

Une nouvelle preuve du théorème de point fixe de Handel

PATRICE LE CALVEZ

M Handel has proved in [11] a fixed point theorem for an orientation preserving homeomorphism of the open unit disk, that may be extended to the closed disk and that satisfies a linking property of orbits. We give here a new proof of Handel’s fixed point theorem, based on Brouwer theory and some plane topology arguments. We will slightly improve the theorem by proving the existence of a simple closed curve of index 1. This index result was known to be true under an additional hypothesis and has been used by different authors (J Franks [9; 8], S Matsumoto [16]) to study homeomorphisms of surfaces.

[37B20](#), [37C25](#), [37E30](#); [37E45](#), [37J10](#)

0 Introduction

M Handel a énoncé et prouvé dans [11] un théorème d’existence de point fixe pour un homéomorphisme f préservant l’orientation du disque $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, qui se prolonge au bord et qui vérifie une propriété d’enlacement d’orbites qui s’énonce sous différentes formes, par exemple sous la forme suivante: il existe n points z_i dans \mathbf{D} tels que

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(z_i) = \alpha_i, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(z_i) = \omega_i,$$

où les $2n$ points α_i et ω_i sont des points distincts de $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et où les droites Δ_i passant par α_i et ω_i délimitent un polygone convexe compact à n côtés inclus dans \mathbf{D} . Il s’agit d’un résultat d’une grande importance pour l’étude des homéomorphismes de surfaces, qui a maintes fois été utilisé dans le domaine (voir J Franks [9; 8] ou S Matsumoto [16]). Dans la plupart des cas où ce théorème est utilisé, l’homéomorphisme f vérifie une propriété supplémentaire qui permet d’obtenir une conclusion plus forte: il existe une courbe fermée simple $C \subset \mathbf{D}$ ne contenant pas de point fixe de f et dont l’indice est 1. Rappelons que si $\Gamma: s \mapsto \Gamma(s)$ est un paramétrage de C défini sur S^1 , l’indice $i(f, C)$ est égal au degré de l’application

$$s \mapsto \frac{f(\Gamma(s)) - \Gamma(s)}{|f(\Gamma(s)) - \Gamma(s)|}.$$

Si $i(f, C) \neq 0$, on sait alors que f a un point fixe dans la composante connexe de $\mathbf{D} \setminus C$ qui est simplement connexe.

La preuve de Handel de ce théorème de point fixe est considérée comme difficile. Elle utilise en particulier une généralisation de la classification de Nielsen-Thurston des homéomorphismes de surfaces, au cas du disque \mathbf{D} privé d'une réunion finie d'orbites sans point limite. Elle utilise également la théorie de Brouwer des homéomorphismes du disque et une version homotopique de cette théorie. Nous donnons dans cet article une nouvelle preuve du théorème du point fixe de Handel qui n'utilise que la théorie de Brouwer "classique" et où n'apparaissent donc aucun argument géométrique (existence d'une métrique de courbure -1 , groupes fuchsien, ...). Même si la preuve n'est pas très courte, elle n'utilise, outre une partie de la théorie de Brouwer, que des arguments simples de topologie plane. Nous prouverons que les hypothèses du théorème impliquent l'existence d'une *chaîne fermée de disques libres*, c'est-à-dire d'une famille $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$ de parties ouvertes disjointes, connexes et simplement connexes, vérifiant $f(D_i) \cap D_i = \emptyset$, telle que $\bigcup_{k \geq 1} f^k(D_i) \cap D_{i+1} \neq \emptyset$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$. Le lemme de Franks [7] énonce qu'il existe alors une courbe fermée simple $C \subset \mathbf{D}$ ne contenant pas de point fixe de f et dont l'indice est 1. Ainsi le résultat d'indice est vrai sous les hypothèses du théorème du point fixe de Handel, il n'y a pas besoin d'ajouter des hypothèses. Nous verrons également que l'hypothèse de prolongement au bord peut être légèrement affaiblie.

Énonçons donc le théorème, dont les hypothèses sont illustrées sur la [Figure 1](#):

Théorème 0.1 *Soit f un homéomorphisme de \mathbf{D} qui préserve l'orientation et n un entier supérieur ou égal à 3. On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites:*

- (i) *il existe une famille $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ dans \mathbf{D} et deux familles $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ dans S^1 , telles que $\lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(z_i) = \alpha_i$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(z_i) = \omega_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;*
- (ii) *les $2n$ points $\alpha_i, \omega_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont distincts;*
- (iii) *le seul, parmi ces points, qui se trouve sur l'intervalle ouvert du cercle orienté S^1 joignant ω_{i-1} à ω_i est α_{i+1} ;*
- (iv) *f se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbf{D} \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \{\alpha_i, \omega_i\} \right)$.*

Il existe alors une courbe fermée simple $C \subset \mathbf{D}$ ne contenant pas de point fixe de f et dont l'indice est 1.

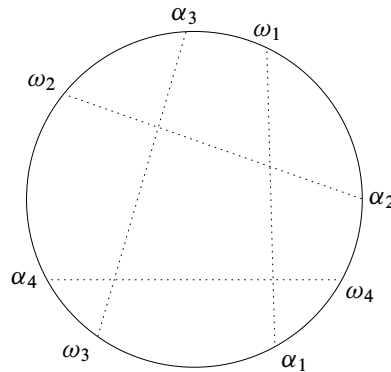


Figure 1

Remarques

(1) Le prolongement défini par (iv) fixe nécessairement les points α_i et ω_i . Cette hypothèse de prolongement est indispensable. En effet, nous rappellerons dans la prochaine section que les orbites d'un homéomorphisme f de \mathbf{D} , qui préserve l'orientation et qui n'a pas de point fixe, n'ont pas de point limite (en d'autres termes tendent vers le bout de \mathbf{D} en $-\infty$ et $+\infty$). Ainsi, si $n \geq 3$ est fixé, si $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est une famille arbitraire de points de \mathbf{D} d'orbites distinctes, si $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $(\omega_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ sont deux familles arbitraires dans S^1 qui vérifient les hypothèses (ii) et (iii), il n'est pas difficile de construire un homéomorphisme h de \mathbf{D} préservant l'orientation, pour que l'hypothèse (i) soit satisfaite par la famille $(h(z_i))_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et l'homéomorphisme $h \circ f \circ h^{-1}$. L'hypothèse de prolongement qui est supposée dans l'article original de Handel est un peu plus forte: f se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\mathbf{D}}$.

(2) La propriété d'enlacement (ici l'hypothèse (iii)) peut être formulée différemment. Ainsi, dans l'article de Handel, les z_i sont indexés par $\{1, \dots, n\}$, et l'hypothèse (iii) est remplacée par les deux assertions suivantes:

(iii') *tout intervalle de S^1 délimité par deux points α -limites (resp. ω -limites) contient un point ω -limite (resp. α -limite);*

(iii'') *pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $i' \in \{1, \dots, n\}$ tel que α_i et ω_i sont séparés sur S^1 par $\alpha_{i'}$ et $\omega_{i'}$.*

Expliquons rapidement pourquoi ces deux conditions impliquent que la propriété (iii) est vraie (à orientation près) si on ne garde qu'un certain nombre des z_i . Notons Δ_i la droite affine réelle orientée, engendrée par le vecteur joignant α_i à ω_i , et Π_i^+ (resp. Π_i^-) le demi-plan affine situé strictement à gauche (resp. à droite) de Δ_i . Quitte à

perturber légèrement les points α_i et ω_i , on peut supposer que l'intersection de trois droites Δ_i est toujours vide. Il suffit de trouver une partie I de $\{1, \dots, n\}$ telle que l'intersection $\bigcap_{i \in I} \Pi_i^+$ ou $\bigcap_{i \in I} \Pi_i^-$ soit relativement compacte dans \mathbf{D} , puis de choisir $I' \subset I$, minimale parmi les parties de I satisfaisant cette propriété. L'assertion (iii') implique que la fonction $\nu: \mathbb{C} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta_i \rightarrow \mathbb{N}$, qui à z associe le nombre de demi-plans Π_i^+ contenant z , prend exactement deux valeurs au voisinage de S^1 et que ces deux valeurs sont des entiers consécutifs. L'assertion (iii'') implique qu'il existe au moins deux droites Δ_i et $\Delta_{i'}$ qui s'intersectent dans \mathbf{D} . Au voisinage du point d'intersection, la fonction ν prend trois valeurs consécutives. On en déduit que le maximum ou le minimum de la fonction ν sur $\mathbf{D} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta_i$ n'est pas l'une des deux valeurs près du bord. Dans le premier cas (resp. second cas), on considère une composante connexe U de $\mathbf{D} \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Delta_i$ où ce maximum (resp. minimum) est atteint. Elle est relativement compacte dans \mathbf{D} et on peut écrire $U = \bigcap_{i \in I} \Pi_i^+$ (resp. $U = \bigcap_{i \in I} \Pi_i^-$), où $I \subset \{1, \dots, n\}$.

Nous allons continuer cette introduction en rappelant certaines applications importantes du théorème de Handel à l'étude des homéomorphismes de surfaces isotopes à l'identité. Si $(F_t)_{t \in [0,1]}$ est une isotopie issue de l'identité sur une surface M , on peut définir la trajectoire $\gamma_z: t \mapsto F_t(z)$ de tout point $z \in M$. Si z est un point périodique, de période $q \geq 1$, on obtient alors un lacet $\prod_{0 \leq i \leq q-1} \gamma_{F_1^i(z)}$ par assemblage des trajectoires, dont on note $\kappa(z_i) \in H_1(M, \mathbb{Z})$ la classe d'homologie. Les deux résultats qui suivent sont des conséquences directes du théorème de point fixe. Le premier est attribué par Franks dans [8] à M Betsvina et Handel, le second est dû à Franks [9]. Nous rappellerons également les grandes lignes des preuves que l'on trouve dans [9] et [8].

Théorème 0.2 *Soit M une partie ouverte de la sphère S^2 , dont le complémentaire a au moins trois composantes connexes, et \tilde{M} son revêtement universel. Soit $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie sur M issue de l'identité, et $(f_t)_{t \in [0,1]}$ l'isotopie relevée à \tilde{M} qui est issue de l'identité. S'il existe un point périodique z_0 , de période $q \geq 1$, tel que $\kappa(z_0) = 0$, alors on peut trouver une courbe fermée simple $C \subset \tilde{M}$ ne contenant pas de point fixe de f_1 et dont l'indice $i(f_1, C)$ est 1. En particulier, F_1 a au moins un point fixe.*

Idée de la preuve On peut munir M d'une structure riemannienne complète de courbure -1 et identifier le revêtement universel \tilde{M} au disque de Poincaré \mathbf{D} . On sait alors que f_1 se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\mathbf{D}}$ qui fixe tout point de S^1 (voir Handel et Thurston [12]). Notons Γ l'unique géodésique fermée qui est librement homotope à $\prod_{0 \leq i \leq q-1} \gamma_{F_1^i(z_0)}$. Tout relèvement de Γ dans \mathbf{D} est une géodésique de \mathbf{D} qui joint un point $\alpha \in S^1$ à un point $\omega \in S^1$. De plus, il existe un antécédent \tilde{z}_0 de z_0 tel que $\lim_{k \rightarrow -\infty} f_1^k(z_0) = \alpha$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_1^k(z_0) = \omega$. Puisque Γ est homologue à

zéro dans M , il existe une fonction $\Lambda: M \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$, à support relativement compact, tel que $\Lambda(z') - \Lambda(z)$ représente le nombre d'intersection algébrique $\Gamma \wedge \Gamma'$ entre Γ et un arc quelconque Γ' qui joint z à z' . L'un au moins des deux nombres $\max \Lambda$ ou $\min \Lambda$ doit être non nul. Supposons par exemple que $\max \Lambda \neq 0$ et fixons une composante connexe U de $M \setminus \Gamma$ où Λ atteint son maximum. Il n'est pas difficile de voir que U est un disque ouvert, que sa frontière est une courbe fermée simple, réunion de p sous-segments de Γ , et que U est localement à gauche de chacun de ces segments. Toute composante connexe de la préimage de U dans \mathbf{D} est l'intersection (relativement compacte) de p demi-plans géodésiques, à gauche de géodésiques relevant Γ . Parmi ces demi-plans, on choisit une famille dont l'intersection est relativement compacte dans \mathbf{D} , et qui est minimale pour cette propriété. Les conditions du [Théorème 0.1](#) sont alors vérifiées. \square

Théorème 0.3 *Soit M une surface compacte orientable de genre $g \geq 1$ et \tilde{M} son revêtement universel. Soit $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie sur M issue de l'identité et $(f_t)_{t \in [0,1]}$ l'isotopie relevée à \tilde{M} qui est issue de l'identité. On suppose qu'il existe $2g + 1$ points périodiques z_i , $0 \leq i \leq 2g$, tels que l'intérieur de l'enveloppe convexe des $\kappa(z_i) \in H_1(M, \mathbb{R})$ contient 0. Il existe alors une courbe fermée simple $C \subset \tilde{M}$ ne contenant pas de point fixe de f_1 et dont l'indice $i(f_1, C)$ est 1. En particulier, F_1 a au moins deux points fixes.*

Idée de la preuve Dans le cas où $g \geq 2$, la preuve est très proche de celle du [Théorème 0.2](#). On munit M d'une structure riemannienne de courbure -1 et on identifie \tilde{M} à \mathbf{D} . On sait, là encore, que f_1 se prolonge en un homéomorphisme de $\bar{\mathbf{D}}$ qui fixe tout point de S^1 . On note Γ_i la géodésique fermée homotope à $\prod_{0 \leq i \leq q_i - 1} \gamma_{F_1^i(z_0)}$, où q_i est la période de z_i . On peut alors trouver des entiers $m_i > 0$ tels que $\sum_{i=0}^{2g} m_i \kappa(z_i) = 0$. La multi-courbe $\Gamma = \sum_{i=0}^{2g} m_i \Gamma_i$ est homologue à zéro et on lui associe une fonction duale $\Lambda: M \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$, comme dans la preuve du [Théorème 0.2](#). Là encore, on peut supposer que $\max \Lambda \neq 0$. Pour montrer le résultat d'indice, il suffit de prouver que toute composante connexe U de $M \setminus \Gamma$ où Λ atteint son maximum est un disque ouvert, puis de reprendre les arguments donnés dans la preuve précédente. Puisque les classes $[\Gamma_i]$ engendrent $H_1(M, \mathbb{R})$, l'application $\iota_*: H_1(U, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ induite par l'inclusion $\iota: U \rightarrow M$ doit être nulle. On en déduit que l'intersection algébrique entre deux lacets quelconques de U est nul et donc que U est de genre zéro. Il reste à montrer que son complémentaire est connexe. Dans le cas contraire, il existerait une partition non triviale $\{0, \dots, 2g\} = I_1 \sqcup I_2$, telle que $\sum_{i \in I_1} m_i [\Gamma_i] = \sum_{i \in I_2} m_i [\Gamma_i] = 0$, ce qui contredirait le fait que 0 est à l'intérieur de l'enveloppe convexe des $[\Gamma_i]$.

Si $g = 1$, la preuve est plus simple. On peut écrire $M = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$ et on sait alors que f_1 commute avec les translations entières. On en déduit que $f_1 - \text{Id}_{\mathbb{C}}$ est

une application bornée et donc que f_1 se prolonge en un homéomorphisme sur le compactifié de \mathbb{C} obtenu en rajoutant les directions à l'infini. En d'autres termes, l'homéomorphisme $\tilde{f}_1 = h \circ f_1 \circ h^{-1}$ de \mathbf{D} , conjugué par $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{D}, z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$, se prolonge en l'identité sur S^1 . Remarquons maintenant que \tilde{f}_1 vérifie les hypothèses du [Théorème 0.1](#). avec $n = 3$.

Dans chacun des cas, on sait que f_1 (et donc que F_1) a au moins un point fixe. Si F_1 n'avait qu'un seul point fixe, la formule de Lefschetz nous dirait que son indice de Lefschetz est $2 - 2g$. Tout point fixe de f_1 serait donc d'indice $2 - 2g$, ce qui impliquerait que l'indice de toute courbe fermée simple C ne contenant pas de point fixe de f_1 serait égal à $m(2 - 2g) \leq 0$, l'entier m étant le nombre de points fixes dans la composante connexe simplement connexe de $\tilde{M} \setminus C$. Le même raisonnement, en utilisant cette fois-ci la formule de Lefschetz-Nielsen, nous dit en fait que F_1 a au moins deux points fixes qui se relèvent en des points fixes de f_1 . \square

En utilisant alors un simple argument de perturbation, Franks donne dans [\[9\]](#) la version plus générale suivante, où l'ensemble de rotation désigne la partie convexe et compacte formée des vecteurs de rotation (ou enlacements asymptotiques) de toutes les mesures boréliennes de probabilité invariantes par F_1 (voir S Schwartzman [\[18\]](#)).

Théorème 0.4 *Soit M une surface compacte orientable de genre $g \geq 1$ et \tilde{M} son revêtement universel. Soit $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie sur M issue de l'identité et $(f_t)_{t \in [0,1]}$ l'isotopie relevée à \tilde{M} qui est issue de l'identité. Si l'ensemble de rotation $\rho(f_1) \subset H_1(M, \mathbb{R})$ défini par l'isotopie contient 0 dans son intérieur, il existe alors une courbe fermée simple $C \subset \tilde{M}$ ne contenant pas de point fixe de f_1 et dont l'indice $i(f_1, C)$ est 1.*

Les résultats précédents sont d'une grande utilité pour montrer l'existence de points fixes ou de points périodiques. Intéressons nous par exemple au cas où M est une surface compacte munie d'une forme symplectique et l'isotopie $(F_t)_{t \in [0,1]}$ est hamiltonienne (i.e. induite par un champ de vecteurs hamiltonien de classe C^1 dépendant du temps). Le vecteur de rotation de la mesure naturellement définie par la forme est alors égal à 0. Un résultat, dû indépendamment à A Floer [\[5\]](#) et à J C Sikorav [\[19\]](#), nous dit que F_1 a au moins trois points fixes z contractiles (i.e. tels que le lacet γ_z soit homotope à zéro). Dans [\[9\]](#), Franks donne une preuve de ce résultat qui se déduit du [Théorème 0.4](#), toujours par des arguments de perturbation. La méthode de Franks a été généralisée au cas des homéomorphismes. Matsumoto [\[16\]](#) utilise également le théorème de point fixe de Handel pour donner la version topologique suivante de la conjecture d'Arnold pour les homéomorphismes de surfaces:

Théorème 0.5 Soit M une surface compacte orientable de genre $g \geq 1$ et $(F_t)_{t \in [0,1]}$ une isotopie issue de l'identité. On suppose que F_1 préserve la mesure de Lebesgue μ et que le vecteur de rotation de cette mesure est nul. Il existe alors au moins trois points fixes contractiles.

Nous rappellerons dans la section qui suit certains points de la théorie des homéomorphismes du plan initiée par Brouwer. En particulier, nous donnerons des critères d'existence de courbes fermées simple d'indice 1 pour un homéomorphisme de \mathbf{D} qui préserve l'orientation. Nous rappellerons dans la Section 2 la notion de décomposition en briques libre, qui sera l'outil principal pour montrer que ces critères sont vérifiés. Nous donnerons à la fin de la Section 2 le plan de la preuve du Théorème 0.1. Nous détaillerons cette preuve à partir de la Section 3. Nous allons conclure cette introduction en introduisant les principales définitions de cet article.

On écrira respectivement \bar{X} , $\text{Int}(X)$, ∂X pour l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'une partie X d'un espace topologique E . On dira qu'une partie $Y \subset E$ sépare deux parties connexes X_1 et X_2 si Y est disjoint de X_1 et X_2 et si X_1 et X_2 sont dans des composantes connexes différentes de $E \setminus Y$.

On appellera *disque ouvert* (resp. *disque fermé*) d'une surface M toute partie homéomorphe à \mathbf{D} (resp. à $\bar{\mathbf{D}}$).

On appellera *arc* une application continue γ d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ vers une surface M , ou plus précisément, une classe d'équivalence d'applications par reparamétrage préservant l'orientation. On utilisera souvent, par abus de langage, le mot arc pour désigner l'image de l'arc, en faisant bien attention qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

Si $\gamma_1: I_1 \rightarrow M$ et $\gamma_2: I_2 \rightarrow M$ sont deux arcs tels que

$$\sup I_1 \in I_1, \quad \inf I_2 \in I_2, \quad \gamma_1(\sup I_1) = \gamma_2(\inf I_2),$$

on notera $\gamma_1\gamma_2$ l'arc naturellement défini par assemblage de γ_1 et γ_2 . Si J est un intervalle de \mathbb{Z} et si $(\gamma_j)_{j \in J}$ est une famille d'arcs $\gamma_j: I_j \rightarrow M$ telle que

$$\sup I_j \in I_j, \quad \inf I_{j+1} \in I_{j+1}, \quad \gamma_j(\sup I_j) = \gamma_{j+1}(\inf I_{j+1}),$$

si j et $j + 1$ appartiennent à J , on écrira $\prod_{j \in J} \gamma_j$ l'arc défini par assemblage des γ_j .

