Yoshioka, Tsunéo
Osaka Math. J.
10 (1958), 11-29

Base Canonique d'Homologie du Produit Cyclique d'Ordre p d'un Complexe Fini (p Premier Impair)

par Tsunéo YOSHIOKA

1. Introduction

Ce mémoire n'est consacré qu'à démontrer complètement les résultats énoncés dans [1]. Le produit cyclique d'ordre p (p entier >1) d'un espace topologique X est, par définition, l'espace quotient du produit X^p de p espaces homéomorphes à X par la relation d'équivalence définie par Π, où Π est le groupe cyclique d'ordre p engendré par la permutation cyclique T des coordonnées de X^p:

$$(1) \qquad T(x_1, x_2, \cdots, x_p) = (x_2, \cdots, x_p, x_1), \qquad x_i \in X.$$

Pour le cas où $p=2$ et X est un complexe fini, S. K. Stein a établi une base canonique d'homologie du produit cyclique [2]. Pour généraliser sa méthode pour le cas où p n'est supposé qu'un nombre premier, il faut surmonter une petite difficulté. C'est d'obtenir une base canonique d'homologie spéciale du complexe $M(t)$, qui s'introduira dans 4°. D'autre part, M. Nakaoka a développé remarquablement la théorie de la cohomologie des produits cycliques et il a déterminé les nombres de Betti et les nombres de torsion du produit cyclique d'ordre p (p premier) des complexes élémentaires[1] [3]. Dans cette détermination, il s'est servi du complexe M, défini et étudié dans 3°, qui jouera un rôle important dans ce qui suit. Le mémoire de Stein nous permet d'étudier exclusivement le cas où p est un nombre premier impair. Donc nous supposerons que p est premier impair.

2. Préliminaires.

Soit $C=(C_i, \partial)$ un complexe de chaînes, c'est-à-dire un groupe gradué à dérivation de degré -1. Soit $\rho: C \to C$ un opérateur de C, c'est-à-dire un endomorphisme de C, compatible avec la structure graduée et l'opérateur bord ∂ de C. Soient C^ρ et $C^{\rho^{-1}}$ l'image et le noyau de

1) D'après Nakaoka, un complexe élémentaire est (i) une sephère ou (ii) le complexe obtenu en faisant attacher, de degré p^r (p premier et r entier ≥ 1), un $(n+1)$-élément à une n-sphère.

l'opérateur ρ. Ils sont des sous-complexes de chaînes de C, dont les groupes d'homologie seront dits les groupes d'homologie spéciale de C par rapport à ρ. On dira les éléments de C^{ρ} et de $C^{\rho^{-1}}$ ρ– et ρ^{-1}–chaînes resp., et encore les cycles de C^{ρ} et de $C^{\rho^{-1}}$ ρ–cycles et ρ^{-1}–cycles resp. On a d'abord une suite exacte permise $0 \to C^{\rho^{-1}} \to C \to C^{\rho} \to 0$ et celle-ci définit, par passage à l'homologie, la suite exacte de Smith-Richardson:

$$(2) \qquad \cdots \longrightarrow H_i^{\rho^{-1}}(C) \xrightarrow{i_\rho} H_i(C) \xrightarrow{\rho_*} H_i^{\rho}(C) \xrightarrow{\partial_\rho} H_{i-1}^{\rho^{-1}}(C) \longrightarrow \cdots .$$

Soit $T: C \to C$ un opérateur permis de C, périodique d'ordre p. $\sigma = 1 + T + T^2 + \cdots + T^{p-1}$ et $\tau = 1 - T$ sont aussi des opérateurs permis de C et ils définissent les groupes d'homologie spéciale de C. Dans la suite, lorsqu'il s'agit d'un opérateur périodique T, désignons par ρ un quelconque de ces deux opérateurs σ et τ et par $\bar{\rho}$ l'autre. Il est évident que $C^{\rho} \subset C^{\bar{\rho}^{-1}}$. Ceci entraîne une suite exacte permise $0 \to C^{\rho} \to C^{\bar{\rho}^{-1}} \to C^{\bar{\rho}^{-1}}/C^{\rho} \to 0$ et celle-ci définit, par passage à l'homologie, une suite exacte:

$$(3) \qquad \cdots \longrightarrow H_i^{\rho}(C) \xrightarrow{j_\rho} H_i^{\bar{\rho}^{-1}}(C) \longrightarrow H_i(C^{\bar{\rho}^{-1}}/C^{\rho}) \longrightarrow H_{i-1}^{\rho}(C) \longrightarrow \cdots .$$

Un groupe abélien G sur lequel un groupe multiplicatif Π opère sera dit Π–libre, si G admet une famille d'éléments $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ telle que les éléments $(\pi x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda, \pi \in \Pi}$ forment une base du groupe G, considéré comme groupe abélien libre. Dans ce cas, on dira une telle (x_λ) Π–base de G. Un complexe de chaînes $C = (C_i, \partial)$ sur lequel Π opère compatiblement sera dit Π–libre, si tout $i^{\text{ième}}$ groupe C_i de C est Π–libre.

Soit Π le groupe cyclique d'ordre p engendré par l'opérateur T de C, périodique d'ordre p. Supposons C Π–libre. Immédiatement on a

Lemme 1. $C^{\rho} = C^{\bar{\rho}^{-1}}$.

Lemme 2. *Soit z une chaîne de C et t un entier $\neq 0$. Si tz est un ρ–chaîne, z est elle-même une ρ–chaîne. De plus, si tz est un ρ–cycle, z est elle-même un ρ–cycle.*

En effet, (x_λ) étant une Π–base de C, soit $z = \sum_\lambda \sum_{i=0}^{p-1} a_{\lambda,i} T^i x_\lambda$ ($\alpha_{\lambda,i}$ étant entiers, nuls sauf pour un nombre fini d'indices). La condition: $\alpha_{\lambda,0} = \alpha_{\lambda,1} = \cdots = \alpha_{\lambda,p-1}$ pour tout λ, est nécessaire et suffisante à la fois pour que z soit une σ–chaîne et pour que z soit une τ^{-1}–chaîne. D'autre part, la condition: $\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{\lambda,i} = 0$ pour tout λ, est nécessaire et suffisante à la fois pour que z soit une τ–chaîne et pour que z soit une σ^{-1}–chaîne.

Une famille d'éléments (x_λ) d'un groupe abélien G (libre ou non) sera dite base de G, si (x_λ) engendre G et si, t_λ étant l'ordre de x_λ, la relation $\sum_\lambda \alpha_\lambda x_\lambda = 0$ (α_λ étant entiers, nuls sauf pour un nombre fini d'indices λ) entraîne $\alpha_\lambda \equiv 0 \bmod t_\lambda$ pour tout λ. Une famille d'éléments $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'un groupe abélien G (libre ou non) sur lequel opère un groupe multiplicatif Π, sera dite Π-base de G, si les éléments $(\pi x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda, \pi \in \Pi}$ forment une base de G dans le sens précédent. Alors on dira Π-décomposable le groupe G admettant une telle Π-base.

3. Etude du complexe M.

Dans tout ce qui suit, on supposera que p est un premier impair et que, sauf mention expresse au contraire, le groupe des coefficients d'homologie est le groupe additif des entiers Z.

