}{2}}$ et $\tilde{P}_\Omega^{\frac{1}{2}}$ les sous-groupes de $G_{\tilde{\mathcal{K}}}$ et $G_{\tilde{\mathcal{K}}}$ correspondant à Ω de la même façon que ci-dessus, mais pour la donnée radicielle du n° 2 de (1). Le groupe Γ opère sur \mathcal{G}_Ω . Comme il opère trivialement sur \tilde{k} , on en déduit une action de Γ par automorphismes algébriques sur chacun des groupes G_Ω^n ; soit $(G_\Omega^n)^{\frac{1}{2}}$ le groupe des points fixes de cette action et soit $(G_\Omega^{\frac{1}{2}})^n$ l'intersection des images dans G_Ω^n des $(G_\Omega^m)^{\frac{1}{2}}$ pour $m \geq n$.

THÉORÈME 2. — Les groupes $(G_\Omega^{\frac{1}{2}})^n$ sont des groupes algébriques connexes définis sur k ; ils forment un système projectif dont les homomorphismes de transition sont surjectifs à noyaux unipotents connexes. L'application canonique (« réduction ») $\tilde{P}_\Omega \rightarrow (G_\Omega^n)_{\tilde{\mathcal{K}}}$ envoie $\tilde{P}_\Omega^{\frac{1}{2}}$ dans $(G_\Omega^{\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{K}}}^n$ et $P_\Omega^{\frac{1}{2}}$ dans $(G_\Omega^{\frac{1}{2}})_k^n$. Les homomorphismes $\tilde{P}_\Omega^{\frac{1}{2}} \rightarrow \varprojlim (G_\Omega^{\frac{1}{2}})_{\tilde{\mathcal{K}}}^n$ et $P_\Omega^{\frac{1}{2}} \rightarrow \varprojlim (G_\Omega^{\frac{1}{2}})_k^n$ qu'on en déduit

sont respectivement une injection dense (pour la topologie de la limite projective) et une bijection.

Le quotient $\overline{G}_\Omega^\natural$ de $(G_\Omega^\natural)^0$ par son radical unipotent est un groupe réductif déployé, dont le type semi-simple se déduit du diagramme de Dynkin résiduel Δ de G [cf. (1)] de la façon suivante. Quitte à transformer Ω par un élément de W^\natural , nous pouvons supposer que le sous-espace affine de A^\natural engendré par Ω est intersection des hyperplans de points fixes d'un ensemble J de générateurs distingués de W^\natural . Alors :

PROPOSITION 1. — *Le diagramme de Dynkin de $\overline{G}_\Omega^\natural$ est le sous-diagramme de Δ dont les sommets correspondent aux éléments de J .*

PROPOSITION 2. — *Supposons que Ω soit une facette de A^\natural . Soit ρ l'application canonique de P_Ω^\natural dans $(\overline{G}_\Omega^\natural)_k$. L'application $Q \mapsto \rho^{-1}(Q_k)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques (resp. des sous-groupes de Borel) définis sur k de $\overline{G}_\Omega^\natural$ sur l'ensemble des sous-groupes parahoriques (resp. des sous-groupes d'Iwahori) de G_k contenus dans P_Ω^\natural .*

3. Revenons au cas général. Le groupe G est résiduellement déployé sur \tilde{K} . Si $P = \tilde{P}_\Omega^\natural$ est un sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{K}}$, nous noterons désormais P^n et \overline{P} les groupes algébriques sur \tilde{k} notés ci-dessus $(G_\Omega^\natural)^n$ et $\overline{G}_\Omega^\natural$. Nous dirons que P est défini sur k ou est un k -sous-groupe parahorique, s'il est invariant par Γ , et l'on posera alors $P_k = P \cap G_{\tilde{K}}$. Dans ce cas, Γ opère sur le système projectif des P^n , de sorte que les groupes algébriques P^n et \overline{P} « sont » définis sur k .