On appellera *droite* (resp. *demi-droite négative*, *demi-droite positive*, *segment*, *cercle*) d'une surface M tout plongement topologique propre de \mathbb{R} (resp. $]-\infty, 0]$, $[0, +\infty[$, $[0, 1]$, S^1), plus précisément, toute classe d'équivalence d'un tel plongement par reparamétrage préservant l'orientation. Un tel objet est alors déterminé par son image et une orientation. On utilisera, là encore, le mot droite, demi-droite, segment ou cercle,

pour désigner l'image du plongement. Si γ est un segment ou une demi-droite, on notera $\text{int}(\gamma)$ l'arc privé des ses extrémités.

On notera $\text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ l'ensemble des homéomorphismes du disque \mathbf{D} qui préservent l'orientation. Pour tout $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ on notera $\text{Fix}(f)$ l'ensemble des points fixes de f . On dira qu'une partie $X \subset \mathbf{D}$ est *libre* si $f(X) \cap X = \emptyset$.

On identifiera \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , via l'isomorphisme naturel $(x, y) \mapsto x + iy$.

1 Rappels sur la théorie de Brouwer

Commençons par rappeler le *lemme de translation de Brouwer* qui est le point fondamental de la théorie (voir [1], [2], [4] ou [10]):

Proposition 1.1 Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$. On peut trouver un cercle d'indice 1 dans chacun des deux cas suivants:

- il existe un segment γ qui joint un point $z \in \text{Fix}(f^2) \setminus \text{Fix}(f)$ à $f(z)$ et tel que $f(\gamma) \cap \gamma = \{z, f(z)\}$;
- il existe un segment γ qui joint un point $z \notin \text{Fix}(f^2)$ à $f(z)$, tel que $f(\gamma) \cap \gamma = \{f(z)\}$, et un entier $k \geq 2$ tel que $f^k(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$.

Un segment γ qui joint un point $z \notin \text{Fix}(f)$ à $f(z)$ et tel que

$$\begin{cases} f(\gamma) \cap \gamma = \{z, f(z)\} & \text{si } f^2(z) = z \\ f(\gamma) \cap \gamma = \{z\} & \text{si } f^2(z) \neq z, \end{cases}$$

s'appelle un *arc de translation* de f (voir Figure 2).

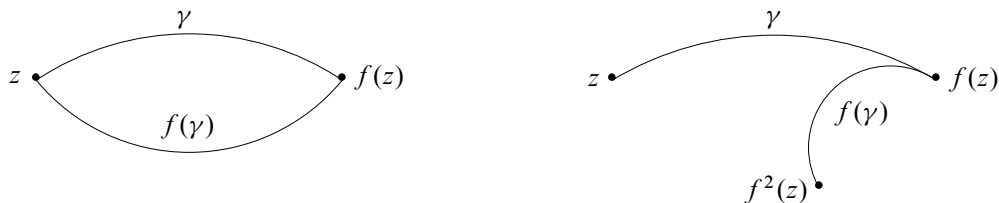


Figure 2

Il n'est pas difficile de montrer que tout point qui n'est pas fixe appartient à un arc de translation (nous en rappellerons d'ailleurs la preuve en Section 3). On en déduit l'énoncé suivant:

Proposition 1.2 Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$. S'il existe un point périodique qui n'est pas fixe, alors il existe un cercle d'indice 1.

Démonstration Supposons que z' soit un point périodique de période $q \geq 2$ et considérons un arc de translation γ joignant un point z à $f(z)$ et contenant z' . Remarquons maintenant que l'une des deux hypothèses de la Proposition 1.1 est nécessairement vérifiée. \square

Énonçons maintenant le *lemme de Franks*, introduit dans [7], qui étend le critère précédent. Pour cela, rappelons qu'une *chaîne fermée* de $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ est une famille $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$ de parties de \mathbf{D} telle que, pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, $\bigcup_{k \geq 1} f^k(X_i) \cap X_{i+1} \neq \emptyset$. L'entier r est alors la *longueur* de la chaîne.

Proposition 1.3 Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$. S'il existe une chaîne fermée de disques ouverts libres disjoints deux à deux, alors il existe un cercle d'indice 1.

Démonstration Supposons qu'il existe une chaîne fermée de disques ouverts libres disjoints deux à deux. Parmi ces chaînes, choisissons en une de longueur minimale, notée $(D_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, choisissons un point $z_i \in D_i$ dont l'orbite positive rencontre D_{i+1} , en notant $f^{k_i}(z_i)$ le premier point où cette orbite rencontre D_{i+1} . Puisque r est minimal, on peut remarquer que tout point $f^k(z_i)$, $0 < k < k_i$, est en dehors de chaque disque de la chaîne. On peut construire une isotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\text{Homeo}^+(\mathbf{D})$, issue de l'identité, telle que le support de chaque h_t est inclus dans $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} D_i$, et telle que h_1 envoie $f^{k_i}(z_i)$ sur z_{i+1} . Remarquons alors que $h_1 \circ f$ a un point périodique de période $\sum_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} k_i \geq 2$. D'après la Proposition 1.2, il existe un cercle $C \subset \mathbf{D} \setminus \text{Fix}(h_1 \circ f)$ tel que $i(h_1 \circ f, C) = 1$. Remarquons, puisque les disques D_i sont libres, que $\text{Fix}(h_t \circ f) = \text{Fix}(f)$, pour tout $t \in [0, 1]$. On en déduit que la fonction $t \mapsto i(h_t \circ f, C)$ est bien définie. Elle est continue et à valeurs entières, elle est donc constante égale à 1. \square

Nous dirons qu'un homéomorphisme $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ est *récurrent* s'il vérifie les hypothèses du lemme de Franks, c'est-à-dire s'il existe une chaîne fermée de disques ouverts libres disjoints deux à deux. Nous pouvons alors énoncer deux classiques critères de récurrence:

Proposition 1.4 Un homéomorphisme $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ est récurrent s'il vérifie l'une des conditions suivantes:

- (i) il existe une chaîne fermée de parties libres, connexes par arcs et disjointes deux à deux;

- (ii) *il existe un arc de translation γ qui joint un point $z \notin \text{Fix}(f^2)$ à $f(z)$ et un entier $k \geq 2$ tel que $f^k(\gamma) \cap \gamma \neq \emptyset$.*

Démonstration Supposons que la condition (i) est vérifiée. Parmi les chaînes fermées de parties libres connexes par arcs et disjointes deux à deux, choisissons en une de longueur minimale, notée $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$, choisissons un point $z_i \in X_i$ dont l'orbite positive rencontre X_{i+1} et notons $f^{k_i}(z_i)$ le premier point où cette orbite rencontre X_{i+1} . D'après la minimalité de r , deux cas sont possibles:

- $r = 1$ et $f^{k_1}(z_1) = z_1$;
- $f^{k_i}(z_i) \neq z_{i+1}$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$.

Dans le premier cas, z_1 est un point périodique de période $k_1 > 1$. Il suffit alors de choisir un disque ouvert contenant z_1 et libre pour obtenir une chaîne fermée de longueur 1: l'existence d'un point périodique qui n'est pas fixe implique la récurrence. Dans le second cas, puisque chaque X_i est connexe par arcs, on peut trouver un segment $\gamma_i \subset X_i$ joignant $f^{k_i}(z_i)$ à z_{i+1} . Si on remplace chaque γ_i par un disque ouvert D_i , voisinage assez proche de γ_i , on obtient notre chaîne.

Supposons maintenant que la condition (ii) est vérifiée. On peut toujours supposer que $f^{k'}(\gamma) \cap \gamma = \emptyset$ si $2 \leq k' < k$ et donc que $f^k(\gamma)$ ne contient pas $f(z)$. Deux cas sont alors possibles:

- $f^k(\gamma) \cap \gamma$ se réduit à un seul point z' et ce point est $f^{k+1}(z)$;
- il existe un point $z'' \neq f(z)$ dont l'image par f^k appartient à γ .

Plaçons nous dans le premier cas. Si $z' = z$, alors f a un point périodique de période $k+1 \geq 3$ et f est donc récurrent. Si $z' \neq z$, le sous-segment de γ qui joint z à z' est libre et définit une chaîne fermée de longueur 1, la condition (i) est vérifiée. Plaçons nous maintenant dans le second cas. Choisissons $z' \neq f(z)$ sur γ assez proche de $f(z)$ pour que le sous-segment de γ qui joint z' à $f(z)$ ne contienne pas z'' et soit disjoint de $f^k(\gamma)$. Le sous-segment de γ qui joint z à z' est libre et définit une chaîne fermée de longueur 1, la condition (i) est encore vérifiée. \square

Notre propriété de récurrence, qui est clairement invariante par conjugaison, est en fait très faible. Considérons, dans le plan complexe \mathbb{C} , l'homéomorphisme $g: z \mapsto -\frac{1}{2}z$. Le demi-plan de Poincaré $\Im(z) > 0$ est un domaine périodique de g , de période 2. Ainsi, tout homéomorphisme $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ qui est conjugué à g est récurrent. Un tel homéomorphisme a une dynamique Nord-Sud entre le bout de \mathbf{D} et un point fixe.

Énonçons pour finir le critère suivant, dû à L Guillou et F Le Roux (voir [15, page 39]), qui est un peu plus délicat à montrer:

Proposition 1.5 Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$. Supposons qu'il existe une chaîne fermée $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}}$ de parties libres dont les intérieurs sont disjoints deux à deux et qui vérifient la propriété suivante: si z et z' sont deux points distincts de X_i , il existe un segment joignant z à z' tel que $\text{int}(\gamma) \subset \text{Int}(X_i)$. Alors f est récurrent.

Pour démontrer le [Théorème 0.1](#), nous prouverons le résultat plus fort suivant:

Théorème 1.6 Si $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ vérifie les hypothèses (i), (ii), (iii), (iv) du [Théorème 0.1](#), alors f est récurrent.

Le principe de la preuve est le suivant. Nous énoncerons un certain nombre d'hypothèses qui, si elles ne sont pas satisfaites par f , obligent f à vérifier l'une des deux assertions (i) ou (ii) de la [Proposition 1.4](#) (et donc à être récurrent). Dans le cas où toutes ces conditions sont satisfaites, nous montrerons que f vérifie les hypothèses de la [Proposition 1.5](#), et est donc également récurrent. Nous construirons pour cela une *décomposition en briques libre* particulière de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. Ces objets ont été introduits par M Flucher [6] puis développés par A Sauzet [17] (voir également [15] et [14]). Nous allons rappeler dans la [Section 2](#) la définition ainsi que les principales propriétés des décompositions en briques.

2 Décomposition en briques

Une *décomposition en briques* d'une surface orientable M (non nécessairement connexe) est la donnée d'un ensemble stratifié $\Sigma(\mathcal{D})$ de dimension un, appelé *squelette* de la décomposition \mathcal{D} , avec une sous-variété de dimension zéro S tel que de tout *sommet* $s \in S$ sont issues (localement) exactement trois arêtes. Les *briques* sont les adhérences des composantes connexes de $M \setminus \Sigma(\mathcal{D})$ et les *arêtes* les adhérences des composantes connexes de $\Sigma(\mathcal{D}) \setminus S$. On notera A l'ensemble des arêtes et B l'ensemble des briques et on écrira $\mathcal{D} = (S, A, B)$ pour désigner une décomposition en briques. La [Figure 3](#) donne un exemple de décomposition en briques.

Soit $\mathcal{D} = (S, A, B)$ une décomposition en briques de M . On dit qu'une partie X de B est *connexe* si, pour toutes briques $b, b' \in X$, il existe une suite $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$, où $b_0 = b$ et $b_n = b'$, telle que b_i et b_{i+1} sont *adjacentes* si $i \in \{0, \dots, n-1\}$, c'est-à-dire contiennent une arête commune. On identifiera par la suite une partie X de B et la partie fermée de M , réunion des briques de X . Remarquons que ∂X est une variété topologique de dimension 1, remarquons également que la connexité de $X \subset B$ équivaut à la connexité de $X \subset M$ ainsi qu'à celle de $\text{Int}(X) \subset M$.

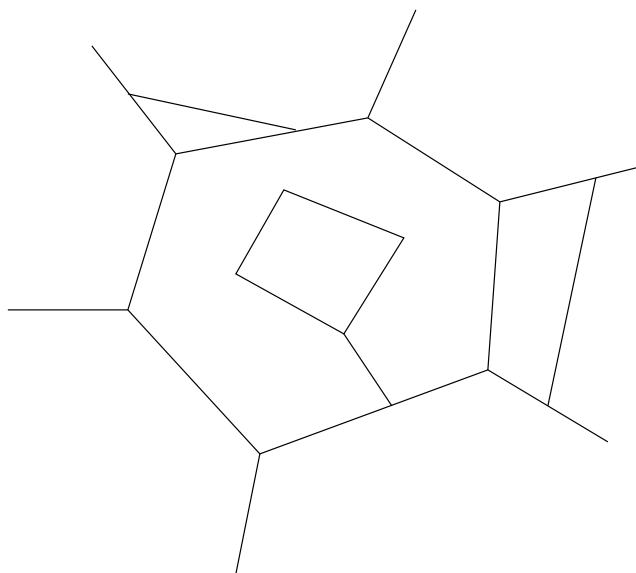


Figure 3

On dit que la décomposition \mathcal{D}' est une *sous-décomposition* de \mathcal{D} si $\Sigma(\mathcal{D}')$ est inclus dans $\Sigma(\mathcal{D})$. Tout sommet de \mathcal{D}' est un sommet de \mathcal{D} , toute arête de \mathcal{D}' est réunion d'arêtes de \mathcal{D} et toute brique de \mathcal{D}' réunion de briques de \mathcal{D} . Si $(X_i)_{i \in I}$ est une partition de B en parties connexes, alors $\bigcup_{i \in I} \partial X_i$ est le squelette d'une sous-décomposition \mathcal{D}' de \mathcal{D} dont les briques sont les X_i . En particulier si $(X_i)_{i \in I}$ est la partition en points, les briques de \mathcal{D}' et les briques de \mathcal{D} sont les mêmes. Si \mathcal{D}' et \mathcal{D} coïncident, on dira que \mathcal{D} est une décomposition *remplie*: ceci signifie que toute arête de la décomposition est incluse dans exactement deux briques (ainsi la décomposition représentée sur la [Figure 3](#) n'est pas remplie).

Si f est un homéomorphisme de M , on définit naturellement une application $\varphi: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ en posant:

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \{b \in B \mid \text{il existe } b' \in X \text{ tel que } b \cap f(b') \neq \emptyset\} \\ &= \{b \in B \mid b \cap f(X) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Remarquons que $\varphi(X)$ est connexe si c'est le cas de X . Remarquons également que pour toute famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties de B , on a:

$$\varphi\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi(X_i), \quad \varphi\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} \varphi(X_i).$$

On définit de façon analogue une application $\varphi_-: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ en posant:

$$\begin{aligned} \varphi_-(X) &= \{b \in B \mid \text{il existe } b' \in X \text{ tel que } b \cap f^{-1}(b') \neq \emptyset\} \\ &= \{b \in B \mid b \cap f^{-1}(X) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

On définit le *futur* b_{\geq} et le *passé* b_{\leq} d'une brique b en posant:

$$b_{\geq} = \bigcup_{k \geq 0} \varphi^k(\{b\}), \quad b_{\leq} = \bigcup_{k \geq 0} \varphi_-^k(\{b\}).$$

On définit de même le *futur strict* $b_{>}$ et le *passé strict* $b_{<}$ en posant:

$$b_{>} = \bigcup_{k \geq 1} \varphi^k(\{b\}), \quad b_{<} = \bigcup_{k \geq 1} \varphi_-^k(\{b\}).$$

Remarquons que les conditions suivantes sont équivalentes:

$$b \in b_{>}, \quad b_{>} = b_{\geq}, \quad b \in b_{<}, \quad b_{<} = b_{\leq}, \quad b_{<} \cap b_{\geq} \neq \emptyset, \quad b_{\leq} \cap b_{>} \neq \emptyset.$$

L'existence d'une brique $b \in B$ pour laquelle ces conditions sont vérifiées équivaut à l'existence d'une chaîne fermée constituée de briques.

On dira qu'une décomposition en briques $\mathcal{D} = (S, A, B)$ est *libre* si toute brique de \mathcal{D} est libre. Si f n'a pas de point fixe, il est toujours possible, quitte à choisir les briques assez petites, de construire une décomposition en briques libre. On déduit immédiatement de la [Proposition 1.5](#):

Proposition 2.1 *Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ un homéomorphisme différent de l'identité et $\mathcal{D} = (S, A, B)$ une décomposition en briques libre de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. S'il existe $b \in B$ tel que $b \in b_{>}$, alors f est récurrent.*

Rappelons la définition de *décomposition libre maximale*, notion introduite par Sauzet dans sa thèse [17]. Soit f un homéomorphisme sans point fixe d'une surface M et \mathcal{D} une décomposition en briques libre. On peut trouver une sous-décomposition \mathcal{D}' de \mathcal{D} qui est libre et telle que toute sous-décomposition stricte de \mathcal{D}' n'est plus libre. On dit que \mathcal{D}' est une décomposition en briques libre maximale. Remarquons que toute décomposition en briques libre maximale est remplie. Remarquons également que la réunion de deux briques adjacentes n'est pas libre. Dans sa thèse, Sauzet montre, dans le cas où $M = \mathbf{D}$, que toute brique b est adjacente à une brique qui rencontre $f(b)$ et à une brique qui rencontre $f^{-1}(b)$. Nous allons prouver un résultat similaire si M est le complémentaire de l'ensemble des points fixes d'un homéomorphisme non trivial $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$. Plus précisément:

Proposition 2.2 Soit $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ un homéomorphisme différent de l'identité et $\mathcal{D} = (S, A, B)$ une décomposition en briques libre maximale de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. Alors, l'une au moins des assertions suivantes est vraie:

- (i) il existe une chaîne fermée de briques de B (et f est donc récurrent);
- (ii) toute brique b est adjacente à une brique qui rencontre $f(b)$ et à une brique qui rencontre $f^{-1}(b)$.

Dans le second cas, on en déduit que les parties b_{\geq} , $b_{>}$, b_{\leq} et $b_{<}$ sont connexes.

Démonstration Expliquons d'abord le dernier point. Si (ii) est vérifié, les ensembles $\{b\} \cup \varphi(\{b\})$ et $\{b\} \cup \varphi_{-}(\{b\})$ sont connexes et on peut écrire

$$b_{\geq} = \bigcup_{k \geq 0} \varphi^k(\{b\}) = \bigcup_{k \geq 0} \varphi^k(\{b\} \cup \varphi(\{b\})).$$

Ainsi, b_{\geq} est connexe, étant l'union de parties connexes $X_k = \varphi^k(\{b\} \cup \varphi(\{b\}))$ telles que $X_k \cap X_{k+1} \neq \emptyset$. De même on peut écrire

$$b_{>} = \bigcup_{k \geq 1} \varphi^k(\{b\} \cup \varphi(\{b\}))$$

ainsi que

$$b_{\leq} = \bigcup_{k \geq 0} \varphi_{-}^k(\{b\} \cup \varphi_{-}(\{b\})), \quad b_{<} = \bigcup_{k \geq 1} \varphi_{-}^k(\{b\} \cup \varphi_{-}(\{b\})).$$

Prouvons maintenant que l'une des assertions (i) ou (ii) est vraie. Commençons par compactifier \mathbf{D} en ajoutant le bout ∞ et prolongeons f en un homéomorphisme de la sphère $\mathbf{D} \sqcup \{\infty\}$ qui fixe ∞ . On sait, d'après M. Brown et J. Kister [3], que toute composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$ est fixe (et n'est donc pas libre). Ainsi la frontière de toute brique b est non vide. C'est une sous-variété topologique de dimension un, et donc une réunion de cercles et de droites de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$.

