Algèbres de Lie multiplicatives 2-Engel

Khaled Jaber *

Abstract

We give a multiplicative version of Kostrikin's theorem on 2-Engel Lie algebras.

Résumé

Nous donnons une version multiplicative du théorème de Kostrikin sur les algèbres de Lie 2-Engel.

Les algèbres de Lie multiplicatives ont été introduites par Graham J. Ellis [1] en essayant de démontrer que, dans un groupe, toutes les identités universelles entre commutateurs sont conséquences des cinq identités standards suivantes :

1. $\{x, x\} = 1$
2. $\{xy, z\} = \{x, z\}^y\{y, z\}$
3. $\{x, yz\} = \{x, z\}\{x, y\}^z$
4. $\{\{x, y\}, z^x\}\{\{z, x\}, y^z\}\{\{y, z\}, x^y\} = 1$
5. $\{x^a, y^a\} = \{x, y\}^a$

où $x^y = y^{-1}xy$.

Définition 1. *Une algèbre de Lie multiplicative est une structure $L = (G, ., \{,\})$ où G est un groupe multiplicatif et $\{,\}$ est une fonction binaire définie sur G^2 et vérifiant les identités précédentes.*

---

*L'auteur remercie le rapporteur pour l'amélioration qu'il a indiquée dans la première version

Received by the editors February 2003.
Communicated by F. Point.

Exemples : ([1], section 1)
1) Tout groupe peut être considéré comme une algèbre de Lie multiplicative en posant $\{x, y\} = [x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.
2) Tout anneau de Lie est une algèbre de Lie multiplicative en posant pour $\{x, y\}$ le produit de Lie de x et de y.
3) Un groupe G avec $\{,\}$ défini trivialement ($\{x, y\} = 1$) est une algèbre de Lie multiplicative.
4) Soit $E \twoheadrightarrow P$ une extension centrale d'un groupe P. Le groupe P agit sur E par conjugaison. Soit $G = E \rtimes P$ le produit semi direct de E par P. On obtient une algèbre de Lie multiplicative en définissant $\{(u, x), (u', x')\} = ([u\bar{x}, u'\bar{x}'], 1)$ où $\bar{x}$ et $\bar{x}'$ sont les préimages de x et de x' respectivement.

Soit $L = (G, ., \{,\})$ une algèbre de Lie multiplicative. Un sous-groupe I de $(G, .)$ sera dit une sous-algèbre de L si $\{x, y\} \in$I pour tout couple d'éléments x et y de I. On appelle idéal un sous-groupe normal I de $(G, .)$ tel que $\{x, y\} \in I$ pour tout $x \in I$ et tout $y \in G$. La série dérivée de L est définie par : $D_0(L) = L$ et $D_{n+1}(L) = \{D_n(L), D_n(L)\}$. La série centrale descendante de L est définie par : $\gamma_1(L) = L$, $\gamma_{n+1}(L) = \{L, \gamma_n(L)\}$. La série centrale ascendante de L est définie par : $Z_0(L) = \{1\}$ et $Z_{n+1}(L) = \{x \in G; \{x, y\} \in Z_n(L) \forall y \in G\}$. Remarquons que tous les éléments de ces séries sont des idéaux de L. On peut facilement démontrer les inclusions suivantes :

a) $\{\gamma_i(L), \gamma_j(L)\} \subseteq \gamma_{i+j}(L)$.
b) $\{\gamma_i(L), Z_j(L)\} \subseteq Z_{j-i}(L)$, pour $j \geq i$.

Définition 2. ([2], section 2)
Une algèbre de Lie multiplicative L est dite nilpotente de classe k si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

a) $\gamma_{k+1}(L) = \{1\}$.
b) $Z_k(L) = L$.
c) L satisfait l'identité : $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\} = 1$.

Le théorème suivant sur la théorie des algèbres de Lie, dû à Kostrikin, était fondamental dans la solution du problème de Burnside restreint (voir [3]).

Théorème 1. ([3], Chapter 3, Kostrikin's theorem) *Soit L une algèbre de Lie finiment engendrée sur un corps de caractéristique p. Supposons que L satisfasse la* $(p-1)^{\text{ème}}$ *identité de Engel* $xy^{p-1} = 0$. *Alors L est nilpotente.*

Pour le cas particulier $p = 3$, on a le théorème suivant :

Théorème 2. ([3], Theorem 3.1.1) *Soit L une algèbre de Lie sur un anneau commutatif unitaire. Supposons que L satisfasse l'identité de Engel* $xy^2 = 0$. *Alors L est nilpotente de classe au plus* 3, *et L satisfait l'identité* $3xyz = 0$.