PROPOSITION 3. — *Si P est un k -sous-groupe parahorique, l'homomorphisme canonique $P_k \rightarrow \overline{P}_k$ est surjectif.*

Soit S un tore de G , déployé sur K . On appelle *minitore* de S , le sous-groupe $\text{Mini } S$ des $s \in S_{\tilde{K}}$ tels que $\chi(s) \in \tau(\tilde{k}^*)$ pour tout caractère χ de S . Il est muni d'une structure naturelle de tore défini sur \tilde{k} , et même sur k lorsque S est défini sur K . Un sous-groupe M de $G_{\tilde{K}}$ est appelé un *minitore* (resp. k -*minitore*) s'il existe un tore S déployé sur \tilde{K} (resp. et défini sur K) tel que $M = \text{Mini } S$ (et S est alors l'adhérence de Zariski de M).

PROPOSITION 4. — *Soit P un sous-groupe parahorique (resp. un k -sous-groupe parahorique) de $G_{\tilde{K}}$. Tout tore (resp. k -tore) de \overline{P} est l'image d'un minitore (resp. k -minitore) de P . Deux minitores (resp. k -minitores) contenus dans P sont conjugués dans P (resp. par un élément de P_k) si et seulement si leurs images dans P sont conjuguées (resp. par un élément de \overline{P}_k).*

Faisant usage du théorème 1 de (2), on montre que :

PROPOSITION 5. — *Soit S un K -tore de G , déployé sur \tilde{K} . Il existe un k -sous-groupe parahorique de $G_{\tilde{K}}$ contenant $\text{Mini } S$.*

Utilisant la proposition 4, on en déduit :

COROLLAIRE 1. — *Il existe un tore déployé sur \tilde{K} maximal de G , contenant S et défini sur K .*

4. Soient S un tore de G déployé sur K maximal, T un tore déployé sur \tilde{K} maximal défini sur K contenant S et $Z(S)$ le centralisateur de S . D'après (1), n° 2, on a une donnée radicielle $(N, \nu, (U_\alpha))$ dans G_K , avec $N = (\text{Norm } T)_K$ [donnée notée $(N^\sharp, \nu^\sharp, (U_\alpha^\sharp))$ dans (1)]. Si $l = \dim S > 0$, le groupe Γ satisfait aux conditions du n° 7 de (2). On a alors :

THÉORÈME 1. — *Les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 3 de (2) sont remplies. Avec les notations utilisées là, on a $N^\sharp = (\text{Norm } S)_K$ et $H^\sharp = \{h \in Z(S)_K \mid \chi(h) \in \mathcal{K} \text{ pour tout caractère } \chi \text{ de } Z(S)\}$. Le groupe $W^\sharp = N^\sharp/H^\sharp$ est une extension du groupe de Weyl relatif à K de G par un groupe abélien libre de rang l . Si $\alpha \in \Sigma^\sharp$, l'adhérence de Zariski de U_α^\sharp est le sous-groupe unipotent $U_{(\alpha)}$ associé à une K -racine non divisible α de G et $(U_{(\alpha)})_K$ est la réunion des U_β^\sharp pour $\beta \in \Sigma^\sharp$ et $\beta \subset \alpha$.*

Le théorème 3 de (2) fournit donc une donnée radicielle et une BN-paire de groupe de Weyl W^\sharp dans G_K , d'où la notion de sous-groupe parahorique de G_K . Si $l = 0$, on a $N^\sharp = H^\sharp = G_K$ et G_K lui-même est l'unique sous-groupe parahorique de G_K . D'après (2), n° 4, on a :

PROPOSITION 6. — *Tout sous-groupe borné (3) de G_K est contenu dans un sous-groupe borné maximal. Les sous-groupes bornés maximaux de G_K sont les sous-groupes parahoriques maximaux et forment $l + 1$ classes de conjugaison.*