Commençons par le cas où ∂b admet au moins deux composantes connexes Γ_1 et Γ_2 . Fixons une arête $a_1 \subset \Gamma_1$ (resp. $a_2 \subset \Gamma_2$) et notons b_1 (resp. b_2) la brique adjacente à b qui contient a_1 (resp. a_2). On sait que ni $b \cup b_1$, ni $b \cup b_2$ n'est libre, puisque \mathcal{D} est une décomposition libre maximale. Ainsi, b_1 et b_2 rencontrent $f(b) \cup f^{-1}(b)$. Si b ne vérifie pas la condition (ii), l'un des ensembles $f(b)$ ou $f^{-1}(b)$ rencontre à la fois b_1 et b_2 . On peut supposer, sans perte de généralité, que c'est $f(b)$. L'ensemble connexe $\varphi(\{b\})$ contient donc b_1 et b_2 . Nous pouvons donc construire deux segments γ et γ' joignant un point $z_1 \in \text{int}(a_1)$ à un point $z_2 \in \text{int}(a_2)$, le premier prenant ses valeurs, sauf aux extrémités, dans l'intérieur de $\varphi(\{b\})$, le second prenant ses valeurs,

sauf aux extrémités, dans l'intérieur de b . La réunion des deux segments est un cercle $C \subset b_{\geq}$ qui rencontre transversalement chaque arc Γ_1 et Γ_2 en un unique point. Les arcs Γ_1 et Γ_2 ne peuvent donc pas être des cercles, ce sont des droites de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. On peut alors trouver deux points d'accumulation (dans $\mathbf{D} \sqcup \{\infty\}$) de Γ_1 qui sont séparés par C . Il s'agit bien sûr de points fixes de f et ils appartiennent donc également à l'adhérence (dans $\mathbf{D} \sqcup \{\infty\}$) de $f^{-1}(b)$. On en déduit que $f^{-1}(b)$ rencontre C et donc que $b_{<} \cap b_{\geq} \neq \emptyset$. Ainsi f vérifie la Proposition 1.5 et est donc récurrent. Remarquons que nous venons également de montrer que f est récurrent si ∂b a au moins trois composantes connexes, puisque le raisonnement précédent s'applique à au moins un couple de composantes connexes de ∂b .

Supposons maintenant que ∂b a une seule composante connexe Γ et que c 'est un cercle. Supposons, là encore, que b ne vérifie pas la condition (ii) et montrons qu'il existe une chaîne fermée de briques de B . Nous sommes dans une situation déjà étudiée par Sauzet. Il y a un nombre fini de briques adjacentes à b et on peut supposer que l'image par f de chacune de ces briques rencontre b . Si b' est adjacente à b , l'image par f de l'arête commune à b et b' est disjointe de b puisque b est libre. Ainsi $f(b')$ rencontre nécessairement une autre brique adjacente à b . On en déduit immédiatement l'existence d'une chaîne fermée de briques adjacentes à b .

Il reste à étudier le cas le plus difficile, où ∂b a une seule composante connexe Γ qui est une droite de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. Nous sommes dans une situation également étudiée par Sauzet (voir [17] ou [14]). Nous allons supposer que toute brique adjacente à b rencontre $f^{-1}(b)$ et en déduire que f est récurrent. Nous notons W la composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$ qui contient b . Nous savons d'après [3] qu'elle est invariante par f et qu'elle contient également $f(b)$ et $f^{-1}(b)$. On peut bien sûr supposer que $f(b)$ et $f^{-1}(b)$ sont disjoints, puisque dans le cas contraire, f est récurrent. Soit b_0 une brique adjacente à b . On sait que $f(b_0)$ rencontre à la fois b et $f(b)$. On peut donc trouver un segment γ_0 joignant un point de b à un point de $f(b)$ et contenu dans $f(b_0)$. Quitte à restreindre ce segment, on peut supposer qu'il joint un point $z_0 \in \partial b$ à un point $z'_0 \in \partial f(b)$ et que $\text{int}(\gamma_0) \subset W \setminus (b \cup f(b))$. On peut écrire $\Gamma = \Gamma_0^- \Gamma_0^+$ comme assemblage de deux demi-droites ayant z_0 comme extrémité commune. Fixons alors $z_0^- \in \text{int}(\Gamma_0^-)$ et $z_0^+ \in \text{int}(\Gamma_0^+)$ et remarquons que tout point de $W \setminus (b \cup f(b))$, proche de z_0^- , est séparé dans $W \setminus (b \cup f(b))$ par $\text{int}(\gamma_0)$ de tout point de $W \setminus (b \cup f(b))$ proche de z_0^+ . En effet, dans le cas contraire, on pourrait construire un cercle $C \subset W \setminus (b \cup f(b))$ qui intersecte γ_0 en un unique point et ceci de façon transverse. Le cercle C séparerait donc b et $f(b)$ dans \mathbf{D} . Notons \bar{b} et $\overline{f(b)}$ les adhérences de b et $f(b)$ dans \mathbf{D} . La courbe C séparerait \bar{b} et $\overline{f(b)}$ dans \mathbf{D} puisque b et $f(b)$ sont fermés dans W . Notons maintenant que \bar{b} contient un point fixe (il suffit de choisir un point d'accumulation de Γ). Ce point

fixe appartient également à $f(\bar{b})$. Ceci contredit la propriété de séparation. Dans le cas où $f^{-1}(b) \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, l'homéomorphisme f est récurrent. En effet, γ_0 est libre, puisqu'il est contenu dans $f(b_0)$. On peut donc épaissir γ_0 pour construire un disque libre $D_0 \subset W$ dont l'intérieur est disjoint de b et $f(b)$ et ce disque vérifie $f(D_0) \cap b = \emptyset$ si $f^{-1}(b) \cap \gamma_0 \neq \emptyset$. Puisque $f(b) \cap D_0 \neq \emptyset$, on peut appliquer la [Proposition 1.5](#) pour conclure que f est récurrent. Nous supposons donc que $f^{-1}(b) \cap \gamma_0 = \emptyset$. Puisque $f^{-1}(b)$ est connexe, on peut toujours supposer, quitte à intervertir Γ_0^- et Γ_0^+ , qu'un point dans $W \setminus (b \cup f(b))$ qui est proche de z_0^- est séparé de $f^{-1}(b)$ dans $W \setminus (b \cup f(b))$ par $\text{int}(\gamma_0)$. Par hypothèse, toute brique b' adjacente à b intersecte $f^{-1}(b)$, elle rencontre donc γ_0 si elle rencontre Γ_0^- . Puisque γ_0 est une partie compacte de W , il n'y a donc qu'un nombre fini de briques adjacentes à b qui rencontrent Γ_0^- . Il existe donc une brique b_1 , adjacente à b , qui rencontre Γ_0^- en des points arbitrairement éloignés de z_0 . On construit alors de façon similaire un segment $\gamma_1 \subset f(b_1)$ joignant un point $z_1 \in \partial b$ à un point $z'_1 \in \partial f(b)$ tel que $\text{int}(\gamma_1) \subset W \setminus (b \cup f(b))$. On écrit alors $\Gamma = \Gamma_1^- \Gamma_1^+$ comme assemblage de deux demi-droites ayant z_1 comme extrémité commune en faisant le choix suivant: $\Gamma_1^- \cap \Gamma_0^-$ est une demi-droite. On fixe alors $z_1^- \in \text{int}(\Gamma_1^-)$ et $z_1^+ \in \text{int}(\Gamma_1^+)$. Si $f^{-1}(b)$ rencontre γ_1 , alors f est récurrent. Sinon, la partie connexe $b_1 \cup f^{-1}(b)$ est disjointe de γ_1 et rencontre Γ_1^- . On en déduit que tout point de $W \setminus b \cup f(b)$ qui est proche de z_1^+ est séparé de $f^{-1}(b)$ dans $W \setminus (b \cup f(b))$ par $\text{int}(\gamma_1)$. On sait donc qu'il n'y a qu'un nombre fini de briques adjacentes à b qui rencontrent Γ_1^+ . On vient de prouver qu'il n'y a qu'un nombre fini de briques adjacentes à b . On remarque alors que le raisonnement fait dans le cas où Γ est un cercle est encore valable. \square

Nous allons conclure cette section en donnant le plan de la démonstration du [Théorème 0.1](#). Pour prouver ce théorème, la question qui vient naturellement à l'esprit est la suivante:

Si $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ vérifie les hypothèses (i), (ii), (iii), (iv) du [Théorème 0.1](#), et si \mathcal{D} est une décomposition en briques libre maximale de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$, existe-t-il une chaîne fermée constituée de briques de la décomposition?

Nous ne savons pas répondre à cette question. Nous verrons, par contre, qu'il est possible de construire une décomposition en briques libre maximale \mathcal{D} de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$, pour laquelle la réponse est oui. Pour obtenir cette chaîne, nous nous servirons de la connexité du futur, du passé, du futur strict et du passé strict de chaque brique. Il faudra cependant rendre utilisables, dans l'étude de la décomposition, les hypothèses dynamiques et combinatoires du [Théorème 0.1](#). Ces quatre hypothèses portent sur

des ensembles discrets, les orbites des z_i . La première étape est de construire des ensembles unidimensionnels sur lesquels, on peut traduire ces hypothèses.

Nous commencerons dans la [Section 3](#) par construire pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ un arc de translation γ_i^k de $f^k(z_i)$, paramétré par $t \in [k, k + 1]$, de telle façon que l'arc $\Gamma_i = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_i^k$ paramétré par $t \in \mathbb{R}$ vérifie:

- $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma_i(t) = \alpha_i$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma_i(t) = \omega_i$;
- pour tous réels t et t' , on a $f(\Gamma_i(t)) \neq \Gamma_i(t')$ si $t' \leq t$.

L'arc Γ_i contient l'orbite O_i du point z_i . Si chaque γ_i^k est un arc simple, il n'en est pas de même de chaque Γ_i . Dans la [Section 4](#), nous verrons que l'on peut modifier les segments γ_i^k pour avoir une situation "générique" au sens suivant:

- tout point $f^k(z_i)$ est un point simple de Γ_i ;
- les arcs Γ_i n'ont pas de points triples;
- $\Gamma_i \cap O_{i'} = \emptyset$, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'}$ est fini, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'}$ ne contient aucun point double ni de Γ_i , ni de $\Gamma_{i'}$, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'} \cap \Gamma_{i''} = \emptyset$ si i, i' et i'' sont distincts.

En utilisant les hypothèses combinatoires (ii) et (iii) du [Théorème 0.1](#), nous démontrons dans la [Section 5](#) l'existence d'une configuration de connexité critique $(t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ au sens suivant:

- (A) les ensembles $\Gamma_i(]-\infty, t_i])$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont disjoints deux à deux;
- (B) pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \notin \{i - 1, i\}$ tel que

$$\Gamma_i(]-\infty, t_i]) \cap \Gamma_{i'}(]-\infty, t_{i'}]) \neq \emptyset.$$

Il est facile de voir qu'il existe un entier $K > 0$ tel que si i et i' sont distincts, alors

$$\Gamma_i(]-\infty, -K]) \cap \Gamma_{i'} = \Gamma_i([K, +\infty[) \cap \Gamma_{i'} = \emptyset.$$

On en déduit que $|t_i| < K$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La propriété (B) implique alors que l'ensemble $\Gamma_{i-1}(]-\infty, -K])$ est séparé dans \mathbf{D} de $\Gamma_{i-1}([K, +\infty[)$ par $\Gamma_i(]-\infty, t_i]) \cup \Gamma_{i'}(]-\infty, t_{i'}])$. Nous verrons que l'on peut de plus supposer que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \neq i$ tel que $\Gamma_i(t_i) \in \Gamma_{i'}(]-\infty, t_{i'}])$.

Dans la [Section 6](#), nous construirons à partir des ensembles $\Gamma_i(]-\infty, t_i])$ une famille d'arbres $(A_i^-)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, où $A_i^- \subset \Gamma_i(]-\infty, t_i])$ sera obtenu en enlevant des boucles de $\Gamma_i(]-\infty, t_i])$. L'arbre A_i^- contiendra tous les points $f^k(z_i)$, $k \leq t_i$, l'extrémité $\Gamma_i(t_i)$ ainsi que toutes les extrémités $\Gamma_{i'}(t_{i'})$ qui sont sur $\Gamma_i(]-\infty, t_i])$. Ainsi:

(A') les ensembles $A_i^- \setminus \{\Gamma_i(t_i)\}$ sont disjoints deux à deux;

(B') pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \notin \{i-1, i\}$ tel que $A_i^- \cap A_{i'}^- \neq \emptyset$.

Nous construirons de façon analogue une famille d'arbres $(A_i^+)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, où $A_i^+ \subset \Gamma_i([K, +\infty[)$ contiendra tous les points $f^k(z_i)$, $k > K$. Chaque arbre A_i^+ sera disjoint de tous les arbres $A_{i'}^-$, ainsi que de tous les $A_{i'}^+$, $i' \neq i$. La propriété (B') implique qu'il existe une composante connexe de $A_i^- \cup A_{i'}^-$ qui contient tous les points $f^k(z_{i-1})$, $k \leq -K$, et une autre composante connexe qui contient l'arbre A_{i-1}^+ et donc tous les points $f^k(z_{i-1})$, $k > K$.

Le caractère "presque disjoint" de tous ces arbres, illustré par la propriété (A'), va nous permettre de construire dans la [Section 7](#) une décomposition en briques libre maximale modélisée sur ces arbres. Cette construction se fera en plusieurs étapes, la première étape consistant à épaissir les arbres, ce qui sera possible justement grâce à la propriété (A'). La propriété essentielle vérifiée par la décomposition finale $\mathcal{D}'' = (S'', A'', B'')$ sera la suivante:

Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe une famille de briques $(b_i^{l'})_{l' \neq 0}$ telle que:

- $A_i^- \subset \bigcup_{l' < 0} b_i^{l'}$;
- $A_i^+ \subset \bigcup_{l' > 0} b_i^{l'}$;
- $\Gamma_i(t_i) \in b_i^{l'-1}$;
- $b_i^{l''} \in (b_i^{l'})_{\geq}$ si $0 < l < l'$, si $l < l' = -1$ ou si $l < 0 < l'$.

Grâce à la propriété (B'), ou plutôt à la propriété de séparation qu'elle implique, on montrera dans la [Section 8](#) que le futur $(b_{i-1}^{l'-1})_{\geq}$ de $b_{i-1}^{l'-1}$, qui peut être supposé connexe d'après la [Proposition 2.2](#), et qui contient $b_{i-1}^{l'-1}$, doit contenir une brique $b_i^{l'}$, $l' < 0$, ou une brique $b_{i'}^{l'}$, $l' < 0$. Ainsi $(b_{i-1}^{l'-1})_{\geq}$ contient $b_i^{l'-1}$ ou $b_{i'}^{l'-1}$. Dans le cas où les briques $b_i^{l'-1}$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont toutes distinctes, on en déduit immédiatement qu'il existe une chaîne fermée de briques. Il restera à étudier le cas où deux au moins de ces briques sont égales. Un argument de connexité du même type permettra de prouver que cette brique b'' vérifie $b'' \in b_{>}''$.

Il faut noter que les propositions que nous verrons dans la suite de l'article sont du même type que la [Proposition 2.2](#). En d'autres termes, si dans la construction précédente, on ne peut pas passer d'une étape à l'étape suivante, c'est que f est récurrent.

3 Construction des arcs Γ_i

Nous fixons jusqu'à la fin de l'article un homéomorphisme $f \in \text{Homeo}^+(\mathbf{D})$ qui vérifie les hypothèses du [Théorème 0.1](#). Nous notons alors O_i l'orbite de z_i et posons $z_i^k = f^k(z_i)$. Nous prouverons dans cette section le résultat suivant:

Proposition 3.1 *L'une au moins des assertions suivantes est vraie.*

- (i) *L'homéomorphisme f est récurrent.*
- (ii) *Pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut construire une suite $(\gamma_i^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de segments tels que:*
 - *chaque γ_i^k est un arc de translation qui joint z_i^k à z_i^{k+1} ;*
 - *$f(\gamma_i^k) \cap \gamma_i^{k'} = \emptyset$ si $k' < k$;*
 - *la suite $(\gamma_i^k)_{k \leq 0}$ converge vers $\{\alpha_i\}$ pour la distance de Hausdorff;*
 - *la suite $(\gamma_i^k)_{k \geq 0}$ converge vers $\{\omega_i\}$.*

Pour simplifier les notations, nous omettrons dans cette section l'indice i . Commençons par un lemme.

Lemme 3.2 *On peut construire une suite $(\gamma'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de segments disjoints deux à deux tels que:*

- *$z^k \in \gamma'^k$;*
- *$\gamma'^k \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$;*
- *$f(\gamma'^k) \cap \gamma'^k \neq \emptyset$;*
- *la suite $(\gamma'^k)_{k \leq 0}$ converge vers $\{\alpha\}$;*
- *la suite $(\gamma'^k)_{k \geq 0}$ converge vers $\{\omega\}$.*

Démonstration On construit aisément un homéomorphisme $h: \mathbf{D} \rightarrow]-1, 1[{}^2$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow -\infty} p_1(z^k) = -1 &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow -\infty} h^{-1}(z^k) = \alpha, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} p_1(z^k) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} h^{-1}(z^k) = \omega, \end{aligned}$$

où p_1, p_2 sont les deux projections définies sur $]0, 1[{}^2$. Par un simple argument de récurrence, utilisant en particulier le fait que $\lim_{k \rightarrow -\infty} z^k = \alpha$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} z^k = \omega$, on peut toujours modifier h pour que p_1 soit injective sur $h(O)$, ce qu'on supposera dorénavant. Puisque p_1 est injective sur $h(O)$, puisque $\lim_{k \rightarrow -\infty} p_1(h(z^k)) = -1$ et puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_1(h(z^k)) = 1$, on peut, quitte à composer h par un homéomorphisme de $] -1, 1[{}^2$ fixant chaque verticale, choisir la suite $(p_2(h(z^k)))_{k \in \mathbb{Z}}$ arbitraire.

On supposera donc que cette suite est strictement croissante. Pour simplifier l'écriture, on omettra h dans la suite; on supposera en fait p_1 et p_2 définies sur \mathbf{D} , via la carte globale h .

Notons I_k l'intervalle ouvert de $] - 1, 1[$ délimité par $p_1(z^k)$ et $p_1(z^{k+1})$ et posons $U^k = I_k \times]p_2(z^k), p_2(z^{k+1})[$. Remarquons que les suites $(\bar{U}^k)_{k \leq 0}$ et $(\bar{U}^k)_{k \geq 0}$ sont formées de disques fermés de \mathbf{D} et convergent respectivement vers $\{\alpha\}$ et $\{\omega\}$.

L'ensemble des points de \mathbf{D} dont l'image par f est sur la même verticale qu'un élément de O est un F_σ d'intérieur vide, on peut donc choisir un point $z'^0 \in U^0$ en dehors de cet ensemble. Pour les mêmes raisons, on peut choisir $z'^1 \in U^1$ en dehors de cet ensemble, qui de plus n'appartient pas à la verticale passant par z'^0 , ni à l'image par f de cette verticale, ni à son image inverse. En réitérant cet argument, on peut construire par un simple procédé de récurrence, une suite $(z'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

- $z'^k \in U^k$;
- $p_1(f(z'^k)) \neq p_1(z'^{k'})$ pour tous entiers k, k' ;
- $p_1(z'^k) \neq p_1(z'^{k'})$ si $k \neq k'$;
- $p_1(f(z'^k)) \neq p_1(z'^{k'})$ si $k \neq k'$.

Puisque, par hypothèse, f se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbf{D} \cup \{\alpha, \omega\}$, et puisque les suites $(z'^k)_{k \geq 0}$ et $(z'^k)_{k \leq 0}$ convergent respectivement vers ω et α , nous en déduisons que les suites $(f(z'^k))_{k \geq 0}$ et $(f(z'^k))_{k \leq 0}$ convergent également respectivement vers ω et α . Quitte à composer h par un homéomorphisme de $] - 1, 1[$ fixant chaque verticale, on peut donc supposer que $p_2(z^k) < p_2(f(z'^k)) < p_2(z^{k+1})$. On peut alors construire une suite $(I'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ d'intervalles ouverts relativement compacts de $] - 1, 1[$, telle que:

- I'^k contient I^k ;
- $U'^k = I'^k \times]p_2(z^k), p_2(z^{k+1})[$ contient z'^k et $f(z'^k)$;
- les suites $(\bar{U}'^k)_{k \leq 0}$ et $(\bar{U}'^k)_{k \geq 0}$ de disques fermés de \mathbf{D} , convergent respectivement vers $\{\alpha\}$ et $\{\omega\}$.

Chaque segment γ'^k que nous allons construire sera contenu dans $U'_k \cup \{z^k\}$. Ces segments seront donc disjoints et vérifieront les deux conditions de convergence demandées. Il reste à construire les γ'^k pour qu'ils vérifient les trois autres conditions.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points fixes dans U'^k . Nous pouvons alors supposer que z'^k n'est pas fixe et trouver un segment issu de z^k , à valeurs dans $U'^k \cup \{z^k\}$, disjoint de $\text{Fix}(f)$ et contenant à la fois z'^k et $f(z'^k)$. Ce segment convient.