Soit $L = (L_i, \partial_0)$ un complexe de chaînes acyclique, dont les $i^{\text{ième}}$ groupes L_i réduisent à zéro sauf pour $i = n+1$ et n, dont les $(n+1)^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ groupes L_{n+1} et L_n sont des groupes cycliques infinis engendrés par des éléments c_{n+1} et b_n resp., et dont l'opérateur bord ∂_0 est défini par la formule $\partial_0 c_{n+1} = b_n$. Soit $M = L \otimes \cdots \otimes L$ le complexe du p fois produit tensoriel de L, sur lequel opère T comme permutaiton cyclique des coordonnées :

$$(4) \quad T(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) = (-1)^{\deg x_1 (\deg x_2 + \cdots + \deg x_p)} x_2 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes x_1 .$$

Désignons par M_i les $i^{\text{ième}}$ groupes de M et par la même lettre ∂_0 que pour L l'opérateur bord de M, qui est défini habituellement :

$$(5) \quad \partial_0 (x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \textstyle\sum_{j=1}^{p} (-1)^{\deg x_1 + \cdots + \deg x_{j-1}} x_1 \otimes \cdots \otimes \partial_0 x_j \otimes \cdots \otimes x_p .$$

Le complexe du produit tensoriel de deux complexes de chaînes acycliques est aussi acyclique, donc M est acyclique. Dans la suite exacte de Smith-Richardson (2), $H_i(M) = 0$ donc on voit

Lemme 3. $\partial_\rho : H_i^\rho(M) \to H_{i-1}^{\rho-1}(M)$ *est un isomorphisme-sur pour tout* i.

Sauf pour $pn+p \geq i \geq pn$, les groupes M_i, M_i^ρ et $M_i^{\rho-1}$ réduisent à zéro en même temps. Comme p est premier, M_i est Π-libre pour $pn+p-1 \geq i \geq pn+1$, donc, d'après Lem. 1, on a

Lemme 4. $j_\rho : H_i^\rho(M) \to H_i^{\bar{\rho}-1}(M)$ *est un isomorphisme-sur pour* $pn+p-2 \geq i \geq pn+1$.

Posons[2)]

---

2) Les indices en bas, attachés aux chaînes, signifient toujours leurs dimensions ou leurs degrés de graduation.

$$(6)\qquad \begin{cases} e_{pn+p} &= c_{n+1}\otimes \cdots \otimes c_{n+1}\,, \\ e_{pn+p-1} &= b_n\otimes c_{n+1}\otimes \cdots \otimes c_{n+1}\,, \\ a_{pn+p-1} &= \sigma e_{pn+p-1}\,, \\ e_{pn+1} &= c_{n+1}\otimes b_n\otimes \cdots \otimes b_n\,, \\ \psi^{\sigma}_{pn+1} &= \sigma e_{pn+1}\,, \\ a_{pn} &= b_n\otimes \cdots \otimes b_n\,. \end{cases}$$

M_{pn+p} et M_{pn} sont des groupes cycliques infinis engendrés par e_{pn+p} et a_{pn} resp. Comme p est impair, $Te_{pn+p}=e_{pn+p}$ et $Ta_{pn}=a_{pn}$. Donc M^{τ}_{pn+p}, $M^{\sigma^{-1}}_{pn+p}$, M^{τ}_{pn} et $M^{\sigma^{-1}}_{pn}$ réduisent à zéro. M_{pn+p-1} et M_{pn+1} admettent des Π–bases formées par un seul élément e_{pn+p-1} et e_{pn+1} resp. Donc M^{σ}_{pn+p}, $M^{\tau^{-1}}_{pn+p}$, $M^{\sigma}_{pn+p-1}=M^{\tau^{-1}}_{pn+p-1}$, $M^{\sigma}_{pn+1}=M^{\tau^{-1}}_{pn+1}$, M^{σ}_{pn} et $M^{\tau^{-1}}_{pn}$ sont des groupes cycliques infinis engendrés par pe_{pn+p}, e_{pn+p}, a_{pn+p-1}, ψ^{σ}_{pn+1}, pa_{pn} et a_{pn} resp. Comme $\partial_0 e_{pn+p}=a_{pn+p-1}$, $H^{\sigma}_{pn+p-1}(M)$ est un groupe cyclique d'ordre p, engendré par la classe du cycle a_{pn+p-1} et $H^{\tau^{-1}}_{pn+p-1}(M)$ réduit à zéro. Comme $\partial_0\psi^{\sigma}_{pn+1}=pa_{pn}$, $H^{\sigma}_{pn}(M)$ réduit à zéro et $H^{\tau^{-1}}_{pn}(M)$ est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la classe du cycle a_{pn}.

$$\begin{array}{ll}
 & H^{\sigma}_{pn+p}(M) = 0 \\
 & \qquad\searrow \partial_\sigma \\
H^{\sigma}_{pn+p-1}(M) = Z_p & H^{\tau}_{pn+p-1}(M) = H^{\sigma^{-1}}_{pn+p-1}(M) \\
\qquad\searrow \partial_\sigma & \qquad\searrow \partial_\tau \\
H^{\tau}_{pn+p-2}(M) = H^{\sigma^{-1}}_{pn+p-2}(M) & H^{\sigma}_{pn+p-2}(M) = H^{\tau^{-1}}_{pn+p-2}(M) \\
\qquad\searrow \partial_\tau & \qquad\searrow \partial_\sigma \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad\searrow \partial_\sigma & \qquad\searrow \partial_\tau \\
H^{\tau}_{pn+1}(M) = H^{\sigma^{-1}}_{pn+1}(M) & H^{\sigma}_{pn+1}(M) = H^{\tau}_{pn+1}(M) \\
\qquad\searrow \partial_\tau & \qquad\searrow \partial_\sigma \\
\qquad H^{\tau^{-1}}_{pn}(M) & H^{\tau}_{pn}(M) = H^{\sigma^{-1}}_{pn}(M) = 0
\end{array}$$

A l'aide du diagramme précédent, on a, grâce aux isomorphismes-sur ∂_σ et ∂_τ,

Proposition 1.

$$(7)\qquad H^{\sigma}_{pn+i}(M) = \begin{cases} Z_p & \textit{pour } i=2, 4, \cdots, p-1\,, \\ 0 & \textit{pour les autres } i\,; \end{cases}$$

$$(8)\qquad H^{\tau^{-1}}_{pn+i}(M) = \begin{cases} Z_p & \textit{pour } i=0, 2, 4, \cdots, p-3\,, \\ 0 & \textit{pour les autres } i\,: \end{cases}$$

$$(9)\qquad H^{\tau^{-1}}_{pn+i}(M)=\begin{cases} Z_p & \textit{pour } i=1,3,\cdots,p-2\,,\\ 0 & \textit{pour les autres } i\,;\end{cases}$$

$$(10)\qquad H^{\sigma^{-1}}_{pn+i}(M)=\ H^{\tau}_{pn+i}(M)\quad \textit{pour tout } i\,.$$

Notations.

$$l_i=\binom{p}{i+1}-\binom{p}{i+2}+\cdots+(-1)^i\binom{p}{p}\qquad (i=0,1,\cdots,p-1)\,,$$

$$l_p=l_{-1}=0\,;$$

$$l_i^\sigma=\begin{cases}\dfrac{1}{p}(l_i-1) & (i=2,4,\cdots,p-1)\,,\\[2mm] \dfrac{1}{p}(l_i+1)-1 & (i=1,3,\cdots,p-2)\,;\end{cases}$$

$$l_i^\tau=\begin{cases}\dfrac{p-1}{p}(l_i-1) & (i=2,4,\cdots,p-1)\,,\\[2mm] \dfrac{p-1}{p}(l_i+1)-1 & (i=1,3,\cdots,p-2)\,;\end{cases}$$

où $\binom{p}{i}$ signifie le coefficient binomial.