Nous nous demandons si ce théorème a une sorte d'analogue, au moins dans les cas particuliers $2, 3, 4$-Engel (où des résultats semblables ont été donnés pour les groupes) dans le cadre des algèbres de Lie multiplicatives. Le résultat suivant répond à cette question pour le cas 2-Engel :

Théorème 3. *Soit $L = (G, ., \{\})$ une algèbre de Lie multiplicative. Si L vérifie l'identité 2-Engel $\{x, y, y\} = 1$ alors L est nilpotente de classe au plus 3 et $\gamma_3(L)^3 = \{1\}$.*

Le lemme suivant sera utilisé.

Lemme 1. ([1]) *Dans une algèbre de Lie multiplicative, les identités suivantes sont satisfaites :*
•$\{x, 1\} = 1 = \{1, x\}$
•$\{x, y\}^{-1} = \{y, x\}$ *(Anticommutativité)*
•$\{x, y\}^{\{a,b\}} = \{x, y\}^{[a,b]}$
•$\{[x, y], z\} = [\{x, y\}, z]$
•$\{x^{-1}, y\} = \{y, x\}^{x^{-1}}$ *et* $\{x, y^{-1}\} = \{y, x\}^{y^{-1}}$

Démonstration.
Soient L=(G,.,{ }) une algèbre de Lie multiplicative 2-Engel et $a, b, c \in G$. On a :

$$\begin{aligned}\{a.c, b, b\} = 1 \;&\Rightarrow\; \{\{a, b\}^c.\{c, b\}, b\} = 1\\ &\Rightarrow\; \{\{a, b\}^c, b\}^{\{c,b\}}.\{c, b, b\} = 1\\ &\Rightarrow\; \{\{a, b\}^c, b\} = 1 \qquad (1)\end{aligned}$$

D'autre part nous avons :

$$\begin{aligned}\{a, bc, bc\} = 1 \;&\Rightarrow\; \{\{a, c\}.\{a, b\}^c, bc\} = 1.\\ &\Rightarrow\; \{\{a, c\}, bc\}^{\{a,b\}}.\{\{a, b\}^c, bc\} = 1.\\ &\Rightarrow\; (\{\{a, c\}, c\}.\{\{a, c\}, b\}^c)^{\{a,b\}^c}.\{\{a, b\}^c, c\}.\{\{a, b\}^c, b\} = 1.\\ &\Rightarrow\; (\{a, c, b\}^c)^{\{a,b\}^c}.\{\{a, b\}^c, c\} = 1.\\ &\Rightarrow\; \{a, c, b\}^{\{a^c,b^c\}}.\{\{a, b\}, c\} = 1.\\ &\Rightarrow\; \{a, c, b\}^{[a^c,b^c]}.\{a, b, c\} = 1.\\ &\Rightarrow\; \{a, c, b\}.\{a, b, c\}^{[b^c,a^c]} = 1. \qquad (2)\end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\{a, b, c\}^{[b^c,a^c]} &= \{a, b, c\}^{[b,a]^c} = \{a, b, c\}^{[b,a].[b,a,c]}\\ &= \{\{b, a\}^{-1}, c\}^{[b,a].[b,a,c]} = \{c, \{b, a\}\}^{[b,a,c]} \quad \text{d'où}\\ \{a, b, c\}^{[b^c,a^c]} &= (\{b, a, c\}^{-1})^{[b,a,c]}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Les relations (2) et (3) entraînent donc :

$$\{a, c, b\} = \{b, a, c\}^{[b,a,c]}. \qquad (4)$$

On a :

$$[\{a, b, c\}, c] = [\{\{a, b\}, c\}, c] = \{[\{a, b\}, c], c\} = \{\{[a, b], c\}, c\} = \{[a, b], c, c\} = 1$$

De même :

$$\begin{aligned}[\{a,b,c\},b] &= [\{c,a,b\}^{[c,a,b]},b] = [\{\{c,a\},b\}^{[c,a,b]},b] \\ &= \{[\{c.a\},b]^{[c,a,b]},b\} = \{\{[c,a],b\}^{[c,a,b]},b\} = 1(\text{d'après (1)})\end{aligned}$$