Supposons maintenant qu'il y ait une infinité de points fixes dans U'^k . On peut construire dans $U'^k \cup \{z^k\}$ trois segments issus de z^k , n'ayant que ce point en commun, et aboutissant chacun en un point fixe. Quitte à restreindre chaque segment, on peut supposer que l'extrémité finale est l'unique point fixe rencontré. Dans le cas où l'un des segments rencontre son image par f en un point qui n'est pas l'extrémité fixe, on peut trouver un sous-segment d'extrémité z^k , qui ne rencontre pas $\text{Fix}(f)$ et qui n'est pas libre. Ce sous-segment γ'^k convient. Supposons maintenant que chacun des trois segments ne rencontre son image qu'en son extrémité fixe. Remarquons que si l'image par f de chacun des trois segments était disjointe des deux autres segments, alors f devrait renverser l'orientation (voir Figure 4).

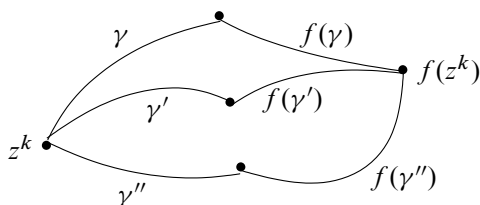


Figure 4

Puisque f préserve l'orientation, on peut donc trouver deux segments, parmi les trois, dont la réunion n'est pas libre. Enlevons à chacun de nos deux segments un petit voisinage de l'extrémité fixe, la réunion des deux segments diminués est un segment γ'^k qui convient. □

On en déduit alors:

Lemme 3.3 On peut construire une suite $(D'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de disques fermés disjoints deux à deux tels que:

- $z^k \in \partial D'^k$;
- $D'^k \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$;
- $f(D'^k) \cap D'^k \neq \emptyset$;
- $f(\text{Int}(D'^k)) \cap \text{Int}(D'^k) = \emptyset$;
- la suite $(D'^k)_{k \leq 0}$ converge vers $\{\alpha\}$;
- la suite $(D'^k)_{k \geq 0}$ converge vers $\{\omega\}$.

Démonstration On peut épaissir chaque arc γ'^k construit dans le Lemme 3.2 pour construire une suite $(D'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de disques fermés disjoints deux à deux vérifiant toutes

les conditions demandées sauf la quatrième. Quitte à diminuer les disques que l'on vient de construire, on peut cependant supposer que l'intérieur de chaque D'^k est libre et donc que $f(D'^k) \cap D'^k = f(\partial D'^k) \cap \partial D'^k$. En effet, on peut écrire $D'^k \setminus \{z^k\} = \bigsqcup_{t \in]0,1]} (\partial D_t^k \setminus \{z^k\})$, où $t \mapsto D_t^k$ est une fonction continue croissante de disques vérifiant:

- $z^k \in \partial D_t^k$;
- $D_1^k = D'^k$;
- $\lim_{t \rightarrow 0} D_t^k = \{z^k\}$;
- $\text{Int}(D_t^k) = \bigsqcup_{t' < t} (\partial D_{t'}^k \setminus \{z^k\})$.

Il existe alors un plus petit réel $t \in]0, 1]$ tel que D_t^k ne soit pas libre. On peut vérifier que son intérieur est nécessairement libre. \square

Continuons notre série de lemmes.

Lemme 3.4 *L'une au moins des assertions suivantes est vraie.*

- (i) *L'homéomorphisme f est récurrent.*
- (ii) *On peut construire une suite $(D^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de disques fermés disjoints deux à deux tels que:*
 - $z^k \in \text{Int}(D^k)$;
 - $D^k \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$;
 - $f(D^k) \cap D^k \neq \emptyset$;
 - $f(D^k) \cap D^{k'} = f^2(D^k) \cap D^{k'} = \emptyset$ si $k' < k$;
 - la suite $(D^k)_{k \leq 0}$ converge vers $\{\alpha\}$;
 - la suite $(D^k)_{k \geq 0}$ converge vers $\{\omega\}$.

Démonstration Considérons une suite $(D'^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par le [Lemme 3.3](#). Tout segment γ joignant le point z^k à un point $z' \in \partial D'^k$ et contenu, sauf en ses extrémités, dans l'intérieur du disque D'^k , est libre. En effet z_k n'étant pas fixe, le segment $f(\gamma)$ ne peut rencontrer γ que si l'extrémité z' est fixe, égale à $f(z^k) = z^{k+1}$ ou égale à $f^{-1}(z^k) = z^{k-1}$. Le premier cas est impossible puisque $D'^k \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$, les deux autres cas le sont également puisque D'^{k+1} et D'^{k-1} sont disjoints de D'^k et contiennent respectivement z^{k+1} et z^{k-1} .

Choisissons $z''^k \in \partial D'^k \cap f^{-1}(\partial D'^k)$, puis deux segments γ_-^k et γ_+^k , le premier joignant z''^k à z^k , le second joignant z^k à $f(z''^k)$, tous deux contenus dans l'intérieur

de D^k , sauf aux extrémités, et ne se rencontrant qu'en z^k . Fixons $k' < k$. L'orbite positive de chacun des segments $\gamma_-^{k'}$ et $\gamma_+^{k'}$ rencontre γ_-^k et γ_+^k (au moins au point z^k). Puisque tous ces segments sont libres, si l'orbite positive de γ_-^k ou de γ_+^k rencontre $\gamma_-^{k'}$ ou $\gamma_+^{k'}$, alors f est récurrent, d'après la [Proposition 1.4](#). Ainsi l'assertion (i) est vraie. Supposons maintenant que l'orbite positive de γ_-^k et de γ_+^k ne rencontre ni $\gamma_-^{k'}$ ni $\gamma_+^{k'}$, dès que $k' < k$. Puisque

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \gamma_-^k \gamma_+^k = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_-^k \gamma_+^k = \omega,$$

on peut trouver un disque fermé D^0 , voisinage de $\gamma_-^0 \gamma_+^0$, tel que

- $D^0 \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$;
- $D^0 \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f(D^0) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^2(D^0) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = \emptyset$, si $k < 0$;
- $D^0 \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^{-1}(D^0) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^{-2}(D^0) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = \emptyset$, si $k > 0$.

On a alors nécessairement:

- $z^0 \in \text{Int}(D^0)$;
- $f(D^0) \cap D^0 \neq \emptyset$.

On peut choisir ensuite un disque fermé D^1 , voisinage de $\gamma_-^1 \gamma_+^1$, tel que

- $D^1 \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$;
- $D^1 \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f(D^1) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^2(D^1) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = \emptyset$, si $k < 0$;
- $D^1 \cap D^0 = f(D^1) \cap D^0 = f^2(D^1) \cap D^0 = \emptyset$;
- $D^1 \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^{-1}(D^1) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = f^{-2}(D^1) \cap \gamma_-^k \gamma_+^k = \emptyset$, si $k > 1$.

On a alors:

- $z^1 \in \text{Int}(D^1)$;
- $f(D^1) \cap D^1 \neq \emptyset$.

Par un simple procédé de récurrence on construit de cette façon notre suite $(D^k)_{k \in \mathbb{Z}}$. \square

Nous pouvons maintenant prouver la [Proposition 3.1](#) en utilisant des arguments classiques dans le domaine.

Démonstration de la Proposition 3.1 On peut bien sûr supposer que l'assertion (ii) du Lemme 3.4 est vérifiée et considérer une suite $(D^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par ce lemme. Là encore, en diminuant D^k si nécessaire, on peut supposer que l'intérieur de chaque D^k est libre. Fixons $z'''^k \in \partial D^k \cap f^{-1}(\partial D^k)$, puis deux segments γ_-^k et γ_+^k le premier joignant z'''^k à z^k , le second joignant z^k à $f(z'''^k)$ contenus dans l'intérieur de D^k , sauf en une extrémité, et ne se rencontrant qu'en z^k . Le segment $\gamma_-^k \gamma_+^k$ est un arc de translation. Si l'une des hypothèses de la Proposition 1.1 (le lemme de Brouwer) est vérifiée, alors f est récurrent, d'après la Proposition 1.4. Supposons donc que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, aucune de ces hypothèses n'est vérifiée. Remarquons que $\gamma^k = \gamma_+^k f(\gamma_-^k)$ est alors un arc de translation joignant z^k à z^{k+1} . Puisque $\gamma^k \subset D^k \cup f(D^k)$ et puisque f se prolonge en un homéomorphisme de $\mathbf{D} \cup \{\alpha, \omega\}$, les deux propriétés de convergence de la Proposition 3.1 sont vérifiées. Si $k' < k$, les ensembles $D^{k'} \cup f(D^{k'})$ et $f(D^k) \cup f^2(D^k)$ sont disjoints. Ainsi toutes les conclusions de la proposition sont vérifiées. \square

Remarque Les trois premières assertions du Lemme 3.2 impliquent que chaque orbite O_i est contenue dans une composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$ (on retrouve un cas particulier du théorème prouvé dans [3]). Les deux autres assertions ainsi que les hypothèses combinatoires sur les α_i et ω_i vérifiées par f impliquent en fait que les orbites O_i sont contenues dans la même composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$.

Puisque nous voulons montrer que f est récurrent, nous supposons dorénavant que l'assertion (ii) de la Proposition 3.1 est vérifiée. Chaque segment γ_i^k sera paramétré par $t \in [k, k+1]$. On a donc un paramétrage par $t \in \mathbb{R}$ de chaque arc $\Gamma_i = \prod_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_i^k$ et on a $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Gamma_i(t) = \alpha$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Gamma_i(t) = \omega$. L'arc Γ_i n'est pas nécessairement simple, contrairement aux arcs restreints $\Gamma_i|_{[k, k+1]}$. Le fait que chaque γ_i^k est un arc de translation qui joint z_i^k à z_i^{k+1} et dont l'image par f ne rencontre aucun segment $\gamma_i^{k'}$, $k' < k$, nous donne:

Proposition 3.5 *Pour tous réels t et t' , on a $f(\Gamma_i(t)) \neq \Gamma_i(t')$ si $t' \leq t$.*

4 Mise sous forme générique

Nous allons expliquer dans cette section comment perturber les γ_i^k , pour que les arcs Γ_i soient en position "générique".

Proposition 4.1 *On peut toujours supposer que les arcs γ_i^k vérifient, en plus des propriétés énoncées dans la Proposition 3.1, les conditions suivantes:*

- $\gamma_i^k \cap O_i = \{z_i^k, z_i^{k+1}\}$;
- $\gamma_i^k \cap O_{i'} = \emptyset$ si $i' \neq i$;
- $\gamma_i^k \cap \gamma_{i'}^{k'}$ est fini si $(i', k') \notin \{(i, k-1), (i, k), (i, k+1)\}$;
- $\gamma_i^k \cap \gamma_{i'}^{k'} \cap \gamma_{i''}^{k''} = \emptyset$ si (i, k) , (i', k') et (i'', k'') sont distincts.

Commençons par énoncer deux résultats préliminaires:

Lemme 4.2 Soit γ un arc de translation d'un point $z \notin \text{Fix}(f^2)$ et $\gamma' \subset \text{int}(\gamma)$ un segment. Il existe alors un voisinage U de γ' tel que tout segment joignant z à $f(z)$ à valeurs dans $\gamma \cup U$ est un arc de translation de z .

Démonstration Puisque

$$f(\gamma') \cap \gamma' = f(\gamma') \cap \gamma = \gamma' \cap f(\gamma) = \emptyset,$$

on peut choisir U de telle façon que

$$f(U) \cap U = f(U) \cap \gamma = U \cap f(\gamma) = \emptyset.$$

On en déduit alors

$$f(U \cup \gamma) \cap (U \cup \gamma) = f(\gamma) \cap \gamma = \{f(z)\}. \quad \square$$

Lemme 4.3 On peut construire sur \mathbb{R}^2 une famille $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de parties dénombrables denses, qui vérifient les propriétés suivantes, où \mathbb{E}_p désigne l'ensemble des droites affines contenant au moins deux points de X_p :

- si p et p' sont distincts, alors $\mathbb{E}_p \cap \mathbb{E}_{p'} = \emptyset$;
- si p , p' et p'' sont distincts, alors $\Delta \cap \Delta' \cap \Delta'' = \emptyset$ pour tout $(\Delta, \Delta', \Delta'') \in \mathbb{E}_p \times \mathbb{E}_{p'} \times \mathbb{E}_{p''}$.

Démonstration On pose $X_0 = \mathbb{Q}^2$. On suppose ensuite que la famille $(X_p)_{0 \leq p \leq P}$ a été construite jusqu'à l'ordre P et vérifie les deux propriétés du [Lemme 4.3](#). On va montrer qu'on peut adjoindre un ensemble X_{P+1} pour que ces deux propriétés soient encore vérifiées. Remarquons que l'ensemble

$$Y_P = \bigcup_{0 \leq p < p' \leq P} \bigcup_{\Delta \in \mathbb{E}_p} \bigcup_{\Delta' \in \mathbb{E}_{p'}} \Delta \cap \Delta'$$

est dénombrable puisque la première condition est vraie jusqu'au rang P . Notons $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(A)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}A$ l'ensemble des multiples réels d'éléments de A . Si A_1 et A_2 sont deux parties de \mathbb{R}^2 , notons

$A_1 + A_2$ l'ensemble des points $z \in \mathbb{R}^2$ qui s'écrivent $z = z_1 + z_2$, où $z_1 \in A_1$ et $z_2 \in A_2$. L'ensemble

$$Z_P = \text{Vect}_{\mathbb{Q}} \left(Y_P \cup \left(\bigcup_{0 \leq p \leq P} X_p \right) \right) + \mathbb{R}\mathbb{Q}^2$$

est une réunion dénombrable de droites affines (à pentes rationnelles) et donc un F_{σ} d'intérieur vide. On choisit un point $x_{P+1} \notin Z_P$ et on pose $X_{P+1} = x_{P+1} + \mathbb{Q}^2$. Il est clair que X_{P+1} est disjoint de Z_P . On vérifie aisément que la famille $(X_p)_{0 \leq p \leq P+1}$ vérifie les conditions demandées. En effet, toute droite $\Delta \in \Xi_{P+1}$ est à pente rationnelle et ne contient donc aucun élément de X_p , $p \leq P$. La première condition est donc vérifiée. Pour les mêmes raisons, Δ ne contient aucun point de Y_P , ce qui implique que la seconde condition est également vérifiée. \square

Avant de prouver la Proposition 4.1, remarquons d'abord que la famille $(\gamma_i^k)_{i,k}$ est localement finie: seul un nombre fini de ces arcs rencontrent une partie compacte donnée de \mathbf{D} . On utilisera implicitement ce fait dans la suite. Remarquons ensuite que l'on peut construire, par récurrence, une suite $(W_i^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de *disques de sécurité*:

- chaque W_i^k est un disque ouvert contenant γ_i^k ;
- $f(W_i^k) \cap W_i^{k'} = \emptyset$ si $k' < k$;
- la suite $(\bar{W}_i^k)_{k \leq 0}$ converge vers $\{\alpha_i\}$;
- la suite $(\bar{W}_i^k)_{k \geq 0}$ converge vers $\{\omega_i\}$.

Démonstration de la Proposition 4.1 Commençons par perturber les γ_i^k pour que les deux premières assertions de la Proposition 4.1 soient vérifiées. Fixons γ_i^k . Les orbites O_i sont disjointes deux à deux, fermées et discrètes. L'ensemble

$$\gamma_i^k \cap \left(\left(\bigcup_{i'} O_{i'} \right) \setminus \{z_i^k, z_i^{k+1}\} \right)$$

est donc fini et inclus dans un segment $\gamma' \subset \text{int}(\gamma_i^k)$. On choisit alors un voisinage U de γ' satisfaisant le Lemme 4.2, inclus dans le disque de sécurité W_i^k et tel que

$$U \cap \left(\left(\bigcup_{i'} O_{i'} \right) \setminus \{z_i^k, z_i^{k+1}\} \right) = \gamma_i^k \cap \left(\left(\bigcup_{i'} O_{i'} \right) \setminus \{z_i^k, z_i^{k+1}\} \right).$$

On construit facilement un segment $\tilde{\gamma}_i^k$ dans $\gamma_i^k \cup U$ joignant z_i^k à z_i^{k+1} et évitant l'ensemble

$$\gamma_i^k \cap \left(\left(\bigcup_{i'} O_{i'} \right) \setminus \{z_i^k, z_i^{k+1}\} \right).$$

Puisque dans cette construction, on ne touche pas aux autres arcs, on peut faire une simple récurrence et perturber tous les γ_i^k pour qu'ils vérifient les deux premières conditions de la Proposition 4.1. Nous supposons maintenant que ces deux conditions sont satisfaites et allons perturber de nouveaux les γ_i^k pour que les deux dernières conditions soient également vérifiées.

On peut construire une famille de disques ouverts $(\Delta_i^k)_{i,k}$, disjoints deux à deux, tels que

- $\Delta_i^k \subset W_i^k$;
- $z_i^k \in \Delta_i^k$;
- $\bar{\Delta}_i^k \cap \gamma_{i'}^{k'} = \emptyset$ si $(i', k') \notin \{(i, k-1), (i, k)\}$.

On choisit alors, pour tout (i, k) , un segment dans $\text{int}(\gamma_i^k)$ avec une extrémité dans Δ_i^k et l'autre dans Δ_{i+1}^k puis un voisinage $U_i^k \subset W_i^k$ de ce segment qui vérifie le Lemme 4.2. On peut supposer de plus que $\bar{\Delta}_i^k \cap U_{i'}^{k'} = \emptyset$, si $(i', k') \notin \{(i, k-1), (i, k)\}$.

On peut trouver une famille $(X_i^k)_{i,k}$ de parties dénombrables denses de \mathbb{R}^2 qui vérifient les propriétés indiquées dans le Lemme 4.3. On construit ensuite une famille $(\tilde{\gamma}_i^k)_{i,k}$ de segments, tels que $\tilde{\gamma}_i^k$ joint z_i^k à z_i^{k+1} , est à valeurs dans $\gamma_i^k \cup U_i^k$ et s'écrit $\tilde{\gamma}_i^k = \tilde{\gamma}_i^{k,1} \tilde{\gamma}_i^{k,2} \tilde{\gamma}_i^{k,3}$, où $\tilde{\gamma}_i^{k,1}$ (resp. $\tilde{\gamma}_i^{k,2}$, $\tilde{\gamma}_i^{k,3}$) est un segment à valeurs dans Δ_i^k , (resp. U_i^k , Δ_i^{k+1}), et où $\tilde{\gamma}_i^{k,2}$ est affine par morceaux avec des sommets dans X_i^k .

Si $(i', k') \notin \{(i, k-1), (i, k), (i, k+1)\}$, alors $\tilde{\gamma}_i^k \cap \tilde{\gamma}_{i'}^{k'} = \tilde{\gamma}_i^{k,2} \cap \tilde{\gamma}_{i'}^{k',2}$ est fini. De même, si (i, k) , (i', k') et (i'', k'') sont distincts, alors

$$\tilde{\gamma}_i^k \cap \tilde{\gamma}_{i'}^{k'} \cap \tilde{\gamma}_{i''}^{k''} = \tilde{\gamma}_i^{k,2} \cap \tilde{\gamma}_{i'}^{k',2} \cap \tilde{\gamma}_{i''}^{k'',2} = \emptyset. \quad \square$$

On supposera dorénavant que les γ_i^k vérifient les propriétés énoncées dans les propositions 3.1 et 4.1.

Proposition 4.4 Les arcs Γ_i vérifient les propriétés suivantes:

- tout point z_i^k est un point simple de Γ_i ;
- les arcs Γ_i n'ont pas de points triples;
- $\Gamma_i \cap O_{i'} = \emptyset$, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'}$ est fini, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'}$ ne contient aucun point double ni de Γ_i , ni de $\Gamma_{i'}$, si $i \neq i'$;
- $\Gamma_i \cap \Gamma_{i'} \cap \Gamma_{i''} = \emptyset$ si i, i' et i'' sont distincts.

Démonstration Il s'agit de conséquences immédiates des points suivants:

- les arcs $\gamma_i^k = \Gamma_i|_{[k, k+1]}$ sont des arcs simples;
- les arcs γ_i^k vérifient les conditions de la [Proposition 4.1](#);
- $\lim_{k \rightarrow -\infty} \gamma_i^k = \{\alpha_i\}$;
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \gamma_i^k = \{\omega_i\}$;
- les $2n$ points $\omega_i, \alpha_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont distincts. □

5 Démonstration du lemme topologique fondamental

Nous prouverons dans ce paragraphe le résultat-clé de l'article ([Proposition 5.1](#)). Il s'agit d'un résultat purement topologique qui utilise que le fait que Γ_i joint α_i à ω_i ainsi que les hypothèses combinatoires (ii) et (iii) du [Théorème 0.1](#). Le résultat est encore vrai sans les hypothèses de généricité décrites par la [Proposition 4.4](#). Nous n'écrivons cependant la preuve que dans le cas où ces hypothèses sont vérifiées, beaucoup d'arguments se simplifient.