D'après le théorème fondamental de la théorie de l'homologie [4, 101-104], prenons, pour chacun des complexes de chaînes M, M^σ, $M^{\tau^{-1}}$ et $M^\tau=M^{\sigma^{-1}}$, une base canonique d'homologie, qui nous permettra de déterminer les homologies ordinaire et spéciales du complexe $M(t)$ donné dans le numéro suivant et enfin l'homologie du produit cyclique.

(a) Pour M,[2)]

$$(11)\qquad \begin{cases} a^k_{pn+i} & (k=1,2,\cdots,l_i\,;\ i=0,1,\cdots,p-1)\,,\\ e^k_{pn+i} & (k=1,2,\cdots,l_{i-1}\,;\ i=1,2,\cdots,p)\,,\end{cases}$$

avec $\partial_0 e^k_{pn+i}=a^k_{pn+i-1}$. Remarquons que ces notations n'excluent pas celles de (6).

(b) Pour M^σ,

$$(12)\qquad \begin{cases} pe_{pn+p}\,, & \\ a_{pn+p-1}\,, & \\ a^{\sigma,k}_{pn+i} & (k=1,2,\cdots,l_i^\sigma\,;\ i=2,3,\cdots,p-3)\,,\\ e^{\sigma,k}_{pn+i} & (k=1,2,\cdots,l_{i-1}^\sigma\,;\ i=3,4,\cdots,p-2)\,,\\ \phi^\sigma_{pn+i} & (i=2,4,\cdots,p-3)\,,\\ \psi^\sigma_{pn+i} & (i=1,3,\cdots,p-2)\,,\\ pa_{pn}\,, & \end{cases}$$

avec $\partial_0 e^{\sigma,k}_{pn+i-1}=a^{\sigma,k}_{pn+i-1}$, $\partial_0\psi^{\sigma}_{pn+2i+1}=p\phi^{\sigma}_{pn+2i}$, $\partial_0\psi^{\sigma}_{pn+1}=pa_{pn}$. Remarquons que ces notations aussi n'excluent pas celles de (6).

(c) Pour $M^{\tau^{-1}}$, les mêmes éléments que pour M^{σ}, sauf que pe_{pn+p} et pa_{pn} seraient remplacés par e_{pn+p} et a_{pn} resp.

(d) Pour $M^{\tau}=M^{\sigma^{-1}}$,

$$
(13)\qquad \begin{cases} a^{\tau,k}_{pn+i} & (k=1, 2, \cdots, l^{\tau}_i\,;\ i=1, 2, \cdots, p-2)\,, \\ e^{\tau,k}_{pn+i} & (k=1, 2, \cdots, l^{\tau}_{i-1}\,;\ i=2, 3, \cdots, p-1)\,, \\ \phi^{\tau}_{pn+i} & (i=1, 3, \cdots, p-2)\,, \\ \psi^{\tau}_{pn+i} & (i=2, 4, \cdots, p-1)\,, \end{cases}
$$

avec $\partial_0 e^{\tau,k}_{pn+i}=a^{\tau,k}_{pn+i-1}$, $\partial_0\psi^{\tau}_{pn+2i}=p\phi^{\tau}_{pn+2i-1}$.

Choisissons, en nous appuyant sur Lem. 1, des chaînes

$$
(14)\qquad \begin{cases} e'^{\rho,k}_{pn+i} & (k=1, 2, \cdots, l^{\rho}_{i-1}\,;\ i=2, 3, \cdots, p-1)\,, \\ \phi'^{\rho,k}_{pn+i} & (\rho=\sigma \textit{ pour } i=2, 4, \cdots, p-3\,;\ \rho=\tau \textit{ pour } i=1, \\ & \cdots, p-2)\,, \end{cases}
$$

tellement que $e^{\rho,k}_{pn+i}=\rho e'^{\rho,k}_{pn+i}$, $\phi^{\rho}_{pn+i}=\rho\phi'^{\rho}_{pn+i}$. La façon de choisir n'est pas unique, mais prenons-les une fois et considérons-les fixement. De plus, posons

$$
(14)'\qquad a'^{\rho,k}_{pn+i}=\partial_0 e'^{\rho,k}_{pn+i+1}\,.
$$

Grâce à Lem. 3 et à Prop. 1, on voit aisément :

Lemme 5. $\partial_0 a'^{\rho,k}_{pn+i}=\eta^k_i\phi^{\bar\rho}_{pn+i-1}+\sum_{k'}\eta^{\bar\rho,k}_{i,k'}a^{\bar\rho,k'}_{pn+i-1}$ *(le premier terme du membre droit n'ayant lieu que pour i pair quand $\rho=\sigma$ ou pour i impair quand $\rho=\sigma$), où η^k_i et $\eta^{\bar\rho,k}_{i,k'}$ sont des entiers tels que $\eta^k_i\equiv 0$ mod $p(p-2\geq i\geq 2)$.*

Lemme 6. $\partial_0 a'^{\tau,k}_{pn+1}=\eta^k_1 a_{pn}$, *où η^k_1 sont des entiers $\equiv 0$ mod p.*

Lemme 7. $\partial_0\phi'^{\rho}_{pn+i}=\varepsilon_i\phi^{\bar\rho}_{pn+i-1}+\sum_k\varepsilon'_{i,k}a^{\bar\rho,k}_{pn+i-1}$, *où ε_i et $\varepsilon'_{i,k}$ sont des entiers tels que $\varepsilon_i\not\equiv 0$ mod p ($\rho=\sigma$ pour $i=2, 4, \cdots, p-3$; $\rho=\tau$ pour $i=3, 5, \cdots, p-2$).*

Lemme 8. $\partial_0 e_{pn+p-1}=\varepsilon_{p-1}\phi^{\tau}_{pn+p-2}+\sum_k\varepsilon'_{p-1,k}a^{\tau,k}_{pn+p-2}$, *où ε_{p-1} et $\varepsilon'_{p-1,k}$ sont des entiers tels que $\varepsilon_{p-1}\not\equiv 0$ mod p.*

Lemme 9. $\partial_0\phi'^{\tau}_{pn+1}=\varepsilon_1 a_{pn}$, *où ε_1 est un entier $\not\equiv 0$ mod p.*

Lemme 10. $\rho a^k_{pn+i}=\xi^{\rho,k}_i\phi^{\rho}_{pn+i}+\sum_{k'}\xi'^{\rho,k}_{i,k'}a^{\rho,k'}_{pn+i}$ *(le premier terme du membre droit n'ayant lieu que pour i pair quand $\rho=\sigma$ ou pour i impair* *quand* $\rho=\tau$), *où* $\xi_i^{\rho,k}$ *et* $\xi'^{\rho,k}_{i,k'}$ *sont des entiers tels que* $\xi_i^{\rho,k}\equiv 0$ *mod* $p(p-2\geq i\geq 1)$.