PROPOSITION 7. — *Les sous-groupes parahoriques de G_K sont les intersections de G_K avec les k -sous-groupes parahoriques de $G_{\tilde{K}}$. Deux k -sous-groupes parahoriques de $G_{\tilde{K}}$ sont conjugués dans $G_{\tilde{K}}$ ou coïncident si et seulement si leurs intersections avec G_K sont conjuguées dans G_K ou coïncident. Les k -sous-groupes parahoriques minimaux de $G_{\tilde{K}}$ sont conjugués entre eux par des éléments de G_K .*

COROLLAIRE 2. — *Si G est K -anisotrope, $G_{\tilde{K}}$ possède un et un seul k -sous-groupe parahorique. Il contient G_K et G_K est borné.*

(*) Séance du 7 novembre 1966.

(1) F. BRUHATS et J. TITS, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 598.

(2) F. BRUHAT et J. TITS, *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 766.

(3) Une partie de G_K est dite bornée si toute fonction régulière sur G y est bornée.

Innovations in Incidence Geometry

msp.org/iig

MANAGING EDITOR

Tom De Medts	Ghent University tom.demedts@ugent.be
Linus Kramer	Universität Münster linus.kramer@wwu.de
Klaus Metsch	Justus-Liebig Universität Gießen klaus.metsch@math.uni-giessen.de
Bernhard Mühlherr	Justus-Liebig Universität Gießen bernhard.m.muehlherr@math.uni-giessen.de
Joseph A. Thas	Ghent University thas.joseph@gmail.com
Koen Thas	Ghent University koen.thas@gmail.com
Hendrik Van Maldeghem	Ghent University hendrik.vanmaldeghem@ugent.be

HONORARY EDITORS

Jacques Tits
Ernest E. Shult †

EDITORS

Peter Abramenko	University of Virginia
Francis Buekenhout	Université Libre de Bruxelles
Philippe Cara	Vrije Universiteit Brussel
Antonio Cossidente	Università della Basilicata
Hans Cuypers	Eindhoven University of Technology
Bart De Bruyn	University of Ghent
Alice Devillers	University of Western Australia
Massimo Giulietti	Università degli Studi di Perugia
James Hirschfeld	University of Sussex
Dimitri Leemans	Université Libre de Bruxelles
Oliver Lorscheid	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)
Guglielmo Lunardon	Università di Napoli “Federico II”
Alessandro Montinaro	Università di Salento
James Parkinson	University of Sydney
Antonio Pasini	Università di Siena (emeritus)
Valentina Pepe	Università di Roma “La Sapienza”
Bertrand Rémy	École Polytechnique
Tamás Szonyi	ELTE Eötvös Loránd University, Budapest

PRODUCTION

Silvio Levy (Scientific Editor)
production@msp.org

See inside back cover or msp.org/iig for submission instructions.

The subscription price for 2019 is US \$275/year for the electronic version, and \$325/year (+\$20, if shipping outside the US) for print and electronic. Subscriptions, requests for back issues and changes of subscriber address should be sent to MSP.

Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial (ISSN 2640-7345 electronic, 2640-7337 printed) at Mathematical Sciences Publishers, 798 Evans Hall #3840, c/o University of California, Berkeley, CA 94720-3840 is published continuously online. Periodical rate postage paid at Berkeley, CA 94704, and additional mailing offices.

IIG peer review and production are managed by EditFlow® from MSP.

PUBLISHED BY

 **mathematical sciences publishers**
nonprofit scientific publishing
<http://msp.org/>

© 2019 Mathematical Sciences Publishers

Innovation in Incidence Geometry

Vol. 16 No. 1

2018

Complement to the Collected Works of
Jacques Tits

edited by Bernhard Mühlherr and Hendrik Van Maldeghem

This volume contains 31 writings of Jacques Tits that were not included in his four-volume *Œuvres – Collected Works*, published by the European Mathematical Society in 2013 in the series *Heritage of European Mathematics*.