Nous noterons $\Gamma_i^{\leq t}$ (resp. $\Gamma_i^{< t}$) la restriction de Γ_i à $] -\infty, t]$ (resp. $] -\infty, t[$) et nous définirons de façon analogue $\Gamma_i^{\geq t}$ et $\Gamma_i^{> t}$. Nous ferons, en prenant les précautions usuelles, l'abus de langage qui consiste à identifier un arc à son image. Pour des questions d'homogénéité d'écriture, nous écrirons Γ_i^t au lieu de $\Gamma_i(t)$. Nous définirons l'ensemble des configurations $\mathcal{T} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et pour tout $i_0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous écrirons $p_{i_0}: T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mapsto t_{i_0}$ pour la i_0 -ème projection.

Si K est un entier assez grand et si i et i' sont distincts, alors

$$\Gamma_i(]-\infty, -K]) \cap \Gamma_{i'} = \Gamma_i([K, +\infty[) \cap \Gamma_{i'} = \emptyset.$$

Nous fixons un tel entier K jusqu'à la fin de l'article.

Proposition 5.1 *Il existe $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}$ tel que:*

- (A) *les ensembles $\Gamma_i^{< t_i}, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont disjoints deux à deux;*
- (B) *pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \notin \{i-1, i\}$ tel que $\Gamma_i^{\leq t_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}} \neq \emptyset$.*

Remarquons que si les t_i sont tous très petits, la condition (A) est vérifiée mais pas la condition (B). Si, par contre, les t_i sont tous très grands, c'est (B) qui est vérifiée, mais pas (A). Nous devons donc chercher une configuration critique, correspondant à une situation de connexité limite. Nous utiliserons un procédé de type minimax.

Pour tout $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}$, notons $\Sigma(T)$ l'ensemble des $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels qu'il existe $i' \notin \{i-1, i\}$ vérifiant $\Gamma_i^{\leq t_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}} \neq \emptyset$ et appelons *ordre* de T le cardinal de $\Sigma(T)$. D'après les hypothèses (ii) et (iii) du [Théorème 0.1](#), on peut remarquer que si $i \in \Sigma(T)$ et si $\Gamma_i^{\leq t_i}$ rencontre $\Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}}$, $i' \notin \{i-1, i\}$, alors les arcs $\Gamma_{i-1}^{\leq -K}$ et $\Gamma_{i-1}^{\geq K}$ sont séparés dans \mathbf{D} par $\Gamma_i^{\leq t_i} \cup \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}}$. Notons également \mathcal{T}_* l'ensemble des configurations vérifiant (A). Remarquons que c'est une partie fermée de \mathcal{T} .

Lemme 5.2 Soit $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}_*$.

- (i) Pour tout $i \in \Sigma(T)$, on a $t_i > -K$ et $t_{i-1} < K$.
- (ii) Les configurations

$$T' = (t'_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad T'' = (t''_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad T''' = (t'''_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, \quad \text{où}$$

$$t'_i = \min(t_i, K), \quad t''_i = \max(t_i, -K), \quad t'''_i = \min(t''_i, K) = \max(t'_i, -K),$$

appartiennent à \mathcal{T}_* . De plus on a

$$\Sigma(T') = \Sigma(T'') = \Sigma(T''') = \Sigma(T).$$

Démonstration Soit $i \in \Sigma(T)$ et $i' \notin \{i-1, i\}$ tel que $\Gamma_i^{\leq t_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}} \neq \emptyset$. L'égalité $t_i > -K$ est une conséquence de la définition de K . Prouvons par l'absurde que $t_{i-1} < K$. Dans le cas contraire, l'arc $\Gamma_{i-1} = \Gamma_{i-1}^{< t_{i-1}} \Gamma_{i-1}^{\geq t_{i-1}}$ serait disjoint de $\Gamma_i^{\leq t_i}$ et de $\Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}}$, il séparerait ces deux arcs. Les deux arcs $\Gamma_i^{\leq t_i}$ et $\Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}}$ auraient donc une extrémité commune $\Gamma_i^{t_i} = \Gamma_{i'}^{t_{i'}}$ située sur Γ_{i-1} . Ceci contredit la dernière propriété de la [Proposition 4.4](#).

Il est évident que $T' \in \mathcal{T}_*$ et que $\Sigma(T') \subset \Sigma(T)$ puisque $t'_i \leq t_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $i \in \Sigma(T)$ et $i' \notin \{i-1, i\}$ tel que $\Gamma_i^{\leq t_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}} \neq \emptyset$. Puisque $\Gamma_i^{\geq K} \cap \Gamma_{i'} = \Gamma_{i'}^{\geq K} \cap \Gamma_i = \emptyset$, on en déduit que $\Gamma_i^{\leq t_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t_{i'}} \neq \emptyset$ et donc que $i \in \Sigma(T')$.

Puisque $\Gamma_i^{\leq -K} \cap \Gamma_{i'} = \emptyset$, si $i' \neq i$, on sait que $T'' \in \mathcal{T}_*$. On sait également que $\Sigma(T) \subset \Sigma(T'')$ puisque $t_i \leq t''_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $i \in \Sigma(T'')$ et $i' \notin \{i-1, i\}$ tel que $\Gamma_i^{\leq t''_i} \cap \Gamma_{i'}^{\leq t''_{i'}} \neq \emptyset$. Puisque $\Gamma_i^{\leq -K} \cap \Gamma_{i'} = \Gamma_{i'}^{\leq -K} \cap \Gamma_i = \emptyset$, on en déduit que $t''_i = t_i$ et $t''_{i'} = t_{i'}$, puis que $i \in \Sigma(T)$.

On en déduit finalement que $T''' \in \mathcal{T}_*$ et que $\Sigma(T''') = \Sigma(T)$. Remarquons que $|t'''_i| \leq K$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. □

Démontrer la [Proposition 5.1](#), c'est trouver une configuration $T \in \mathcal{T}_*$ d'ordre n . Commençons d'abord par le résultat suivant:

Lemme 5.3 *Il existe une configuration $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}_*$ d'ordre au moins $n - 1$.*

Démonstration Fixons $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Utilisant les hypothèses (ii) et (iii) du [Théorème 0.1](#), on sait que $\Gamma_i^{\leq -K}$ et $\Gamma_i^{\geq K}$ sont disjoints de Γ_{i-1} et séparés par cet arc. On peut donc définir le premier instant t_i où Γ_i rencontre Γ_{i-1} . D'après la [Proposition 4.4](#), le point $\Gamma_i^{t_i}$ est un point simple de Γ_{i-1} . On écrit $\Gamma_i^{t_i} = \Gamma_{i-1}^{t_{i-1}}$. Remarquons que $\Gamma_i^{<t_i} \cap \Gamma_{i-1}^{<t_{i-1}} = \emptyset$ et que $\Gamma_i^{\leq t_i} \cup \Gamma_{i-1}^{\leq t_{i-1}}$ sépare $\Gamma_{i-2}^{\leq -K}$ de $\Gamma_{i-2}^{\geq K}$. On peut donc définir le premier instant t_{i-2} où Γ_{i-2} rencontre $\Gamma_i^{\leq t_i} \cup \Gamma_{i-1}^{\leq t_{i-1}}$. On peut continuer le raisonnement et définir par récurrence sur $r \in \{2, \dots, n - 1\}$ le premier instant t_{i-r} où Γ_{i-r} rencontre $\bigcup_{0 \leq s \leq r-1} \Gamma_{i-s}^{\leq t_{i-s}}$. La configuration $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ vérifie **(A)** et $\Sigma(T)$ contient $\{i - n + 2, \dots, i - 1\}$. Remarquons maintenant que $\Sigma(T)$ contient i si $\Gamma_{i+1}^{t_{i+1}} = \Gamma_{i-n+1}^{t_{i-n+1}} \in \Gamma_i^{\leq t_i}$. Si, par contre, $\Gamma_{i+1}^{t_{i+1}} \notin \Gamma_i^{\leq t_i}$, il existe $j \in \{i - n + 2, \dots, i - 1\}$ tel que $\Gamma_{i+1}^{t_{i+1}} \in \Gamma_j^{\leq t_j}$. On en déduit que $i + 1 \in \Sigma(T)$. La configuration T est donc au moins d'ordre $n - 1$ (les deux cas sont illustrés sur la [Figure 5](#)). \square

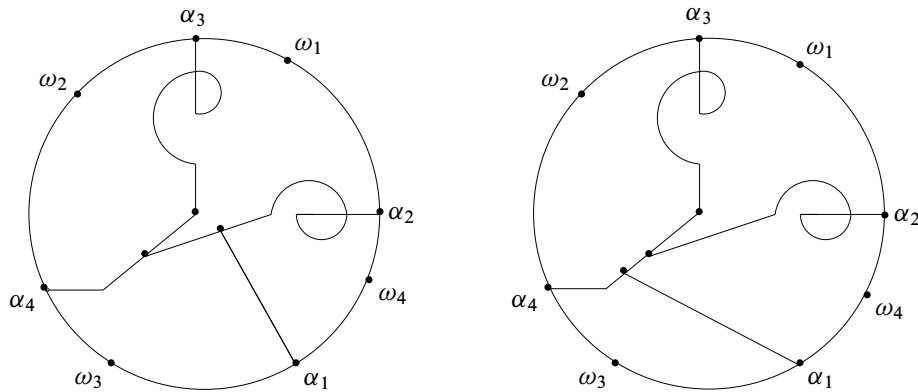


Figure 5

Pour des raisons d'écriture, il sera plus commode dans la suite de la [Section 5](#) d'indexer T par $j \in \{1, \dots, n\}$. Quitte à changer les indices, on peut supposer, d'après le lemme précédent, qu'il existe $T \in \mathcal{T}_*$ telle que $j \in \Sigma(T)$, si $j \neq n$. D'après le [Lemme 5.2](#), on peut toujours supposer que $|t_j| \leq K$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. On notera $\mathcal{T}_{-1} \subset \mathcal{T}_*$ l'ensemble des configurations vérifiant ces deux propriétés. Remarquons que c'est une partie compacte de \mathcal{T} . On en déduit que l'ensemble \mathcal{T}_0 formé des configurations $T \in \mathcal{T}_{-1}$ où p_n atteint son maximum est une partie compacte non vide. On notera t_n^* ce maximum. Nous voulons montrer qu'il existe une configuration d'ordre n dans \mathcal{T}_{-1} . Ce sera une conséquence du [Lemme 5.4](#) qui va suivre (et de la finitude de $\{1, \dots, n\}$). Le principe est un raisonnement par l'absurde, on suppose qu'il n'y a pas

de configuration d'ordre n dans \mathcal{T}_{-1} et on construira alors par récurrence une suite (infinie !) décroissante de parties compactes $(\mathcal{T}_r)_{r \geq 0}$ de \mathcal{T} définies par les valeurs de $r + 1$ projections. Nous allons commencer par initier la récurrence, pour faire ressortir les idées, puis nous énoncerons et démontrerons la construction générale (Lemme 5.4).

Fixons $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans \mathcal{T}_0 et montrons le résultat suivant:

Le point $\Gamma_n^{t_n^*}$ appartient à un arc $\Gamma_{j_1}^{\leq t_{j_1}}$, $j_1 \neq n$, cet entier j_1 est unique, il est égal à $n - 1$ et on a $\Gamma_n^{t_n^*} \in \Gamma_{n-1}^{< t_{n-1}}$.

D'après la première assertion du Lemme 5.2 appliqué à $j = 1 \in \Sigma(T)$, on sait que $t_n = t_n^* < K$. D'après la Proposition 4.4, on sait qu'il existe $t'_n \in]t_n^*, K[$ tel que $\Gamma_n|_{]t'_n, t_n^*]}$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq n$. La configuration T' obtenue à partir de T en remplaçant t_n^* par t'_n n'est pas dans \mathcal{T}_{-1} , puisque t_n^* est le maximum de p_n sur \mathcal{T}_{-1} . Or les coordonnées de T' sont toutes entre $-K$ et K et on a bien évidemment $\Sigma(T) \subset \Sigma(T')$. On en déduit que T' ne vérifie pas la condition (A). Ceci implique que $\Gamma_n^{t_n^*}$ appartient à un arc $\Gamma_{j_1}^{\leq t_{j_1}}$, $j_1 \neq n$. La propriété 4.4 nous dit que l'entier j_1 est unique et que $\Gamma_n^{t_n^*}$ est un point simple de Γ_{j_1} . Le fait que T' ne vérifie pas la condition (A) implique en fait que $\Gamma_n^{t_n^*}$ n'est pas l'extrémité $\Gamma_{j_1}^{t_{j_1}}$ de $\Gamma_{j_1}^{\leq t_{j_1}}$ et appartient donc à $\Gamma_{j_1}^{< t_{j_1}}$. Le fait que $n \notin \Sigma(T)$ implique que $j_1 = n - 1$.

On définit alors

$$t_{n-1}^* = \min p_{n-1}|_{\mathcal{T}_0},$$

$$\mathcal{T}_1 = \{T \in \mathcal{T}_0 \mid p_{n-1}(T) = t_{n-1}^*\}.$$

L'ensemble \mathcal{T}_1 est non vide, on choisit donc $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_1$. Montrons le résultat suivant:

Le point $\Gamma_{n-1}^{t_{n-1}^*}$ appartient à un arc $\Gamma_{j_2}^{\leq t_{j_2}}$, $j_2 \neq n - 1$, cet entier j_2 est unique et vérifie $j_2 < n - 1$.

Puisque $n - 1 \in \Sigma(T)$ on sait, d'après le Lemme 5.2, que $t_{n-1} = t_{n-1}^* > -K$. D'après la Proposition 4.4, on sait qu'il existe $t'_{n-1} \in]-K, t_{n-1}^*[$ tel que $\Gamma_{n-1}|_{]t'_{n-1}, t_{n-1}^*]}$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq n - 1$. Par définition de t_{n-1}^* , on sait que la configuration T' obtenue à partir de T en remplaçant t_{n-1}^* par t'_{n-1} n'appartient pas à \mathcal{T}_0 . Elle vérifie bien évidemment (A), puisque c'est le cas de T . Puisque les coordonnées de T' sont toutes entre $-K$ et K et puisque sa n -ième coordonnée est t_n^* , c'est donc qu'il existe $j \neq n$ tel que $j \notin \Sigma(T')$. On en déduit que $\Gamma_{n-1}^{t_{n-1}^*}$ appartient à un arc $\Gamma_{j_2}^{\leq t_{j_2}}$, $j_2 \neq n - 1$, que j_2 est unique et que l'entier $j \neq n$ qui n'est plus dans $\Sigma(T')$ est soit

$n - 1$ soit j_2 . Or on a vu précédemment que le point $\Gamma_n^{t_n^*}$ n'est pas l'extrémité $\Gamma_{n-1}^{t_{n-1}^*}$. Il appartient donc à $\Gamma_{n-1}^{<t_{n-1}^*}$ et par conséquent appartient à $\Gamma_{n-1}^{\leq t_{n-1}^*}$. On en déduit que $n - 1 \in \Sigma(T')$. C'est donc l'entier j_2 qui n'est pas dans $\Sigma(T')$, ainsi $j_2 \neq n$. On en déduit que $j_2 < n - 1$.

On définit alors

$$t_{j_2}^* = \max p_{j_2} |_{\mathcal{T}_1},$$

$$\mathcal{T}_2 = \{T \in \mathcal{T}_1 \mid p_{j_2}(T) = t_{j_2}^*\}.$$

L'ensemble \mathcal{T}_2 est non vide, on choisit donc $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_2$. Montrons la propriété suivante:

le point $\Gamma_{j_2}^{t_{j_2}^*}$ appartient à un arc $\Gamma_{j_3}^{\leq t_{j_3}}$, $j_3 \neq j_2$, cet entier j_3 est unique, il est égal à $j_2 - 1$ et on a $\Gamma_{j_2}^{t_{j_2}^*} \in \Gamma_{j_2-1}^{<t_{j_2-1}}$.

On sait que $j_2 \neq n - 1$ et donc que $j_2 + 1 \in \Sigma(T)$. On en déduit que $t_{j_2} = t_{j_2}^* < K$, d'après le [Lemme 5.2](#). Utilisant le raisonnement fait plus haut (qui utilise la maximalité de t_2^*) on sait qu'il existe $j_3 \neq j_2$, unique, tel que $\Gamma_{j_2}^{t_{j_2}^*} \in \Gamma_{j_3}^{\leq t_{j_3}}$ et que $\Gamma_{j_2}^{t_{j_2}^*} \notin \Gamma_{j_3}^{t_{j_3}}$. On écrit alors $\Gamma_{j_2}^{t_{j_2}^*} = \Gamma_{j_3}^{t_{j_3}''}$. Notons $T' = (t'_j)_{1 \leq j \leq n}$ la configuration obtenue à partir de T en remplaçant t_{n-1}^* par $t'_{n-1} \in]-K, t_{n-1}^*[$, où $\Gamma_{n-1} |_{]t'_{n-1}, t_{n-1}^*]}$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq n - 1$. Nous avons vu plus haut que $j_2 \notin \Sigma(T')$. Remarquons que $t_{j_3}'' \leq t'_{j_3}$ dans le cas éventuel où j_3 serait égal à $n - 1$. Dans le cas contraire nous avons l'égalité $t_{j_3}'' = t'_{j_3}$. Nous en déduisons que $\Gamma_{j_2}^{\leq t_{j_2}^*} \cap \Gamma_{j_3}^{\leq t_{j_3}'} \neq \emptyset$ et par conséquent que j_3 est nécessairement égal à $j_2 - 1$. Remarquons également que les seuls arcs $\Gamma_j^{\leq t_j}$, $j \neq j_2$, rencontrés par $\Gamma_{j_2}^{\leq t_{j_2}^*}$ sont $\Gamma_{n-1}^{\leq t_{n-1}^*}$ et $\Gamma_{j_3}^{\leq t_{j_3}^*}$ (voir [Figure 6](#)).

En continuant ce processus, nous allons montrer:

Lemme 5.4 Si \mathcal{T}_{-1} ne contient aucune configuration d'ordre n , on peut construire:

- une suite strictement décroissante d'entiers positifs $(j_r)_{r \geq 0}$, vérifiant $j_0 = n$ et $j_{2r+1} = j_{2r} - 1$;
- une suite de réels $(t_{j_r}^*)_{r \geq 0}$;
- une suite décroissante de parties compactes $(\mathcal{T}_r)_{r \geq 0}$ de \mathcal{T} ;

uniquement définies par les propriétés suivantes:

- (i) $t_{j_{2r}}^* = \max p_{j_{2r}} |_{\mathcal{T}_{2r-1}}$ et $\mathcal{T}_{2r} = \{T \in \mathcal{T}_{2r-1} \mid p_{j_{2r}}(T) = t_{j_{2r}}^*\}$;
- (ii) $t_{j_{2r+1}}^* = \min p_{j_{2r+1}} |_{\mathcal{T}_{2r}}$ et $\mathcal{T}_{2r+1} = \{T \in \mathcal{T}_{2r} \mid p_{j_{2r+1}}(T) = t_{j_{2r+1}}^*\}$;

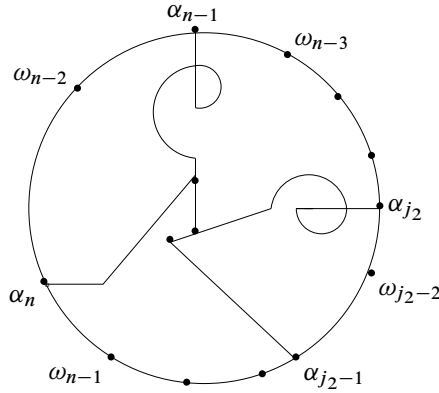


Figure 6

- (iii) il existe un unique entier $j_{2r+2} \neq j_{2r+1}$ dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $\Gamma_{j_{2r+1}}^{t_{j_{2r+1}}^*} \in \Gamma_{j_{2r+2}}$.