En effet, $H_{pn+i}(M)=0$ donc ρ_* dans la suite exacte de Smith-Richardson (2) est trivial.

4. Les homologies ordinaire et spéciales du complexe $M(t)$.

Soit t un entier >1.

Soit $M(t)=(L_i(t), \partial)$ le complexe de chaînes, dont les $i^{\text{ième}}$ groupes $L_i(t)$ sont égaux aux $i^{\text{ième}}$ groupes L_i de L resp., et dont l'opérateur bord ∂ est défini par l'égalité: $\partial=t\cdot\partial_0$. Le complexe $M(t)$ du p fois produit tensoriel de $L(t)$ jouit aussi de l'opérateur T. Les bases canoniques d'homologie des complexes de chaînes M, M^ρ et $M^{\rho^{-1}}$, données dans le numéro précédent, forment aussi celles des complexes $M(t)$, $M^\rho(t)$ et $M^{\rho^{-1}}(t)$ resp., car la différence entre ces deux familles de complexes n'est que leur opérateur bord. Il en résulte ainsi:

Proposition 2.

$$(15)\quad H_{pn+i}(M(t))=\begin{cases} Z_t+\cdots+Z_t(l_i\ \textit{fois}) & \textit{pour}\ p-1\geq i\geq 0\,,\\ 0 & \textit{pour les autres}\ i\,;\end{cases}$$

$$(16)\quad H^{\sigma}_{pn+i}(M(t))=\begin{cases} Z_{pt} & \textit{pour}\ i=p-1\,,\\ Z_t+\cdots+Z_t\ (l_i^\sigma\ \textit{fois}) & \\ & \textit{pour}\ i\ \textit{impair}\ (p-4\geq i\geq 3)\,,\\ Z_{pt}+Z_t+\cdots+Z_t\ (Z_t:\ l_i^\sigma\ \textit{fois}) & \\ & \textit{pour}\ i\ \textit{pair}\ (p-3\geq i\geq 2)\,,\\ Z_t & \textit{pour}\ i=0\,,\\ 0 & \textit{pour les autres}\ i\,;\end{cases}$$

$$(17)\quad H^{\tau^{-1}}_{pn+i}(M(t))=\begin{cases} Z_t & \textit{pour}\ i=p-1\,,\\ Z_{pt} & \textit{pour}\ i=0\,,\\ H^{\rho}_{pn+i}(M(t)) & \textit{pour les autres}\ i\,;\end{cases}$$

$$(18)\quad H^{\tau}_{pn+i}(M(t))=\begin{cases} Z_t+\cdots+Z_t\ (l_i^\tau\ \textit{fois}) & \\ & \textit{pour}\ i\ \textit{poir}\ (p-3\geq i\geq 2)\,,\\ Z_{pt}+Z_t+\cdots+Z_t\ (Z_t:\ l_i^\tau\ \textit{fois}) & \\ & \textit{pour}\ i\ \textit{impair}\ (p-2\geq i\geq 1)\,,\\ 0 & \textit{pour les autres}\ i\,;\end{cases}$$

$$(19)\quad H^{\sigma^{-1}}_{pn+i}(M(t))=H^{\tau}_{pn+i}(M(t))\qquad \textit{pour tout}\ i.$$

5. Quelques remarques sur le produit cyclique d'order p d'un complexe simplical fini connexe (p premier impair).

Soit K un espace topologique, K^p le produit de p espaces homéomorphes à K, T la permutation cyclique des coordounées de K^p, Q le produit cyclique d'ordre p de K, c'est à dire l'espace quotient de K^p par la relation d'équivalence définie par le groupe cyclique Π, d'ordre p, engendré par T.

Supposons que K est un complexe simplicial fini connexe. K^p est muni d'une structure cellulaire, par rapport à laquelle le groupe de chaînes de K^p sera noté par $C^\circ(K^p)$ ou C°. A l'aide d'un ordre convenable pour les sommets de K, on peut munir, sans ajouter de nouveaux sommets à K^p, K^p d'une structure simpliciale compatible avec T, par rapport à laquelle le groupe de chaînes de K^p sera noté par $C(K^p)$ ou C. Cette dernière structure, étant, bien entendu, une subdivision de la première, induit canoniquement une structure simpliciale de Q, par rapport à laquelle l'application quotiente $K^p \to Q$ reste encore simpliciale. L'opérateur de C canoniquement induit par T est compatible avec l'opérateur de C° défini par la formule (4), C° considéré comme le p-fois produit tensoriel du groupe de chaînes de K, et avec l'opérateur de subdivision Sd: $C^\circ \to C$. Tous ces opérateurs seront donc notés par la même lettre T. L'application Sd: $C^\circ \to C$ est biunivoque et donc, dans la suite, toute chaîne de C° s'identifiera à son image par l'application Sd. Il n'y aura aucune ambiguïté à craindre.

Remarque 1. Soit u une $\bar{\rho}^{-1}$-chaîne de C. Si ses coefficients attachés aux simplexes diagonaux tous réduisent à zéro, on peut choisir une chaîne w de C tellement que $u = \rho w$ et que le support de w soit contenu dans celui de u. Dans un tel cas qui aura lieu dans la suite, on fera le choix de w toujours comme cela.

Remarque 2. Soient $x_1, \cdots, x_p$ p chaînes homogènes de K. Soit r la plus petite des dimensions des x_i. Alors le support de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ ne contient que des simplexes diagonaux de dimensions $\leq r$.

6. Remarques sur la base de Künneth.

Le groupe de chaînes de K possède une base canonique d'homologie formée d'un nombre fini de cycles de trois types (g_n^λ), (b_n^μ) et $(b_n'^\nu)$ et de chaînes de deux types (c_{n+1}^μ) et $(c_{n+1}'^\nu)$, qui vérifient $\partial c_{n+1}^\mu = t^\mu b_n^\mu (t > 1)$ et $\partial c_{n+1}'^\nu = b_n'^\nu$. Pour simplifier les notations, omettrons les indices en haut, si cela n'entraîne pas de confusion. On peut supposer l'unique g_0 un sommet de K. Le groupe d'homologie de K, $H_*(K)$, admet, pour une base de groupe abélien dans le sens de 2°, les classes d'homologie des cycles g_n et b_n, dont les ordres sont infinis et t resp.

$H_*(K^p)$ possède, pour une base de groupe abélien, les classes des cycles de quatre types suivants : (i) $v_0 = g_0 \otimes \cdots \otimes g_0$; (ii) $z_{pn} = g_n \otimes \cdots \otimes g_n$ pour chaque cycle g_n $(n > 0)$; (iii) a^k_{pn+i} $(k = 1, 2, \cdots, l_i$; $i = 0, 1, \cdots, p-1)$, qui correspondent biunivoquement aux cycles a^k_{pn+i} donnés dans 3°, pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) vérifiant $\partial c_{n+1} = tb_n$ $(t > 1)$; (iv) h_j, $Th_j, \cdots, T^{p-1}h_j$, dont les classes engendrent le sous-groupe de $H_j(K^p)$, Π-décomposable et complémentaire du sous-groupe de $H_j(K^p)$ engendré par les classes des cycles de types (i), (ii) et (iii). Les ordres des classes des cycles v_0 et z_{pn} sont infinis et celui des a^k_{pn+i} est t. L'ordre commun des classes des cycles h_j, $Th_j, \cdots, T^{p-1}h_j$ sera noté par t' (fini ou infini).