Calculons enfin $[\{a,b,c\},a]$. On a :

$$\begin{aligned}[\{a,b,c\},a] &= [\{c,a,b\}^{[c,a,b]},a] = [\{b,c,a\}^{[b,c,a].[c,a,b]},a] \\ &= [\{\{b,c\},a\}^{[b,c,a].[c,a,b]},a] = \{[\{b,c\},a]^{[b,c,a].[c,a,b]},a\} \\ &= \{\{[b,c],a\}^{[b,c,a].[b,a,c]},a\} = 1(\text{d'après (1)})\end{aligned}$$

On constate alors que $\{a,b,c\}$ commute avec a,b,c au sens de la loi de groupe. La relation (4) s'écrit alors :

$$\{a,c,b\} = \{b,a,c\} = \{c,b,a\}. \tag{5}$$

On a :

$$1 = \{a,b,c.c^{-1}\} = \{a,b,c^{-1}\}.\{a,b,c\}^{c^{-1}}.$$

Puisque $\{a,b,c\}$ commute avec c, on obtient :

$$1 = \{a,b,c^{-1}\}.\{a,b,c\}.$$

D'où :

$$\{a,b,c^{-1}\} = \{a,b,c\}^{-1} \tag{6}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\{a,b,c^a\} &= \left\{\{b,a^{-1}\}^a,c^a\right\} = \left\{b,a^{-1},c\right\}^a = \{b,a^{-1},c\} \\ &= \left\{c,b,a^{-1}\right\} = \{c,b,a\}^{-1}\end{aligned} \tag{7}$$

La relation de Jacobi s'écrit alors : $\{c,b,a\}^{-1}.\{b,a,c\}^{-1}.\{a,c,b\}^{-1} = 1$. D'où d'après (5) on a :

$$\{a,c,b\}^3 = 1. \tag{8}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\{\{c,d\},\{a,b\}\} &= \{c,d,\{a,b\}\} = \{\{a,b\},c,d\} && \text{d'après (5)} \\ &= \{\{a,b,c\},d\} = \{\{b,c,a\},d\} && \text{d'après (5)} \\ &= \{\{b,c\},a,d\} = \{a,d,\{b,c\}\} && \text{d'après (5)} \\ &= \{\{a,d\},\{b,c\}\}.\end{aligned} \tag{9}$$

D'où la relation :

$$\{\{c,d\},\{a,b\}\} = \{\{a,d\},\{b,c\}\}. \tag{10}$$

En échangeant les lettres c,d et a,b, il vient :

$$\{\{d,c\},\{b,a\}\} = \{\{b,c\},\{a,d\}\} = \{\{a,d\},\{b,c\}\}^{-1} \tag{11}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\{\{d,c\},\{b,a\}\} &= \{\{d,c\},\{a,b\}^{-1}\} = \{\{d,c\},\{a,b\}\}^{-1}(\text{d'après (6)}) \\ &= \{\{a,b\},\{d,c\}\} = \{\{a,b\},\{c,d\}^{-1}\} \\ &= \{\{a,b\},\{c,d\}\}^{-1}(\text{d'après (6)}) \\ &= \{\{c,d\},\{a,b\}\} = \{\{a,d\},\{b,c\}\}(\text{d'après (10)})\end{aligned} \tag{12}$$

D'où la relation :

$$\{\{d,c\},\{b,a\}\} = \{\{a,d\},\{b,c\}\} \tag{13}$$

En combinant les relations (11) et (12) on obtient :
$\{\{a,d\},\{b,c\}\}^2 = 1$ or d'après (8), $\{\{a,d\},\{b,c\}\}^3 = 1$. Donc :

$$\{\{a,d\},\{b,c\}\} = 1.$$

L'égalité $\{\{a,d\},\{b,c\}\} = \{a,b,c,d\}$ rencontrée plus haut (voir (9)) permet alors de conclure.

Références

[1] G. Ellis, *On five well-known commutator identities.* J. Austral. Math. Soc. (Series A) 54, pp.1-19, 1993.

[2] F. Point et P. Wantiez, *Nilpotency criteria for multiplicative Lie algebras.* J. Pure Appl. Algebra, 111, pp.229-243, 1996.

[3] M. Vaughan-Lee, *The restricted Burnside problem.* Clarendon Press.Oxford, 1990.

Université Saint-Esprit de Kaslik.
Faculté des sciences et de génie informatique B.P 446 Jounieh, Liban.
E-mail : khaledjaber@usek.edu.lb