De plus, on a:

- (iv) si $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r}$, l'arc $\Gamma_{j_{2r}}^{\leq t_{j_{2r}}} = \Gamma_{j_{2r}}^{\leq t_{j_{2r}}^*}$ est disjoint de $\Gamma_j^{\leq t_j}$ si $j \notin \{j_{2r-1}, j_{2r}, j_{2r+1}\}$ (si $j \notin \{n-1, n\}$ dans le cas où $r = 0$) ainsi que de $\Gamma_{j_{2r-1}}^{< t_{j_{2r-1}}} = \Gamma_{j_{2r-1}}^{< t_{j_{2r-1}}^*}$;
- (v) si $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r}$, le point $\Gamma_{j_{2r}}^{t_{j_{2r}}} = \Gamma_{j_{2r}}^{t_{j_{2r}}^*}$ appartient à $\Gamma_{j_{2r+1}}^{< t_{j_{2r+1}}}$;
- (vi) si $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r+1}$, le point $\Gamma_{j_{2r+1}}^{t_{j_{2r+1}}} = \Gamma_{j_{2r+1}}^{t_{j_{2r+1}}^*}$ appartient à $\Gamma_{j_{2r+2}}^{\leq t_{j_{2r+2}}}$.

Démonstration On peut supposer que les ensembles \mathcal{T}_s ont été définis jusqu'à l'ordre $2r - 1$, que les entiers (j_s) ont été définis jusqu'à l'ordre $2r$ et que les assertions du théorème sont vérifiées jusqu'à cet ordre. C'est le cas, on l'a vu, pour $r = 1$. On définit alors $t_{j_{2r}}^*$ et \mathcal{T}_{2r} par la condition (i). On pose ensuite $j_{2r+1} = j_{2r} - 1$ et on définit $t_{j_{2r+1}}^*$ et \mathcal{T}_{2r+1} par la condition (ii). On va commencer par montrer que (iv), puis (v), sont vérifiées. On montrera ensuite que c'est également le cas de (iii) et (vi). Enfin, on prouvera que j_{2r+2} est strictement plus petit que j_{2r+1} .

Preuve de (iv) Fixons $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r}$. Puisque $j_{2r-1} \neq n$ on sait que $j_{2r-1} \in \Sigma(T)$ et donc que $t_{j_{2r-1}} = t_{j_{2r-1}}^* > -K$, d'après le Lemme 5.2. Choisissons $t'_{j_{2r-1}} \in]-K, t_{j_{2r-1}}^*[$ assez proche de $t_{j_{2r-1}}^*$ pour que l'arc $\Gamma_{j_{2r-1}}|_{[t'_{j_{2r-1}}, t_{j_{2r-1}}^*]}$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq j_{2r-1}$. La configuration T' obtenue à partir de T en remplaçant $t_{j_{2r-1}}^*$ par $t'_{j_{2r-1}}$ n'étant plus dans \mathcal{T}_{2r-2} , il existe donc $j \neq n$ qui n'est plus dans $\Sigma(T)$.

Il s'agit soit de j_{2r-1} soit de j_{2r} puisque $\Gamma_{j_{2r-1}}^{t_{j_{2r-1}}^*} \in \Gamma_{j_{2r}}^{\leq t_{j_{2r}}^*}$ (d'après l'hypothèse de récurrence (vi)). L'hypothèse de récurrence (v) nous dit que $\Gamma_{j_{2r-2}}^{t_{j_{2r-2}}^*} \in \Gamma_{j_{2r-1}}^{< t_{j_{2r-1}}^*}$ et donc que $j_{2r-1} \in \Sigma(T')$. On en déduit que $j_{2r} \notin \Sigma(T')$. Ceci implique, d'une part que $\Gamma_{j_{2r}}^{\leq t_{j_{2r}}^*} \cap \Gamma_j^{\leq t_j} = \emptyset$ si $j \notin \{j_{2r-1}, j_{2r}, j_{2r+1}\}$, d'autre part que $\Gamma_{j_{2r}}^{\leq t_{j_{2r}}^*} \cap \Gamma_{j_{2r-1}}^{< t_{j_{2r-1}}^*} = \emptyset$.

Preuve de (v) Fixons $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r}$. Puisque $j_{2r} + 1 \neq n$ on sait que $j_{2r} + 1 \in \Sigma(T)$ et donc que $t_{2j} = t_{2j}^* < K$, d'après le Lemme 5.2. Choisissons $t'_{j_{2r}} \in]t_{j_{2r}}^*, K[$ assez proche de $t_{j_{2r}}^*$ pour que $\Gamma_{j_{2r}}|_{]t'_{j_{2r}}, t_{j_{2r}}^*]$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq j_{2r}$. La configuration T' obtenue à partir de T en remplaçant $t_{j_{2r}}^*$ par $t'_{j_{2r}}$ ne vérifie plus (A) par maximalité de $t_{j_{2r}}^*$. Il existe donc $j \neq j_{2r}$ tel que $\Gamma_{j_{2r}}^{t_{j_{2r}}^*}$ appartient à un arc $\Gamma_j^{\leq t_j}$, $j \neq j_{2r}$, et ce point, qui est un point simple de Γ_j , n'est pas l'extrémité $\Gamma_j^{t_j}$. Utilisant le point (iv) qui vient juste d'être prouvé, on en déduit que $j = j_{2r+1}$ et que (v) est vrai.

Preuve de (iii) et de (vi) Fixons $T = (t_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{T}_{2r+1}$. On vient de démontrer (v) et on sait donc que $t_{j_{2r+1}} = t_{j_{2r+1}}^* > -K$. Choisissons $t'_{j_{2r+1}} \in]-K, t_{j_{2r+1}}^*[$ assez proche de $t_{j_{2r+1}}^*$ pour que l'arc $\Gamma_{j_{2r+1}}|_{]t'_{j_{2r+1}}, t_{j_{2r+1}}^*]$ ne rencontre aucun arc Γ_j , $j \neq j_{2r+1}$. La configuration T' obtenue à partir de T en remplaçant $t_{j_{2r+1}}^*$ par $t'_{j_{2r+1}}$ n'étant plus dans \mathcal{T}_{2r} , il existe donc $j \neq n$ qui n'est pas dans $\Sigma(T')$. Il existe donc $j_{2r+2} \neq j_{2r+1}$ tel que $\Gamma_{j_{2r+1}}^{t_{j_{2r+1}}^*} \in \Gamma_{j_{2r+2}}^{\leq t_{j_{2r+2}}}$. L'entier j_{2r+2} est le seul entier $j \neq j_{2r+1}$ tel que $\Gamma_{j_{2r+1}}^{t_{j_{2r+1}}^*} \in \Gamma_j$. Nous venons de démontrer (iii) et (vi).

Preuve de l'inégalité $j_{2r+2} < j_{2r+1}$ Nous gardons les notations du paragraphe précédent. Utilisant de nouveau le point (v) qui vient juste d'être prouvé, on en déduit que $j_{2r+1} \in \Sigma(T')$ et donc que l'entier $j \neq n$ qui n'appartient pas à $\Sigma(T')$ est j_{2r+2} . En particulier $j_{2r+2} \neq n$. Puisque $j_{2r+2} \notin \Sigma(T')$, l'arc $\Gamma_{j_{2r+2}}^{\leq t_{j_{2r+2}}}$ ne rencontre aucun arc autre que lui même, que $\Gamma_{j_{2r+1}}^{\leq t_{j_{2r+1}}^*}$ et que $\Gamma_{j_{2r+2}-1}^{\leq t_{j_{2r+2}-1}}$. On en déduit que $j_{2r+2} \neq j_s$, si $1 \leq s \leq 2r + 1$. En effet tout arc $\Gamma_{j_s}^{\leq t_{j_s}}$ rencontre $\Gamma_{j_{s-1}}^{\leq t_{j_{s-1}}}$ et on sait que $j_{s-1} \notin \{j_s, j_s - 1, j_{2r+1}\}$, puisque $j_{s-1} > j_s \geq j_{2r+1}$. Il reste à montrer que $j_{2r+2} \notin \{j_{2s} + 1, \dots, j_{2s-1} - 1\}$ si $s \leq r$. Même dans le cas où $s = r$, on sait que $\Gamma_{j_{2s}}^{t_{j_{2s}}} = \Gamma_{j_{2s}}^{t_{j_{2s}}^*}$ appartient à $\Gamma_{j_{2s+1}}^{< t_{j_{2s+1}}} = \Gamma_{j_{2s+1}}^{< t_{j_{2s+1}}^*}$. On sait d'autre part que $\Gamma_{j_{2s-1}}^{t_{j_{2s-1}}} = \Gamma_{j_{2s-1}}^{t_{j_{2s-1}}^*}$ appartient à $\Gamma_{j_{2s}}^{\leq t_{j_{2s}}^*}$. D'après la Proposition 4.4, on en déduit que

$\Gamma_{j_{2s-1}}^{t_{j_{2s-1}}^*} \in \Gamma_{j_{2s}}^{<t_{j_{2s}}^*}$. Ceci implique que $\Gamma_{j_{2s-1}}^{<t_{j_{2s-1}}^*} \cup \Gamma_{j_{2s}}^{<t_{j_{2s}}^*}$ est connexe et sépare dans \mathbf{D} tout arc $\Gamma_{j'}^{\leq -K}$, $j' \in \{j_{2s}+1, \dots, j_{2s-1}-1\}$, de tout arc $\Gamma_{j''}^{\leq -K}$, $j'' \notin \{j_{2s}, \dots, j_{2s-1}\}$. Puisque, par hypothèse, les arcs $\Gamma_j^{<t_j}$ sont disjoints deux à deux, $\Gamma_{j_{2s-1}}^{<t_{j_{2s-1}}^*} \cup \Gamma_{j_{2s}}^{<t_{j_{2s}}^*}$ sépare $\Gamma_{j'}^{<t_{j'}}$ de $\Gamma_{j''}^{<t_{j''}}$. On en déduit que $\Gamma_{j'}^{\leq t_{j'}} \cap \Gamma_{j''}^{\leq t_{j''}} = \emptyset$. En effet si ces deux arcs s'intersectaient, ils devraient le faire sur $\Gamma_{j_{2s-1}}^{<t_{j_{2s-1}}^*} \cup \Gamma_{j_{2s}}^{<t_{j_{2s}}^*}$, ce qui contredirait la **Proposition 4.4**. Puisque $j_{2r+1} \notin \{j_{2s}, \dots, j_{2s-1}\}$ et puisque $\Gamma_{j_{2r+1}}^{\leq t_{j_{2r+1}}} \cap \Gamma_{j_{2r+2}}^{\leq t_{j_{2r+2}}} \neq \emptyset$, on en déduit que $j_{2r+2} \notin \{j_{2s}+1, \dots, j_{2s-1}-1\}$. \square

Si $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \in \mathcal{T}_*$ est une configuration d'ordre n , on sait que $|t_i| < K$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d'après le **Lemme 5.2**. L'ensemble des configurations $T \in \mathcal{T}_*$ d'ordre n , qui est fermé, est donc compact. Considérons l'ordre lexicographique défini sur \mathcal{T} par un ordre quelconque sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut alors trouver une configuration maximale $T^0 = (t_i^0)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ pour cet ordre dans l'ensemble des configurations de \mathcal{T}_* qui sont d'ordre n . On vérifie facilement, utilisant les arguments vus dans la preuve précédente, que pour tout i , il existe $i' \neq i$ unique tel que $\Gamma_i^{t_i^0} \in \Gamma_{i'}$ et que $\Gamma_{i'}^{t_{i'}^0} \in \Gamma_i^{<t_i^0}$. On se fixera dorénavant une telle configuration et on posera $\Gamma_i^- = \Gamma_i^{\leq t_i^0}$ et $\sigma_i^0 = \Gamma_i^{t_i^0}$. On définira également $\Gamma_i^+ = \Gamma_i^{\geq K+1/2}$. Sur la **Figure 7** nous donnons un exemple avec $n = 4$, où l'ordre sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ vérifie $1 < 2 < 3 < 4$. Il n'y a qu'une configuration d'ordre $n = 4$ maximale possible dans cet exemple.

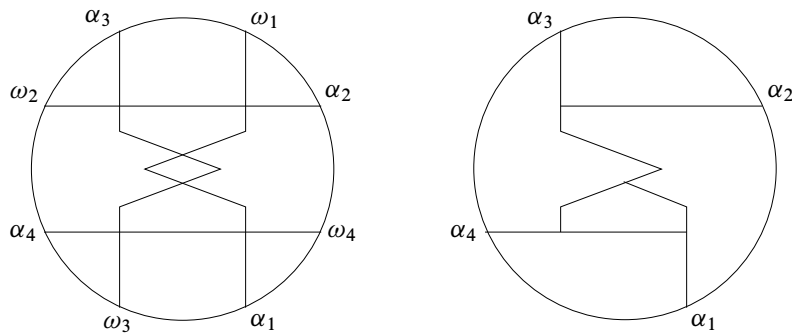


Figure 7

Proposition 5.5 Nous avons les propriétés suivantes:

- $\Gamma_i^+ \cap \Gamma_{i'}^- = \Gamma_i^+ \cap \Gamma_{i'}^+ = \emptyset$, si $i' \neq i$;
- $\Gamma_i^+ \cap \Gamma_i^- = \emptyset$;

- $(\Gamma_i^- \setminus \{\sigma_i^0\}) \cap (\Gamma_{i'}^- \setminus \{\sigma_{i'}^0\}) = \emptyset$, si $i' \neq i$;
- $\Gamma_i^{\leq -K} \cap \Gamma_{i'}^- = \emptyset$, si $i' \neq i$;
- l'ensemble $\Gamma_i^- \setminus \bigcup_{i' \neq i} \Gamma_{i'}^-$ est inclus dans une composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \bigcup_{i' \neq i} \Gamma_{i'}^-$;
- pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \notin \{i, i-1\}$ tel que $\Gamma_i^- \cap \Gamma_{i'}^- \neq \emptyset$;
- si $\Gamma_i^- \cap \Gamma_{i'}^- \neq \emptyset$, avec $i' \notin \{i, i-1\}$, alors la composante connexe de $\mathbf{D} \setminus (\Gamma_i^- \cup \Gamma_{i'}^-)$ qui contient $\Gamma_{i-1}^{\leq -K}$ est différente de celle qui contient Γ_{i-1}^+ .

Démonstration Le seul point qui n'est pas immédiat ou qui n'a pas été mentionné précédemment est le cinquième point. Il n'est cependant pas très difficile à prouver. Si le point Γ_i^t , $t < t_i^0$, n'appartient à aucun $\Gamma_{i'}^-$, $i' \neq i$, il n'y a en effet aucune difficulté à perturber l'arc Γ_i sur $[-K, t]$ pour qu'il aboutisse en Γ_i^t tout en évitant $\bigcup_{i' \neq i} \Gamma_{i'}^-$. En effet on peut contourner chaque point de $\Gamma_i|_{[-K, t]}$ qui est sur un $\Gamma_{i'}^-$, $i' \neq i$, au voisinage de ce point (voir Figure 8). □

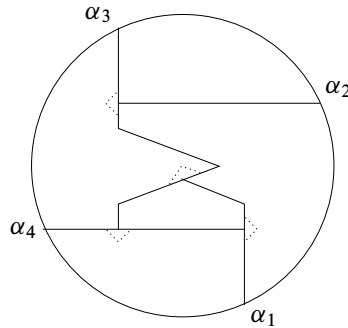


Figure 8

6 Construction du graphe modèle

Nous allons construire dans cette section un graphe G qui sera le modèle unidimensionnel de notre décomposition en briques finale. Rappelons que l'extrémité σ_i^0 de Γ_i^- appartient à un unique arc $\Gamma_{i'}^-$, $i' \neq i$, que c'est un point simple de Γ_i et de $\Gamma_{i'}$, qu'il n'appartient pas à O_i et que $\sigma_i^0 \neq \sigma_{i'}^0$. On appellera *singularité* de Γ_i^- tout point qui appartient à O_i ou qui est l'extrémité d'un arc $\Gamma_{i'}^-$. Les singularités étant des points simples de Γ_i , on peut les paramétrer sous la forme $\sigma_i^l = \Gamma_i(t_i^l)$, où $(t_i^l)_{l \leq 0}$ est une suite strictement croissante uniquement déterminée. On se fixe alors L suffisamment

grand pour que $t_i^{-L} \leq -K$. Les singularités σ_i^l , $l \leq -L$, sont alors nécessairement des points de l'orbite O_i . Remarquons qu'on ne peut pas trouver i_0 et i_1 tels que

$$\sigma_{i_0}^{-1} = \sigma_{i_1}^0, \quad \sigma_{i_0}^0 = \sigma_{i_1}^{-1}.$$

En effet, supposons que $i_0 > i_1$ (pour l'ordre sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui nous a permis de définir T^0). Si $t > t_i^0$ est proche de t_i^0 , la configuration $T' = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ où $t'_{i_0} = t$, $t'_{i_1} = t_{i_1}^{-1}$ et $t'_i = t_i^0$ si $i \notin \{i_0, i_1\}$ vérifie les conditions (A) et (B) et est plus grande que T^0 pour l'ordre lexicographique, ce qui contredit la maximalité de T^0 .

Définissons maintenant une suite $(t^l)_{l \geq 1}$ en posant

$$\begin{cases} t^1 = K + 1/2 \\ t^l = K + l - 1 \quad \text{si } l \geq 2 \end{cases}$$

et définissons les singularités $\sigma_i^l = \Gamma_i(t^l)$ de Γ_i^+ . La Proposition 3.1 nous permet d'affirmer l'existence d'une suite de disques de sécurité $(V_i^l)_{l \neq 0}$ adaptée à notre nouvelle indexation. Plus précisément:

Lemme 6.1 *On peut construire, pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, une suite $(V_i^l)_{l \neq 0}$ de disques ouverts telle que:*

- chaque V_i^l contient le segment $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$;
- $V_i^l \cap V_{i'}^{l'} = \emptyset$, si $i \neq i'$ et $l > 0$;
- $V_i^l \cap V_i^{l'} = \emptyset$, si $l' < 0 < l$;
- $f(V_i^l) \cap V_i^{l'} = \emptyset$, si $l' < l$;
- la suite $(\bar{V}_i^l)_{l > 0}$ converge vers $\{\omega_i\}$;
- la suite $(\bar{V}_i^l)_{l < 0}$ converge vers $\{\alpha_i\}$.

On définit maintenant deux suites d'arcs d'attache $(\alpha_i^l)_{l < 0}$ et $(\alpha_i^l)_{l > 0}$ de la façon suivante:

$$\alpha_i^{-1} = \Gamma_i|_{[t_i^{-1}, t_i^0]};$$

$$\alpha_i^1 = \Gamma_i|_{[t_i^1, t_i^2]};$$

si $l < -1$, alors $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$, en notant t_i^{l+1} le premier instant où $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$ rencontre $\bigcup_{l < m < 0} \alpha_i^m$;

si $l > 1$, alors $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$, en notant t_i^l le dernier instant où $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$ rencontre $\bigcup_{0 < m < l} \alpha_i^m$.

Remarquons que α_i^l est un segment (i.e. ne se réduit pas à un point) puisque les singularités sont des points simples de Γ_i . Remarquons également que $\alpha_i^l \subset V_i^l$. Toujours grâce à la Proposition 4.4, on sait que pour tout $l < -1$, le point $\Gamma_i(t_i^l)$ appartient à un unique arc α_i^m , $l < m < 0$; qu'il est différent de l'extrémité $\Gamma_i(t_i^m)$ et qu'il ne peut être égal à l'extrémité σ_i^m que dans le cas où $m = l - 1$ et $t_i^l = t_i^{l-1}$. Nous avons un résultat analogue pour les α_i^l , $l > 0$. Parmi les singularités, nous porterons particulièrement attention à la singularité $\sigma_i^* = \Gamma_i[(t_i^0)]$, où $[t]$ désigne la partie entière d'un réel t . Il s'agit de la singularité de Γ_i^- la plus "proche" de l'extrémité σ_i^0 parmi les singularités qui sont sur O_i . Si on écrit $\sigma_i^* = \sigma_i^{l_i}$, on peut remarquer que $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$ si $l_i \leq l < 0$.

On construit ainsi des arbres localement finis $A_i^- = \bigcup_{l < 0} \alpha_i^l$ et $A_i^+ = \bigcup_{l > 0} \alpha_i^l$: seul un nombre fini de α_i^l rencontrent une partie compacte de \mathbf{D} donnée. L'arbre A_i^- est inclus dans Γ_i^- et contient toutes les singularités de Γ_i^- . C'est sur le graphe $G = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (A_i^- \cup A_i^+)$ que nous allons modéliser notre décomposition. Nous illustrons la construction du graphe G sur la Figure 9. Les singularités qui correspondent à des points de l'orbite sont représentées par des points noirs, celles qui sont des extrémités sont représentées par des points blancs.