7. Définition de trois familles d'éléments de K^p.

Définissons, par récurrence sur la dimension, trois familles d'éléments de $C(K^p)$ en tenant compte de Rem. 1 et de Rem. 2 dans 5° :

(a) Pour chaque cycle g_n $(n > 0)$ de K,

$$(20) \quad \begin{cases} \sigma z'_{pn} = z_{pn} = g_n \otimes \cdots \otimes g_n , \\ \tau z'_{pn-1} = \partial z'_{pn} = \bar{z}_{pn-1} , \\ \sigma z'_{pn-2} = \partial z'_{pn-1} = \bar{z}_{pn-2} , \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma z'_{n+2} = \partial z'_{n+3} = \bar{z}_{n+2} , \\ \tau z'_{n+1} = \partial z'_{n+2} = \bar{z}_{n+1} , \\ \qquad \partial z'_{n+1} = \bar{\bar{z}}_n . \end{cases}$$

(b) Pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t \equiv 0 \mod p$,

$$(21) \quad \begin{cases} \sigma x'_{pn} = a_{pn} = b_n \otimes \cdots \otimes b_n , \\ \tau x'_{pn-1} = \partial x'_{pn} = \bar{x}_{pn-1} , \\ \sigma x'_{pn-2} = \partial x'_{pn-1} = \bar{x}_{pn-2} , \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma x'_{n+2} = \partial x'_{n+3} = \bar{x}_{n+2} , \\ \tau x'_{n+1} = \partial x'_{n+2} = \bar{x}_{n+1} , \\ \qquad \partial x'_{n+1} = \bar{\bar{x}}_n ; \end{cases}$$

et

$$
(22)\quad \begin{cases}
\sigma y'_{pn+p} = e_{pn+p} = c_{n+1} \otimes \cdots \otimes c_{n+1}, \\
\tau y'_{pn+p-1} = \dfrac{1}{p} \partial e_{pn+p} - \partial y'_{pn+p} = y_{pn+p-1}, \;^{3)} \\
\sigma y'_{pn+p-2} = \partial y'_{pn+p-1} = \bar{y}_{pn+p-2}, \\
\tau y'_{pn+p-3} = \partial y'_{pn+p-2} = \bar{y}_{pn+p-3}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sigma y'_{n+3} = \partial y'_{n+4} = \bar{y}_{n+3}, \\
\tau y'_{n+2} = \partial y'_{n+3} = \bar{y}_{n+2}, \\
\qquad \partial y'_{n+2} = \bar{\bar{y}}_{n+1}.
\end{cases}
$$

8. Détermination des ordres des classes d'homologie ordinaire et spéciales des cycles.

Au lieu de dire l'ordre de la classe d'homologie ordinaire ou spéciale d'un cycle de $C(K^p)$, on dira, par abus de langage, l'ordre de ce cycle dans H_*, H_*^ρ ou $H_*^{\rho^{-1}}$.

Lemme 11. *Soient t_0, t_1, t_2 les ordres d'un ρ-cycle dans H_*, $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ et H_*^ρ resp. Alors $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.*

C'est évident.

Lemme 12. *σh_j est un σ-cycle, dont l'ordre dans H_*, H_*^σ et $H_*^{\tau^{-1}}$ est t'. τh_j, $\tau T h_j$, $\cdots$, $\tau T^{p-2} h_j$ sont des τ-cycles, dont l'ordre dans H_* et $H_*^\tau = H_*^{\sigma^{-1}}$ est aussi t'.*

C'est évident.

Lemme 13. *z_{pn} est un σ-cycle, dont l'ordre dans H_*, H_*^σ et $H_*^{\tau^{-1}}$ est infini.*

C'est encore évident.

Lemme 14. *a_{pn+p-1} est un σ-cycle, dont l'ordre dans H_*, H_*^σ et $H_*^{\tau^{-1}}$ est t.*

En effect, a_{pn+p-1} est d'ordre t dans H_* et ta_{pn+p-1} est le bord de la σ-chaîne e_{pn+p}, donc ce lemme est une immédiate conséquence de Lem. 11.

Lemme 15. *Pour $p-2 \geq i \geq 1$, $a^{\rho,k}_{pn+1}$ est un ρ-chaîne, dont l'ordre dans H_*, $H_*^{\bar{\rho}}$ et $H_*^{\rho^{-1}}$ est t.*

Grâce à Lem. 2, on voit que l'ordre de $a^{\rho,k}_{pn+i}$ dans H_* est t. Comme $ta^{\rho,k}_{pn+i}$ est le bord de la ρ-chaîne $e^{\rho,k}_{pn+i}$, ce lemme résulte de Lem. 11.

3) Voir Lem. 16.

Lemme 16. *Pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *telle que* $t \equiv 0 \bmod p$, y_{pn+p-1} *est un* τ*-cycle, dont l'ordre dans* H_* *et* $H_*^{\tau} = H_*^{\sigma^{-1}}$ *est* p.

En effet, $\sigma y_{pn+p-1} = \dfrac{1}{p} \partial\sigma e_{pn+p} - \partial\sigma y'_{n+p} = \partial e_{pn+p} - \partial e_{pn+p} = 0$. Rem. 1 et Rem. 2 montrent que y_{pn+p-1} est un τ-cycle. Son ordre dans H_* est évidemment p. D'autre part, à l'aide de la formule :

$$p = \sigma - \tau \left(\textstyle\sum_{j=1}^{p} j T^{j-1} \right), \tag{23}$$

$p y_{pn+p-1} = \partial e_{pn+p} - \partial p y'_{pn+p} = \partial\tau \left(\sum_{j=1}^{p} j T^{j-1} \right) y'_{pn+p}$. On a ainsi ce lemme.

Lemma 17. *Pour* $p-2 \geq i \geq 1$ *et pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *avec* $\partial c_{n+1} = t b_n$, ϕ^{ρ}_{pn+i} ($\rho = \sigma$ *pour* i *pair ;* $\rho = \tau$ *pour* i *impair*) *est d'ordre* t *dans* H_* *et d'ordre* pt *ou* t *dans* H_*^{ρ} *et* $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$. *De plus, si* $t \not\equiv 0 \bmod p$, ϕ^{ρ}_{pn+i} *est d'ordre* t *dans* H_*^{ρ} *et* $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$.

Grâce à Lem. 2, ϕ^{ρ}_{pn+i} est d'ordre t dans H_*. Donc $pt\phi^{\rho}_{pn+i}$ est, grâce à (23), le bord d'une ρ-chaîne.