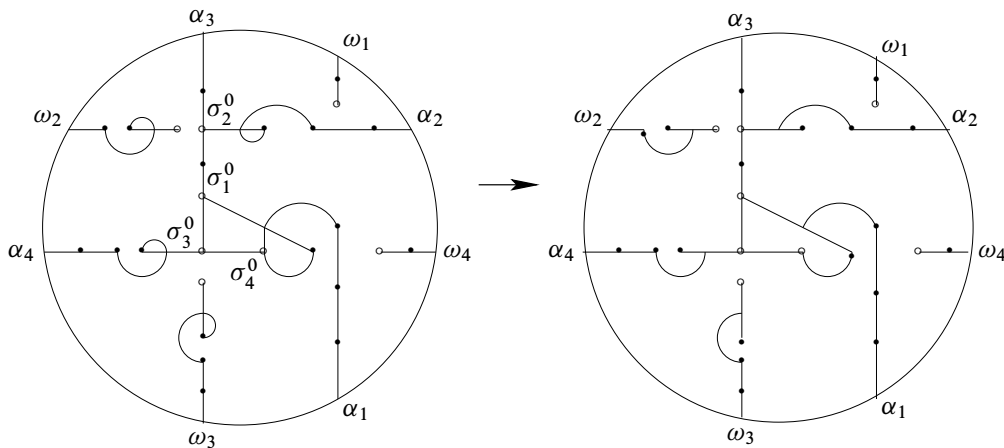


Figure 9

On déduit facilement de la propriété 5.5 et des inclusions $A_i^- \subset \Gamma_i^-$ et $A_i^+ \subset \Gamma_i^+$ le résultat qui suit:

Proposition 6.2 Nous avons les propriétés suivantes:

- $A_i^+ \cap A_{i'}^- = \emptyset$, pour tous i' et i dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$;
- $A_i^+ \cap A_{i'}^+ = \emptyset$, si $i \neq i'$;
- $(A_i^- \setminus \{\sigma_i^0\}) \cap (A_{i'}^- \setminus \{\sigma_{i'}^0\}) = \emptyset$, si $i \neq i'$;
- $\alpha_i^l \cap A_{i'}^- = \emptyset$, si $i \neq i'$ et $l < -L$;
- l'ensemble $A_i^- \setminus \bigcup_{i' \neq i} A_{i'}^-$ est inclus dans une composante connexe de $\mathbf{D} \setminus \bigcup_{i' \neq i} A_{i'}^-$;
- pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \notin \{i, i-1\}$ tel que $A_i^- \cap A_{i'}^- \neq \emptyset$;
- si $A_i^- \cap A_{i'}^- \neq \emptyset$, avec $i' \notin \{i, i-1\}$, alors la composante connexe de $\mathbf{D} \setminus (A_i^- \cup A_{i'}^-)$ qui contient les α_{i-1}^l , $l < -L$, est différente de celle qui contient A_{i-1}^+ .

7 Construction d'une décomposition adaptée

Nous construirons dans cette section une décomposition en briques libre maximale modelée sur le graphe $G = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} (A_i^- \cup A_i^+)$. Nous utiliserons implicitement le théorème de Schoenflies, ou plutôt la version généralisée qu'en donne Homma [13]. La construction se fera en plusieurs étapes. Commençons par la plus simple, en rappelant que la famille de disques de sécurité $(V_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l \neq 0}$ a été définie dans le Lemme 6.1.

Construction de la famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l > 0}$

Lemme 7.1 On peut construire une famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l > 0}$ de disques fermés de \mathbf{D} telle que:

- (i) chaque b_i^l est libre et inclus dans V_i^l ;
- (ii) $\text{Int}(b_i^l) \cap \text{Int}(b_i^{l'}) = \emptyset$, si $l \neq l'$;
- (iii) $\text{Int}(b_i^1)$ contient σ_i^1 et σ_i^2 ;
- (iv) $\text{Int}(b_i^l)$ contient σ_i^{l+1} , si $l \geq 2$;
- (v) $\text{Int}(\bigcup_{m \leq l} b_i^m)$ contient $\bigcup_{m \leq l} \alpha_i^m$;
- (vi) α_i^l , $l > 1$, rencontre un unique disque b_i^m , $m < l$, que l'on note $b_i^{m[l]}$;
- (vii) si b_i^m intersecte un arc $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l+1}]}$, $l > m$, alors $b_i^m \cap \alpha_i^l$ est un sous-segment non trivial $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{m[l]}]}$ de α_i^l et $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{m[l]}]} \subset \text{Int}(b_i^m)$;

- (viii) un disque b_i^l , $l > 1$, ne rencontre aucun disque b_i^m , $m < l$, autre que $b_i^{m[l]}$;
- (ix) $b_i^l \cap b_i^{m[l]} = \partial b_i^l \cap \partial b_i^{m[l]}$ est un segment.

Démonstration Puisque $\Gamma_i|_{[K, K+1]}$ est un arc de translation, le segment $\alpha_i^1 = \Gamma_i|_{[K+1/2, K+1]}$ est libre. Nous pouvons donc construire un disque fermé $b_i^1 \subset V_i^1$ qui est libre et dont l'intérieur contient α_i^1 . Nous pouvons de plus supposer que b_i^1 ne contient aucune singularité σ_i^l , $l > 2$. Soyons plus précis. Il n'y a qu'un nombre fini d'arcs α_i^l , $l > 1$, qui rencontrent α_i^1 . Nous pouvons supposer, d'une part que ce sont les seuls que rencontre b_i^1 , d'autre part que b_i^1 vérifie la condition (vii) du [Lemme 7.1](#).

Supposons maintenant que les disques b_i^m ont été construits jusqu'à l'ordre l et qu'ils vérifient les conditions du [Lemme 7.1](#). Ceci a un sens si on remplace la condition (vi) par la condition suivante:

- (vi') un arc d'attache $\alpha_i^{l'}$, $l' > 1$, rencontre au plus un disque b_i^m , $m \leq \min(l, l' - 1)$.

Considérons l'arc d'attache $\alpha_i^{l'+1} = \Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{l'+2}]}$. Nous savons que $\Gamma_i(t_i^{l'+1})$ appartient à un arc α_i^m , $m \leq l$, et donc à un disque b_i^m , $m' \leq l$ d'après (v). Ce disque est unique d'après (vi'), on le note $b_i^{m[l'+1]}$. D'après (viii), nous savons que $\alpha_i^{l'+1} \cap b_i^{m[l'+1]} = \Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{m[l'+1]}]}$, où $t_i^{l'+1} < t_i^{m[l'+1]} < t_i^{l'+2}$. Le segment $\Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{m[l'+1]}]}$ est libre, puisque $\Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{l'+2}]}$ est un arc de translation. Il est également inclus dans $V_i^{l'+1}$. On peut donc construire un disque fermé $b_i^{l'+1} \subset V_i^{l'+1}$ qui est libre, dont l'intérieur contient $\Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{m[l'+1]}]}$, et qui ne rencontre qu'un seul disque b_i^m , $m \leq l$, à savoir $b_i^{m[l'+1]}$. On peut également supposer que $b_i^{l'+1} \cap b_i^{m[l'+1]} = \partial b_i^{l'+1} \cap \partial b_i^{m[l'+1]}$ est un segment dont $\Gamma_i(t_i^{l'+1})$ n'est pas une extrémité. Tout arc d'attache $\alpha_i^{l'}$, $l' > l+1$, qui rencontre $\Gamma_i|_{[t_i^{l'+1}, t_i^{l'+2}]}$ est disjoint de tous les disques b_i^m , $m \leq l$, d'après (vii). On peut donc supposer que $b_i^{l'+1}$ vérifie également la condition (vii). Remarquons maintenant que la famille $(b_i^m)_{1 \leq m \leq l+1}$ vérifie toutes les conditions du lemme. Nous avons dessiné les disques b_i^l , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $l > 0$, sur la [Figure 10](#). □

Construction de la famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$

La construction sera similaire, à savoir un épaississement des arbres A_i^- , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La situation est cependant plus délicate car ces arbres ne sont pas disjoints. Rappelons que l'extrémité σ_i^0 n'est pas sur O_i et que le segment $\Gamma_i|_{[[t_i^0], t_i^0]}$ qui joint la singularité σ_i^* à σ_i^0 est donc libre. Il en est de même, bien sûr, du sous-segment α_i^{-1} . Rappelons également que σ_i^0 , qui appartient à un unique arc Γ_{i_0} , $i_0 \neq i$, est sur $A_{i_0}^-$. Dans le

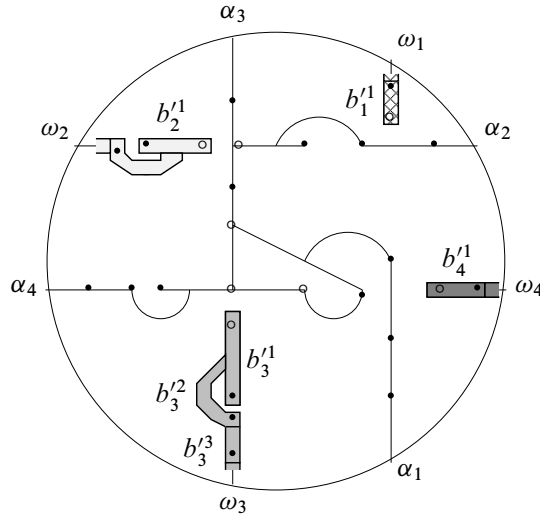


Figure 10

cas où $\sigma_i^{-1} = \sigma_i^*$, on sait que $\alpha_i^{-1} \setminus \sigma_i^0$ est disjoint de tout arc $\Gamma_{i'}$, $i' \neq i$, et donc de $A_{i'}^-$. Dans le cas contraire, σ_i^{-1} appartient à un unique arc Γ_{i_1} , $i_1 \neq i$, et c'est l'extrémité $\sigma_{i_1}^0$ de $A_{i_1}^-$. Dans ce cas $\text{int}(\alpha_i^1)$ ne rencontre aucun arc $\Gamma_{i'}$, $i' \neq i$. On peut donc construire une famille $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ de disques fermés libres de \mathbf{D} , vérifiant $\alpha_i^{-1} \subset b_i^{-1} \subset V_i^{-1}$, dont les intérieurs sont disjoints deux à deux, et tels que

$$b_i^{-1} \cap b_{i'}^{-1} \neq \emptyset \text{ et } i \neq i' \implies \sigma_i^0 = \sigma_{i'}^{-1} \text{ ou } \sigma_i^{-1} = \sigma_{i'}^0.$$

On va être plus précis. Pour toute singularité $\sigma_i^l = \Gamma_i(t_i^l)$, $l < 0$, choisissons $\varepsilon_i^l > 0$ tel que:

- $t_i^l + \varepsilon_i^l < t_i^{l'}$;
- $\Gamma_i|_{[t_i^l - \varepsilon_i^l, t_i^l + \varepsilon_i^l]} \subset V_i^l$;
- $\Gamma_i|_{[t_i^l - \varepsilon_i^l, t_i^l + \varepsilon_i^l]} \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \Gamma_{i'} \right) = \emptyset$, si $\sigma_i^l \in O_i$;
- $\Gamma_i|_{[t_i^l - \varepsilon_i^l, t_i^l + \varepsilon_i^l]} \cap \left(\bigcup_{i' \neq i} \Gamma_{i'} \right) = \{\sigma_{i'}^l\}$, si $\sigma_i^l \notin O_i$.

Lemme 7.2 On peut constuire une famille $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ de disques fermés de \mathbf{D} et une famille $(\eta_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ de réels > 0 , telles que:

- (i) b_i^{-1} contient α_i^{-1} ;
- (ii) b_i^{-1} est libre et inclus dans V_i^{-1} ;
- (iii) $\text{Int}(b_i^{-1}) \cap \text{Int}(b_{i'}^{-1}) = \emptyset$, si $i \neq i'$;

- (iv) si b_i^{-1} intersecte un arc d'attache $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^l]}$, $l \leq -2$, alors $b_i^{-1} \cap \alpha_i^l$ est un sous-segment $\Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^l]}$ de α_i^l , avec $t_i^l < t_i^l < t_i^l$;
- (v) $0 < \eta_i^{-1} < \min(\varepsilon_i^{-1}, \varepsilon_{i_0}^{l_0})$, où on écrit $\sigma_i^0 = \sigma_{i_0}^{l_0}$;
- (vi) $b_i^{-1} \cap A_{i_0}^- = \Gamma_{i_0}|_{[t_{i_0}^{l_0}, t_{i_0}^{l_0} + \eta_i^{-1}]}$;
- (vii) si $\sigma_i^{-1} = \sigma_i^*$, alors $b_i^{-1} \cap A_{i'}^- = b_i^{-1} \cap b_{i'}^{-1} = \emptyset$, si $i' \notin \{i, i_0\}$;
- (viii) si $\sigma_i^{-1} = \sigma_i^*$, alors $\sigma_i^{-1} \in \text{Int}(b_i^{-1})$;
- (ix) si $\sigma_i^{-1} = \sigma_{i_1}^0$ est une extrémité, alors $b_i^{-1} \cap A_{i'}^- = b_i^{-1} \cap b_{i'}^{-1} = \emptyset$, si $i' \notin \{i, i_0, i_1\}$;
- (x) si $\sigma_i^{-1} = \sigma_{i_1}^0$ est une extrémité, alors ∂b_i^{-1} contient $\Gamma_i|_{[t_i^{-1} - \eta_i^{-1}, t_i^{-1} + \eta_i^{-1}]}$;
- (xi) si $\sigma_i^{-1} = \sigma_{i_1}^0$ est une extrémité, alors

$$b_i^{-1} \cap b_{i_1}^{-1} = \partial b_i^{-1} \cap \partial b_{i_1}^{-1} = \Gamma_{i_1}|_{[t_{i_1}^{l_1}, t_{i_1}^{l_1} + \min(\eta_i^{-1}, \eta_{i_1}^{-1})]}$$

Nous avons dessiné les disques b_i^{-1} , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sur la Figure 11.

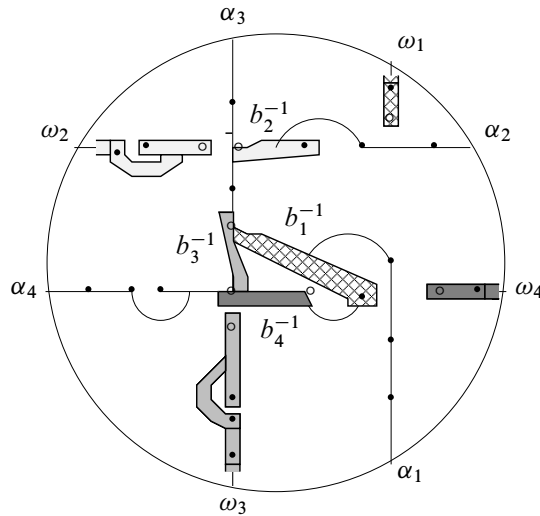


Figure 11

On peut alors étendre la famille $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$:

Lemme 7.3 On peut étendre la famille $(b_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ en une famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$ de disques fermés de \mathbf{D} et la famille $(\eta_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ en une famille $(\eta_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$ de réels > 0 telles que:

- (i) $0 < \eta_i^l < \varepsilon_i^l$;
- (ii) chaque b_i^l est libre et inclus dans V_i^l ;
- (iii) $\sigma_i^l \in \text{Int}(b_i^l)$, si $\sigma_i^l \in O_i$;
- (iv) $\sigma_i^l \in \partial b_i^l$, si $\sigma_i^l \notin O_i$, plus précisément, $\Gamma_i|_{[t_i^l - \eta_i^l, t_i^l + \eta_i^l]} \subset \partial b_i^l$;
- (v) $\bigcup_{m \geq l} b_i^m$ contient $\bigcup_{m \geq l} \alpha_i^m$;
- (vi) $\text{Int}(b_i^l) \cap \text{Int}(b_{i'}^{l'}) = \emptyset$, si $(i, l) \neq (i', l')$;
- (vii) $\text{Int}(b_i^l) \cap A_{i'}^- = \emptyset$, si $i \neq i'$;
- (viii) un arc d'attache α_i^l , $l < -1$, rencontre un unique disque b_i^m , $m > l$, que l'on note $b_i^{m[l]}$;
- (ix) si b_i^m intersecte un arc d'attache $\alpha_i^l = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^{l'}]}$, $l < m$, alors $b_i^m \cap \alpha_i^l$ est un sous-segment $\Gamma_i|_{[t_i^{m'}, t_i^{l'+1}]}$ de α_i^l , où $t_i^l < t_i^{m'} < t_i^l$;
- (x) un disque b_i^l , $l < -1$, ne rencontre aucun disque b_i^m , $m > l$, autre que $b_i^{m[l]}$;
- (xi) $b_i^l \cap b_i^{m[l]} = \partial b_i^l \cap \partial b_i^{m[l]}$ est un segment;
- (xii) un disque b_i^l , $l < -1$, ne rencontre aucun disque $b_{i'}^{l'}$, $i' \neq i$, si $\sigma_i^l \in O_i$;
- (xiii) un disque b_i^l , $l < -1$, ne rencontre aucun disque $b_{i'}^{l'}$, $i' \neq i$, autre que $b_{i_1}^{-1}$, si σ_i^l est l'extrémité $\sigma_{i_1}^0$, et on a $b_i^l \cap b_{i_1}^{-1} = \partial b_i^l \cap \partial b_{i_1}^{-1} = \Gamma_i|_{[t_i^l, t_i^l + \eta_{i_1}^{-1}]}$.

Démonstration On raisonne par récurrence, comme dans la preuve du [Lemme 7.1](#). On suppose donc qu'une famille $(b_i^m)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, m \geq l}$ a été construite qui vérifie toutes les hypothèses du [Lemme 7.3](#) en remplaçant (viii) par:

- (viii') un arc d'attache $\alpha_{i'}^{l'}$, $l' < 0$, rencontre au plus un disque b_i^m , $m \geq \max(l, l' + 1)$.

Fixons $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons l'arc d'attache $\alpha_i^{l-1} = \Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{l'-1}]}$.

Nous savons que $\Gamma_i(t_i^{l-1})$ appartient à un arc α_i^m , $m \geq l$, et donc à un disque $b_i^{m'}$, $m' \geq l$, d'après (v). D'après (viii'), ce disque est le seul disque b_i^m , $m \geq l$ que rencontre α_i^{l-1} . On le note $b_i^{m[l-1]}$. D'après (ix), nous savons que $\alpha_i^{l-1} \cap b_i^{m[l-1]} = \Gamma_i|_{[t_i^{m'-1}, t_i^{l'-1}]}$, où $t_i^{l-1} < t_i^{m'-1} < t_i^{l-1}$. Le segment $\Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{m'-1}]}$ est libre et inclus dans V_i^{l-1} . Dans le cas où $\sigma_i^{l-1} \in O_i$, le segment $\Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{m'-1}]}$ ne rencontre aucun arbre $A_{i'}^-$, $i' \neq i$, et aucun disque $b_{i'}^m$, $i' \neq i$, $m \geq l$. Dans le cas où σ_i^{l-1} est l'extrémité $\sigma_{i_1}^0$, ce segment ne rencontre aucun arbre $A_{i'}^-$, $i' \notin \{i, i_1\}$, et n'intersecte $A_{i_1}^-$ qu'en son extrémité $\sigma_{i_1}^0$. De même, il ne rencontre aucun disque $b_{i'}^m$, $i' \neq i$,

$m \geq l$, autre que $b_{i_1}^{-1}$ et on a $b_{i_1}^{-1} \cap \Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{\prime l-1}]} = \Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{l-1} + \eta_{i_1}^{-1}]}$. On peut donc construire une famille de disques libres $(b_i^{l-1})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, disjoints deux à deux, telle que

- b_i^{l-1} est inclus dans V_i^{l-1} ,
- b_i^{l-1} contient $\Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{\prime l-1}]}$;
- b_i^{l-1} ne rencontre aucun disque b_i^m , $m \geq l$, autre que $b_i^{m[l-1]}$;
- $b_i^{l-1} \cap b_i^{m[l-1]} = \partial b_i^{l-1} \cap \partial b_i^{m[l-1]}$ est un segment dont $\Gamma(t_i^{\prime l-1})$ n'est pas une extrémité;
- b_i^{l-1} ne rencontre aucun disque $b_i^{m'}$, $i' \neq i$, $m' \geq l$, dans le cas où $\sigma_i^{l-1} \in O_i$;
- $\text{Int}(b_i^{l-1})$ contient $\Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{\prime l-1}]}$, dans le cas où $\sigma_i^{l-1} \in O_i$;
- b_i^{l-1} ne rencontre aucun disque $b_i^{m'}$, $i' \neq i$, $m' \geq l$, autre que $b_{i_1}^{-1}$ dans le cas où $\sigma_i^{l-1} = \sigma_{i_1}^0$;
- ∂b_i^{l-1} contient $\Gamma_i|_{[t_i^{l+1} - \eta_i^{l-1}, t_i^{l-1} + \eta_i^{l-1}]}$ si $\sigma_i^{l-1} \notin O_i$.