En tenant compte de Rem. 1, de Rem. 2 dans 5°, de Lem. 7 et 8 dans 3°, choisissons par récurrence sur la dimension une suite de chaînes x'_{pn+i} pour $p-1 \geq i \geq 1$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma y'_{pn+p} & = e_{pn+p}, \\ \tau x'_{pn+p-1} & = t\, e_{pn+p-1} - \partial y'_{pn+p}, \\ \sigma x'_{pn+p-2} & = \varepsilon_{p-1} t^2 \phi'^{\tau}_{pn+p-2} + \partial \left(t \sum_k \varepsilon'_{p-1,k} e'^{\tau,k}_{pn+p-1} - x'_{pn+p-1} \right), \\ \tau x'_{pn+p-3} & = \varepsilon_{p-1} \cdot \varepsilon_{p-2} t^3 \phi'^{\sigma}_{pn+p-3} + \partial \left(\varepsilon_{p-1} t^2 \sum_k \varepsilon'_{p-2,k} e'^{\sigma,k}_{pn+p-2} - x'_{pn+p-2} \right), \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \rho x'_{pn+i} & = \varepsilon_{p-1} \cdot \varepsilon_{p-2} \cdots \varepsilon_{i+1} t^{p-i} \phi'^{\bar{\rho}}_{pn+i} \\ & \quad + \partial \left(\varepsilon_{p-1} \cdots \varepsilon_{i+2} t^{p-i-1} \sum_k \varepsilon'_{i+1,k} e'^{\bar{\rho},k}_{pn+p+1} - x'_{pn+i+1} \right), \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \sigma x'_{pn+1} & = \varepsilon_{p-1} \cdot \varepsilon_{p-2} \cdots \varepsilon_2 t^{p-1} \phi'^{\tau}_{pn+1} \\ & \quad + \partial \left(\varepsilon_{p-1} \cdots \varepsilon_3 t^{p-2} \sum_k \varepsilon'_{2,k} e'^{\tau,k}_{pn+2} - x'_{pn+2} \right). \end{array} \right. \tag{24}$$

En faisant opérer $\bar{\rho}$ sur (24), on a

$$\varepsilon_{p-1} \cdots \varepsilon_{i+1} t^{p-i} \phi^{\bar{\rho}}_{pn+i} = -\partial\bar{\rho}(\cdots).$$

Ceci montre que, si $t \not\equiv 0 \bmod p$, l'ordre de ϕ^{ρ}_{pn+i} dans H_*^{ρ} et $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ est t, et que, si $t \equiv 0 \bmod p$, l'ordre de ϕ^{ρ}_{pn+i} dans H_*^{ρ} et $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ est pt ou t, puisque $\varepsilon_i \not\equiv 0 \bmod p$ comme on a déjà vu dans Lem. 7 et 8. On verra dans 11° que, si $t \equiv 0 \bmod p$, l'ordre de ϕ^{ρ}_{pn+i} est pt dans H_*^{ρ} et $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$,

c. q. f. d.

9. Deux tableaux.

	TABLEAU I						TABLEAU II					
	pour chaque cycle g_n $(n>0)$.		pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\equiv 0 \bmod p$.		pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\not\equiv 0 \bmod p$.		pour chaque cycle g_n $(n>0)$.		pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\equiv 0 \bmod p$.		pour chaque couple (c_{n+1}, b_n) telle que $t\not\equiv 0 \bmod p$.	
dimension		ordre		ordre		ordre		ordre		ordre		ordre
$pn+p-1$			a_{pn+p-1}	t	a_{pn+p-1}	t			y_{pn+p-1}	p		
$pn+2i+1$ $\left(\frac{p-3}{2}\geq i\geq 0\right)$			$\bar{y}_{pn+2i+1}$ $a^{\sigma,k_1}_{pm+2i+1}$	p t	$a^{\sigma,k_1}_{pm+2i+1}$	t			$\phi^{\tau}_{pn+2i+1}$ $a^{\tau,k_1'}_{pm+2i+1}$	pt t	$\phi^{\tau}_{pn+2i+1}$ $a^{\tau,k_1'}_{pm+2i+1}$	t t
$pn+2i$ $\left(\frac{p-3}{2}\geq i\geq 1\right)$			ϕ^{σ}_{vn+2i} a^{σ,k_2}_{pm+2i}	pt t	ϕ^{σ}_{pm+2i} a^{σ,k_2}_{pm+2i}	t t			$\bar{y}_{pn+2i}$ $a^{\tau,k_2'}_{pn+2i}$	p t	$a^{\tau,k_2'}_{pm+2i}$	t
pn	z_{pn}	∞	a_{pn}	pt	a_{pn}	t			$\bar{y}_{pn}$	p		
$pn-2i-1$ $\left(1\leq i\leq \frac{p-1}{2}n-1\right)$			$\bar{y}_{pn-2i+1}$	p			$\bar{z}_{pn-2i+1}$	p	$\bar{x}_{pn-2i+1}$	p		
$pn-2i$ $\left(1\leq i\leq \frac{p-1}{2}n-1\right)$	$\bar{z}_{pn-2i}$	p	$\bar{x}_{pn-2i}$	p					$\bar{y}_{pn-2i}$	p		
$n+1$			$\bar{\bar{y}}_{n+1}$	p			$\bar{z}_{n+1}$	p	$\bar{x}_{n+1}$	p		
n	$\bar{\bar{z}}_n$	p	$\bar{\bar{x}}_n$	p								
j	σh_j					t'	$\tau h_j,\ \tau T h_j,\ \cdots,\ \tau T^{p-2} h_j$					t'

Dans ces tableaux, $k_1=1, 2, \cdots, l^{\sigma}_{2i+1}$; $k_2=1, 2, \cdots, l^{\sigma}_{2i}$; $k_1'=1, 2, \cdots, l^{\tau}_{2i+1}$; $k_2'=1, 2, \cdots, l^{\tau}_{2i}$.

Lemme 18. *Pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *avec* $\partial c_{n+1}=tb_n$, a_{pn} *est un* σ*–cycle, dont l'ordre dans* H_*^σ *et* $H_*^{\tau^{-1}}$ *est* t *quand* $t\not\equiv 0$ *mod* p *et* pt *ou* t *quand* $t\geq 0$ *mod* p.

En prenant le bord de la dernière égalité de (24), on a (Lem. 9)

$$\partial\sigma x'_{pn+1}=\varepsilon_{p-1}\cdot\varepsilon_{p-2}\cdot\cdots\cdot\varepsilon_1 t^p a_{pn}\,.$$

Le même raisonnement que pour Lem. 17 donne la vérification de ce lemme.

On traitera dans 12° les ordres des cycles $\bar{z}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\bar{z}}$, $\bar{\bar{x}}$ et $\bar{\bar{y}}$. Enfin,

Lemme 19. pv_0 *est un* σ*–cycle, dont l'ordre dans* H_*^σ *est infini. Aussi,* v_0 *est un* τ^{-1}*-cycle, dont l'ordre dans* $H_*^{\tau^{-1}}$ *est infini.*

C'est évident.

10. Propositions principales.

Propositions.

(a) *Pour* $p-2\geq i\geq 1$ *et pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *telle que* $t\equiv 0$ *mod* p, $\phi^\rho_{pn+i}(\rho=\sigma$ *pour* i *pair;* $\rho=\tau$ *pour* i *impair) est d'ordre* pt *dans* H_*^ρ *et* $H_*^{\rho^{-1}}$.

(b) *Pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *telle que* $t\equiv 0$ *mod* p, a_{pn} *est d'ordre* pt *dans* H_*^σ *et* $H_*^{\tau^{-1}}$.

(c) *Pour* $1\leq i\leq pn-n-1$ *et pour un cycle* $g_n(n>0)$, *les cycles* $\bar{z}_{pn-i}$ *définis dans* (20) *sont des* ρ*–cycles, dont l'ordre dans* H_*^ρ *et* $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ *est* $p(\rho=\sigma$ *pour* i *pair;* $\rho=\tau$ *pour* i *impair). Le cycle* $\bar{\bar{z}}_n$ *est un* τ^{-1}*–cycle, dont l'ordre dans* $H_*^{\tau^{-1}}$ *est* p.

(d) *Pour* $1\leq i\leq pn-n-1$ *et pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *telle que* $t\equiv 0$ *mod* p, *les cycles* $\bar{x}_{pn-i}$ *définis dans* (21) *sont des* ρ*–cycles, dont l'ordre* H_*^ρ *et* $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ *est* $p(\rho=\sigma$ *pour* i *pair;* $\rho=\tau$ *pour* i *impair). Le cycle* x_n *est un* τ^{-1}*–cycle, dont l'odre dans* $H_*^{\tau^{-1}}$ *est* p.

(e) *Pour* $2\leq i\leq pn+p-n-2$ *et pour une couple* (c_{n+1}, b_n) *telle que* $t\equiv 0$ *mod* p, *les cycles* $\bar{y}_{pn+p-i}$ *définis dans* (22) *sont des* ρ*–cycles, dont l'ordre* H_*^ρ *et* $H_*^{\bar{\rho}^{-1}}$ *est* p $(\rho=\sigma$ *pour* i *pair;* $\sigma=\tau$ *pour* i *impair). Le cycle* $\bar{\bar{y}}_{n+1}$ *est un* τ^{-1}*–cycle, dont l'ordre dans* $H_*^{\tau^{-1}}$ *est* p.

(f) *Les classes d'homologie spéciale de* v_0 *et de tous les cycles dans le premier tableau forment une base de* $H_*^{\tau^{-1}}(K^p, Z)$.

(g) *Les classes d'homologie spéciale de tous les cycles dans le deuxième tableau forment une base de* $H_*^\tau(K^p, Z)=H_*^{\sigma^{-1}}(K^p, Z)$.

(h) *j_σ: $H_i^\sigma(K^p, Z) \to H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)$ est biunivoque pour tout i.*

(i) *Soit $i > 0$. Soit F_i le sous-groupe de $H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)$ engendré par les classes d'homologie spéciale des cycles $\bar{\bar{z}}_i$, $\bar{\bar{x}}_i$ et $\bar{\bar{y}}_i$; G_i le sous-groupe de $H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)$ engendré par les classes d'homologie spéciale des σ-cycles de dimension i dans le premier tableau, aux cycles $\bar{\bar{z}}_i$, $\bar{\bar{x}}_i$ et $\bar{\bar{y}}_i$ près. D'après* (f), *$H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z) = F_i + G_i$. En suite, s'appuyant sur la suite exacte* (3), *on a $F_i \approx H_i(K, Z_p) \approx H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)/j_\sigma H_i^\sigma(K^p, Z)$. Enfin, on a $G_i = j_\sigma H_i^\sigma(K^p, Z)$.*

(j) *Les classes d'homologie spéciales de pv_0 et des cycles dans le premier tableau, aux cycles $\bar{\bar{z}}_n$, $\bar{\bar{x}}_n$ et $\bar{\bar{y}}_{n+1}$ près, forment une base de $H_*^\sigma(K^p, Z)$.*

La démonstration de ces dix propositions sera faite dans les numéros suivants, d'après le raisonnement par récurrence sur la dimension. Pour une assez grande dimension, les propositions sont toutes triviales, car tous les groupes réduisent à zéro. Pour montrer chaque proposition dans une ceitaine dimension, on supposera que toutes les propositions aient été verifiées dans la dimension précédente (plus haute).

Dans ce qui va suivre, les petites lettres gréques α, β, γ, δ, θ, ω, éventuellement décolées avec des indices, signifieront des coefficients entiers.

Avant de nous avancer à la démonstration, voyons que, grâce à l'isomorphisme canonique $H_*^\sigma(K^p, Z) \approx H(Q, Z)$, l'homologie du produit cyclique Q d'ordre p (p premier impair) du complexe fini connexe K sont déterminée par la dernière proposition (j). Les voici :

Désignons par $R_i(X)$ le $i^{\text{ième}}$ nombre de Betti d'un complexe X et par $t_i(X, q^r)$ (q premier et r entier ≥ 1) le nombre des i^{iemes} nombres de torsion de X divisibles par q^r. Les nombres de Betti et les nombres de torsion du produit cyclique Q seront déterminés par les formules suivantes, dont les deux premières sont bien connues.

$$(25) \qquad R_i(Q) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} R_i(K^p) & \textit{pour } i \not\equiv 0 \bmod p, \\ \dfrac{1}{p} R_i(K^p) + \dfrac{p-1}{p} R_{i/p}(K) & \textit{pour } i \equiv 0 \bmod p; \end{cases}$$

$$(26) \qquad t_i(Q, q^r) = \frac{1}{p} t_i(K^p, q) + (-1)^j \frac{p-1}{p} t_{(i-j)/p}(K, q^r);$$

$$(27) \qquad t_i(Q, p) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} t_i(K^p, p) + \dfrac{p-1}{p} t_{(i-j)/p}(K, p) + \displaystyle\sum_{\frac{i+1}{p} \leq s \leq i-2} t_s(K, p) \\ \quad + \displaystyle\sum_{\substack{\frac{i+1}{p} \leq s \leq i-2 \\ ps-i:\ \text{pair}}} B_s(K) & \textit{pour } j \textit{ pair}, \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{p}\, t_i(K^p,\, p) + \frac{1}{p}\, t_{(i-j)/p}(K,\, p) + \sum\limits_{\frac{i+1}{p} \le s \le i-2} t_s(K,\, p) \\ \quad + \sum\limits_{\substack{\frac{i+1}{p} \le s \le i-2 \\ ps-i\,:\,\text{pair}}} B_s(K) \qquad\qquad \textit{pour } j \textit{ impair}; \end{array}\right.$$

$$(28) \qquad t_i(Q,\, p^{r+1}) = \begin{cases} \frac{1}{p}\, t_i(K^p,\, p^{r+1}) + \frac{p-1}{p}\, t_{(i-p+1)/p}(K,\, p^{r+1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour } j = p-1, \\ \frac{1}{p}\, t_i(K^p,\, p^{r+1}) - \frac{1}{p}\, t_{(i-j)/p}(K,\, p^{r+1}) + t_{(i-j)/p}(K,\, p^r) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour } j \textit{ pair} \le p-3, \\ \frac{1}{p}\, t_i(K^p,\, p^{r+1}) - \frac{p-1}{p}\, t_{(i-j)/p}(K,\, p^{r+1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour } j \textit{ impair}; \end{cases}$$

où $j \equiv i \bmod p$ $(p-1 \ge j \ge 0)$, q premier $\neq p$, r entier positif.

11. Démonstration de (a) et (b).

En rappelant le passage de la démonstration de Lem. 17, il suffit de montrer que $\varepsilon_{i+1} t\phi^{\rho}_{pn+i}$ ne réduit pas à zéro dans $H^{\bar{\rho}^{-1}}_{*}$.