Puisque par hypothèse, tout arc attache $\eta_i^{l'}$, $l' < l - 1$ qui rencontre $\Gamma_i|_{[t_i^{l-1}, t_i^{\prime l-1}]}$ est disjoint de toute brique b_i^m , $m \geq l$, on peut supposer de plus que la condition (x) est également remplie.

On peut vérifier que les conditions du lemme sont maintenant vérifiées jusqu'à l'ordre $l - 1$. Nous avons dessiné les disques b_i^l , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $l < 0$, sur la [Figure 12](#). \square

Remarque Écrivons $\sigma_i^* = \sigma_i^{l_i}$. Puisque les $V_i^{l_i}$ peuvent être choisis arbitrairement proches des $\alpha_i^{l_i}$ et puisque $\Gamma_i|_{[[t_i^0], t_i^0]}$ est libre, on peut supposer que $\bigcup_{l_i \leq l < 0} b_i^{l_i}$ (qui est un disque fermé) est libre.

Construction de la famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$

On va modifier de façon naturelle la famille $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$. On définit, pour tout $r < 0$, une famille $(b_{i,r}^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$ de disques libres par les relations de récurrence suivantes, où $m[l] \in \{l + 1, \dots, -1\}$ est défini par l'assertion (viii) du [Lemme 7.2](#):

- $b_{i,-1}^l = b_i^l$, pour tout $l < 0$;
- $b_{i,r}^l = b_i^l$, pour tout $l < r$;

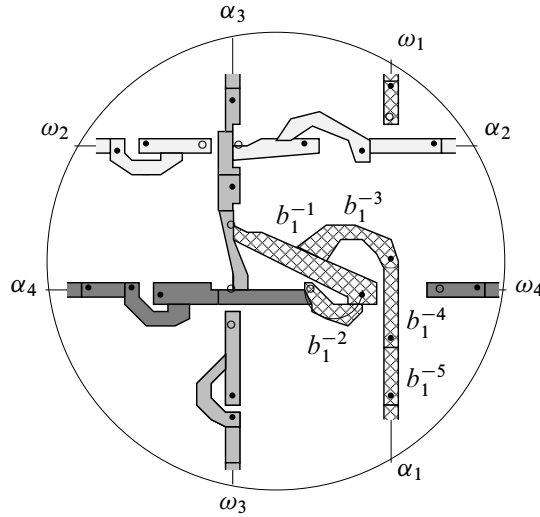


Figure 12

- si $b_i^r \cup b_{i,r+1}^{m[r]}$ n'est pas libre, on pose

$$b_{i,r}^l = b_{i,r+1}^l, \text{ pour tout } l < 0;$$

- si $b_i^r \cup b_{i,r+1}^{m[r]}$ est libre, on pose

$$\begin{cases} b_{i,r}^r = b_i^r \cup b_{i,r+1}^{m[r]}, \\ b_{i,r}^l = b_i^r \cup b_{i,r+1}^{m[r]}, & \text{si } l > r \text{ et } b_{i,r+1}^l = b_{i,r+1}^{m[r]}, \\ b_{i,r}^l = b_{i,r+1}^l, & \text{si } l > r \text{ et } b_{i,r+1}^l \neq b_{i,r+1}^{m[r]}. \end{cases}$$

Chaque disque $b_{i,r}^l$ est une réunion de disques b_i^m , $m \geq l$, et contient b_i^l . Puisque b_i^l est inclus dans le disque de sécurité V_i^l et puisque $f(V_i^m) \cap V_i^l = \emptyset$, si $m > l$, on peut remarquer, dans la construction précédente que $f(b_i^r) \cap b_{i,r+1}^{m[r]} \neq \emptyset$, dans le cas où $b_i^r \cup b_{i,r+1}^{m[r]}$ n'est pas libre. On en déduit:

Lemme 7.4 Pour tout $r < -1$ et tout $l \in \{r, \dots, -2\}$, il existe $m \in \{l + 1, \dots, -1\}$ tel que $b_{i,r}^l = b_{i,r}^m$ ou $f(b_{i,r}^l) \cap b_{i,r}^m \neq \emptyset$.

Remarquons maintenant:

Lemme 7.5 Deux cas sont possibles: (i) f est récurrent;

- (ii) tout disque $b_{i,r}^l$ contient au plus $n - 1$ disques b_i^m .

Démonstration Chaque disque b_i^m , $m < 0$, contient σ_i^m . Parmi ces singularités, il y en a au plus $n - 1$ qui sont l'extrémité d'un graphe $A_{i'}^-$, $i' \neq i$. Ainsi un disque $b_{i,r}^l$ qui contient au moins n disques b_i^m contient deux points de l'orbite O_i et rencontre donc l'un de ses itérés. Puisque $b_{i,r}^l$ est libre, f est nécessairement récurrent, d'après la Proposition 1.4. \square

Nous supposons dorénavant que tout disque $b_{i,r}^l$ contient au plus $n - 1$ disques b_i^m . La suite $(b_{i,r}^l)_{r < 0}$ est alors stationnaire. On définit donc une famille de disques $(b_i^l)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l < 0}$ en notant b_i^l la valeur de $b_{i,r}^l$, pour r assez petit. Nous avons dessiné les disques b_i^l , $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $l < 0$, sur la Figure 13.

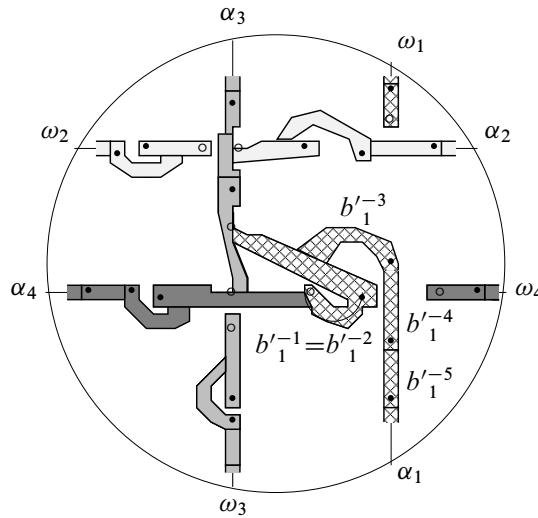


Figure 13

La remarque qui suit le Lemme 7.3 implique le résultat suivant:

Lemme 7.6 Si on écrit $\sigma_i^* = \sigma_i^{l_i}$, les briques b_i^m , $l_i \leq m < 0$, sont toutes égales. En particulier, b_i^{-1} contient σ_i^* .

Grâce au Lemme 7.4, on sait que pour tout $l < -1$, il existe $m \in \{l + 1, \dots, -1\}$ tel que $b_i^l = b_i^m$ ou $f(b_i^l) \cap b_i^m \neq \emptyset$. On en déduit:

Lemme 7.7 Supposons que $l < -1$ et que $b_i^l \neq b_i^{-1}$. Il existe alors une chaîne de disques choisis dans les b_i^l , $l \leq m < 0$, qui joint b_i^l à b_i^{-1} .

Utilisant maintenant le fait que chaque b_i^l , $l > 0$, contient σ_i^{l+1} (qui est un point de O_i), le fait que b_i^{-1} contient σ_i^* et le résultat que l'on vient de noter, on obtient:

Lemme 7.8 Soient l et l' deux entiers non nuls tels que $l < l'$. Il existe une chaîne de disques choisis dans les b_i^m , $l \leq m \leq l'$, qui joint b_i^l à $b_i^{l'}$ dans les cas suivants:

- $l < l' = -1$ et $b_i^l \neq b_i^{-1}$;
- $l < 0 < l'$
- $0 < l < l'$.

Construction de la famille $(b_i^{l'})_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l \neq 0}$

On peut remarquer que l'ensemble $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, l \neq 0} \partial b_i^l$ est le squelette d'une décomposition en briques \mathcal{D}' de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$ dont les b_i^l sont des briques libres. On peut décomposer les briques de \mathcal{D}' qui ne sont pas libres pour obtenir une décomposition libre de $\mathbf{D} \setminus \text{Fix}(f)$. On peut ensuite considérer une sous-décomposition libre maximale $\mathcal{D}'' = (S'', A'', B'')$ de cette décomposition. Chaque disque b_i^l est alors contenu dans une brique $b_i^{l'}$. Il faut noter qu'on peut avoir $b_i^{l'} = b_{i'}^{l'}$, même si $b_i^l \neq b_{i'}^l$, et même si $i \neq i'$. Nous avons dessiné les disques $b_i^{l'}$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $l \neq 0$, sur la Figure 14.

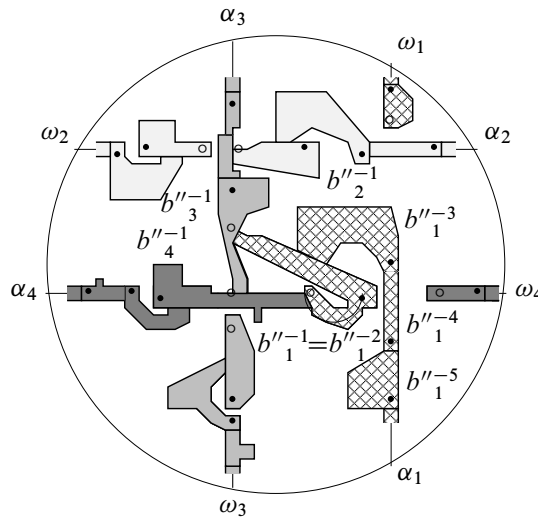


Figure 14

8 Démonstration du caractère récurrent de f

Nous allons prouver dans cette section que f est récurrent en construisant une chaîne fermée de briques de \mathcal{D}'' . En d'autres termes, nous allons trouver une brique $b'' \in B''$ qui appartient à son futur strict, c'est-à-dire une brique b'' telle que $b'' \in b''_{>}$.

Rassemblons dans une proposition les propriétés que nous allons utiliser. On peut supposer que la première est vérifiée, d'après la [Proposition 2.2](#). Les autres se déduisent des résultats de la section précédente et du fait que b''^l_i contient b^l_i .

Proposition 8.1 *Nous avons les résultats suivants:*

- (i) *pour tout $b'' \in B''$, les ensembles b''_{\geq} , b''_{\leq} , $b''_{>}$ et $b''_{<}$ sont connexes;*
- (ii) *$b''^l_i \in (b''^l_i)_{\geq}$, si $0 < l < l'$, si $l < l' = -1$ ou si $l < 0 < l'$;*
- (iii) *$\sigma_i^{l+1} \in \text{Int}(b''^l_i)$ si $l > 0$;*
- (iv) *$\sigma_i^l \in b''^l_i$ si $l < 0$;*
- (v) *$\sigma_i^l \in \text{Int}(b''^l_i)$, si $\sigma_i^l \in O_i$ et $l < 0$;*
- (vi) *$\sigma_i^* \in \text{Int}(b''^{-1}_i)$.*

Nous prouverons donc:

Proposition 8.2 *Il existe $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $b''^{-1}_i \in (b''^{-1}_i)_{>}$.*

Démonstration Fixons $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On sait, d'après la [Proposition 6.2](#), qu'il existe $i' \notin \{i, i+1\}$ tel que $A_{i+1}^- \cap A_{i'}^- \neq \emptyset$ et que $A_{i+1}^- \cup A_{i'}^-$ est donc connexe. Par construction des briques b^l_i , $b^l_{i'}$ et b''^l_i , on sait que

$$A_{i+1}^- \cup A_{i'}^- \subset X = \left(\bigcup_{l < 0} b''^l_{i+1} \right) \cup \left(\bigcup_{l < 0} b''^l_{i'} \right).$$

On sait de plus que X est connexe comme réunion de briques qui rencontrent $A_{i+1}^- \cup A_{i'}^-$. Nous allons montrer que le futur $(b''^{-1}_i)_{\geq}$ de b''^{-1}_i contient au moins une brique qui est dans X . On sait, d'après la [Proposition 6.2](#), que les points σ_i^l , $l > 0$, sont séparés de σ_i^* par $A_{i+1}^- \cup A_{i'}^-$. Puisque $(b''^{-1}_i)_{\geq}$ est connexe, la partie $\text{Int}((b''^{-1}_i)_{\geq}) \subset \mathbf{D}$ est également connexe. Puisque la partie $\text{Int}((b''^{-1}_i)_{\geq})$ contient les points σ_i^l , $l > 0$, ainsi que le point σ_i^* , elle rencontre $A_{i+1}^- \cup A_{i'}^-$. Ceci implique que l'une au moins des briques de $(b''^{-1}_i)_{\geq}$ est une brique de X . En utilisant l'assertion (ii) de la [Proposition 8.2](#), on en déduit que le futur de b''^{-1}_i contient b''^{-1}_{i+1} ou $b''^{-1}_{i'}$. En conclusion, on sait que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \neq i$ tel que $b''^{-1}_{i'} \in (b''^{-1}_i)_{\geq}$.

Il vaut maintenant envisager deux cas:

- les briques $b''^{-1}_{i'}$, $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, sont toutes distinctes;
- il existe i_0 et i_1 distincts tels que $b''^{-1}_{i_0} = b''^{-1}_{i_1}$.

Dans le premier cas, le fait que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $i' \neq i$ tel que $b''_{i'}^{-1} \in (b''_i^{-1})_{\geq}$ implique qu'il existe $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $b''_i^{-1} \in (b''_i^{-1})_{>}$, la proposition est démontrée.

Plaçons nous maintenant dans le second cas et supposons qu'il existe i_0 et i_1 distincts tels que $b''_{i_0}^{-1} = b''_{i_1}^{-1}$. Nous allons prouver que $b'' \in b''_{>}$, où $b'' = b''_{i_0}^{-1} = b''_{i_1}^{-1}$. On peut bien sûr supposer que b'' ne rencontre aucun de ses itérés stricts et rencontre donc toute orbite O_i en au plus un point. Nous avons illustré cette situation sur la [Figure 15](#).

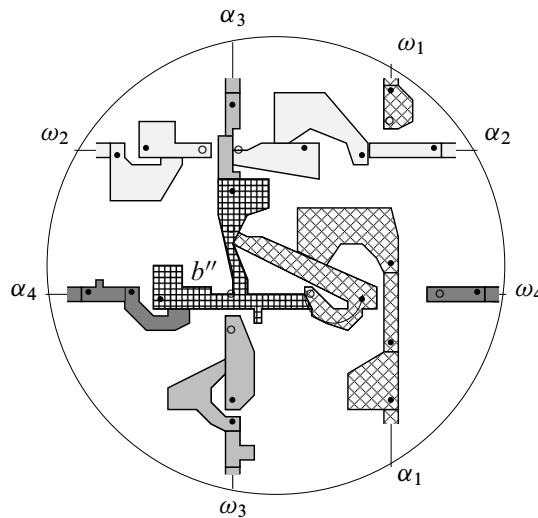


Figure 15

Commençons par prouver que pour tout $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe $l_i < 0$ tel que $b''_{i'}^{l_i} \in b''_{<}$ si $l \leq l_i$. Pour cela, notons I l'ensemble des indices satisfaisant cette condition. Nous savons déjà que $b''_{i'}^{l_i} \neq b''$ pour l petit puisque la singularité σ_i^l (qui est dans $b''_{i'}^{l_i}$) appartient alors à O_i . Remarquons que I contient i_0 et i_1 . En effet, on sait que les briques $b''_{i_0}^{l_i}$ et $b''_{i_1}^{l_i}$ appartiennent à $(b''^{-1})_{\leq}$ et qu'elles sont distinctes de b''^{-1} si l est petit. Pour prouver que $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il suffit donc de montrer que $i - 1 \in I$ dès que $i \in I$. Posons $i' = i_1$ si $i \neq i_1$ et $i' = i_2$ si $i = i_1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $i - 1 \notin I$. Puisque $b''_{i-1}^{l_i} \in (b''_{i-1}^{l_i})_{\leq}$, si $l < 0 < l'$, on en déduit que $b''_{<}$ ne contient aucune brique $b''_{i-1}^{l'}$, $l' > 0$. Puisque $b''_{<}$ est connexe (assertion (i) de la [Proposition 8.1](#)) et contient toutes les briques $b''_{i'}^{l_i}$ et $b''_{i'}^{l'}$, pour $l < 0$ assez petit, l'ensemble $b''_{<}$ sépare les points σ_{i-1}^{-l} et σ_{i-1}^{l+1} , dès que l est assez grand. Or le futur $(b''_{i-1}^{-l})_{\geq}$ est connexe et contient $b''_{i-1}^{l_i}$. La partie $\text{Int}((b''_{i-1}^{-l})_{\geq}) \subset \mathbf{D}$ est connexe, elle contient σ_{i-1}^{-l} et σ_{i-1}^{l+1} , et rencontre donc l'ensemble $b''_{<} \subset \mathbf{D}$. Les parties

$(b''_{i-1})_{\geq}^{-l}$ et $b''_{<}$ de B'' ont donc au moins une brique en commun, ce qui implique que $b''_{i-1}^{-l} \in b''_{<}$. Ainsi $i - 1 \in I$, ce qui contredit l'hypothèse.

Un argument très proche permet alors de montrer que $b'' \in b''_{>}$. Là encore, raisonnons par l'absurde et supposons que $b''_{<}$ et b''_{\geq} n'ont aucune brique en commun. Utilisant de nouveau la connexité de $b''_{<}$ et le fait que $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut remarquer que si l est grand, b''_{i_0} et b''_{i_1} , qui sont des briques de b''_{\geq} et donc qui n'appartiennent pas à $b''_{<}$, sont alors dans des composantes connexes différentes de $B'' \setminus (b''_{<})$. Ceci est impossible puisque b''_{\geq} est connexe, contient b''_{i_0} et b''_{i_1} et n'a aucune brique en commun avec $b''_{<}$. \square

References

- [1] **L E J Brouwer**, *Beweis des ebenen Translationssatzes*, Math. Ann. 72 (1912) 37–54 [MR1511684](#)
- [2] **M Brown**, *A new proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Houston J. Math. 10 (1984) 35–41 [MR736573](#)
- [3] **M Brown, J M Kister**, *Invariance of complementary domains of a fixed point set*, Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984) 503–504 [MR744656](#)
- [4] **A Fathi**, *An orbit closing proof of Brouwer's lemma on translation arcs*, Enseign. Math. (2) 33 (1987) 315–322 [MR925994](#)
- [5] **A Floer**, *Proof of the Arnol'd conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds*, Duke Math. J. 53 (1986) 1–32 [MR835793](#)
- [6] **M Flucher**, *Fixed points of measure preserving torus homeomorphisms*, Manuscripta Math. 68 (1990) 271–293 [MR1065931](#)
- [7] **J Franks**, *Generalizations of the Poincaré-Birkhoff theorem*, Ann. of Math. (2) 128 (1988) 139–151 [MR951509](#)
- [8] **J Franks**, *Area preserving homeomorphisms of open surfaces of genus zero*, New York J. Math. 2 (1996) 1–19 [MR1371312](#)
- [9] **J Franks**, *Rotation vectors and fixed points of area preserving surface diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996) 2637–2662 [MR1325916](#)
- [10] **L Guillou**, *Théorème de translation plane de Brouwer et généralisations du théorème de Poincaré-Birkhoff*, Topology 33 (1994) 331–351 [MR1273787](#)
- [11] **M Handel**, *A fixed-point theorem for planar homeomorphisms*, Topology 38 (1999) 235–264 [MR1660349](#)
- [12] **M Handel, W P Thurston**, *New proofs of some results of Nielsen*, Adv. in Math. 56 (1985) 173–191 [MR788938](#)

- [13] **T Homma**, *An extension of the Jordan curve theorem*, Yokohama Math. J. 1 (1953) 125–129 [MR0058194](#)
- [14] **P Le Calvez**, *Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2005) 1–98 [MR2217051](#)
- [15] **F Le Roux**, *Homéomorphismes de surfaces: théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable*, Astérisque (2004) vi+210 [MR2068866](#)
- [16] **S Matsumoto**, *Arnold conjecture for surface homeomorphisms*, from: “Proceedings of the French–Japanese Conference: Hyperspace Topologies and Applications (La Bussière, 1997)”, Topology Appl. 104 (2000) 191–214 [MR1780985](#)
- [17] **A Sauzet**, *Application des décompositions libres à l’étude des homéomorphismes de surface* Thèse de l’Université Paris 13 (2001)
- [18] **S Schwartzman**, *Asymptotic cycles*, Ann. of Math. (2) 66 (1957) 270–284 [MR0088720](#)
- [19] **J-C Sikorav**, *Points fixes d’une application symplectique homologue à l’identité*, J. Differential Geom. 22 (1985) 49–79 [MR826424](#)

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, C.N.R.S.-U.M.R 7539, Institut Galilée
Université Paris 13, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

lcalvez@math.univ-paris13.fr

Proposed: Leonid Polterovich
Seconded: Yasha Eliashberg, Benson Farb

Received: 1 June 2006
Accepted: 28 October 2006