[$i = p-2$]. Supposons que $\varepsilon_{p-1} t^{\tau}_{pn+p-2} = \partial u$, où u est une σ^{-1}–chaîne de $C(K^p)$. Alors, grâce à Lem. 8,

$$\partial u = \varepsilon_{p-1} t\phi^{\tau}_{pn+p-2} = \partial e_{pn+p-1} - \partial \textstyle\sum_k \varepsilon'_{p-1,k} e^{\tau,k}_{pn+p-1}\,.$$

$w = u - e_{pn+p-1} + \sum_k \varepsilon'_{p-1,k} e^{\tau,k}_{pn+p-1}$ est un cycle, donc w peut s'écrire sous forme :

$$w = \textstyle\sum \alpha a_{pn+p-1} + \sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn+p-1} + \partial w',$$

où w' est une $(pn+p)$–chaîne. En suite,

$$\begin{aligned} \sigma w &= \textstyle\sum p\alpha a_{pn+p-1} + \sum(\sum_k \beta_k)\sigma h_{pn+p-1} + \partial\sigma w' \\ &= -\sigma e_{pn+p-1} = -a_{pn+p-1}\,. \end{aligned}$$

Donc, $p\alpha \equiv -1 \bmod t$. Mais cela est impossible, car $t \equiv 0 \bmod p$.

[$p-3 \ge i \ge 1$]. Supposons que $\varepsilon_{i+1} t\phi^{\rho}_{pn+i} = \partial u$, où u est une $\bar{\rho}^{-1}$–chaîne. Alors, grâce à Lem. 7,

$$\partial u = \varepsilon_{i+1} t\phi^{\rho}_{pn+i} = \partial\phi'^{\bar{\rho}}_{pn+i+1} - \partial \textstyle\sum_k \varepsilon'_{i+1,k} e^{\rho,k}_{pn+i+1}\,.$$

$w = u - \phi'^{\bar{\rho}}_{pn+i+1} + \sum_k \varepsilon'_{i+1,k} e^{\rho,k}_{pn+i+1}$ est un cycle, donc w peut s'écrire sous forme :

$$w=\sum\sum_k \alpha_k a^k_{pn+i+1}+\sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn+i+1}+\partial w',$$

où w' est une $(pn+i+2)$-chaîne. Ensuite, grâce à Lem. 10,

$$\begin{aligned}\bar{\rho}w &= \sum\sum_k \alpha_k(\xi^{\bar{\rho},k}_{i+1}\phi^{\bar{\rho}}_{pn+i+1}+\sum_k \xi'^{\bar{\rho},k}_{i+1,k'}a^{\rho,k'}_{pn+i+1})+\bar{\rho}\sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn+i+1}+\partial\bar{\rho}w' \\ &= -\phi^{\bar{\rho}}_{pn+i+1}.\end{aligned}$$

Donc, de l'hypothèse de récurrence, on a $\sum_k \alpha_k \xi^{\bar{\rho},k}_{i+1}\equiv -1 \bmod t$. Mais cela est impossible, car $t\equiv 0 \bmod p$ et $\xi^{\bar{\rho},k}_{i+1}\equiv 0 \bmod p$ pour tout k (Lem. 10).

12. Démonstration de (c), (d) et (e).

A l'aide de la formule (23), les cycles envisagés sont d'ordre p ou réduisent à zéro dans H^{ρ}_* et $H^{\bar{\rho}^{-1}}_*$. Il suffit de montrer qu'ils ne réduisent pas à zéro.

$[\bar{z}_{pn-1}]$. Supposons que $\bar{z}_{pn-1}=\partial u$, où u est une σ^{-1}-chaîne de dimension pn. Alors $w=u-z'_{pn}$ est un cycle, donc w peut s'écrire sous forme :

$$w=\sum\omega z_{pn}+\sum \alpha a_{pn}+\sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn}+\partial w',$$

où w' est une $(pn+1)$-chaîne.

$$\begin{aligned}\sigma w &= \sum p\omega z_{pn}+\sum p\alpha a_{pn}+\sum(\sum_k \beta_k \sigma h_{pn}+\partial\sigma w' \\ &= -\sigma z'_{pn}=-z_{pn}.\end{aligned}$$

Donc $p\omega=-1$, cela est impossible.

$[\bar{z}_{pn-2}]$. Supposons que $\bar{z}_{pn-2}=\partial u$, où u est une τ^{-1}-chaîne de dimension $pn-1$. Alors $w=u-z'_{pn-1}$ est un cycle, donc w peut s'écrire sous forme :

$$w=\sum \alpha a_{pn-1}+\sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn-1}+\partial w',$$

où w' est unc pn-chaîne.

$$\begin{aligned}\tau w &= \tau\sum\sum_k \beta_k T^k h_{pn-1}+\partial\tau w' \\ &= -\tau z'_{pn-1}=-\bar{z}_{pn-1}.\end{aligned}$$

Cela exclut l'hypothèse de récrurence.

Le même procédé conduit directement à la démonstration du reste. On la laisse au lecteur.

13. Démonstration de (f) et (g).

[Indépendance pour (f) et pour j pair ($p-3\geq j\geq 2$)], où $i\equiv j$ mod p ($p-1\geq j\geq 0$). Supposons qu'il y a une relation d'homologie spéciale dans la dimension i:

$$\begin{aligned}\partial u = &\sum \omega\phi_i^{\tau} + \sum\sum_k \alpha_k a_i^{\tau,k} + \sum \beta\sigma h_i + \sum \theta\bar{z}_i + \sum \bar{\theta}\bar{\bar{z}}_i + \sum\gamma\bar{x}_i \\ &+\sum \bar{\gamma}\bar{\bar{x}}_i + \sum \delta\bar{y}_i + \sum \bar{\delta}\bar{\bar{y}}_i\,,\end{aligned}$$

où u est une τ^{-1}–chaîne de dimension $i+1$. En considérant cette relation comme celle d'homologie ordinaire, on a, d'après Lem. 15 et 17,

$$\begin{aligned}&\omega\equiv\alpha_k\equiv 0 \quad \text{mod } t\,,\\ &\beta\equiv 0 \qquad\quad\ \ \text{mod } t'.\end{aligned}$$

ε étant un entier tel que $\varepsilon\varepsilon_{i+1}\equiv\dfrac{\omega}{t}$ mod p, d'après Lem. 7, 12, 15 et 17, on peut récrire la relation sous forme:

$$\partial u' = \sum_{t\equiv 0 \text{ mod } p} \varepsilon\partial\phi'^{\tau}_{i+1} + \sum \theta\partial z'_{i+1} + \sum \gamma\partial x'_{i+1} + \sum \delta\sigma y'_{i+1}\,,$$

en prenant une nouvelle τ^{-1}–chaîne u'. Remarquons que $\partial z'_{i+1}$ est soit $\bar{z}_i$, soit $\bar{\bar{z}}_i$, etc. Et il n'est pas nécessaire de distinguer $\bar{\theta}$ de θ, etc. Maintenant, $w=u'-(\sum\varepsilon\phi'^{\tau}_{i+1}+\sum\theta z'_{i+1}+\sum\gamma x'_{i+1}+\sum\delta y'_{i+1})$ est un cycle, donc w peut s'écrire sous forme:

$$w = \sum\sum_k \alpha'_k a^k_{i+1} + \sum\sum_k \beta'_k T^k h_{i+1} + \partial w',$$

où w' est une $(i+2)$–chaîne. Puis,

$$\begin{aligned}\tau w &= \sum\sum_k \alpha'_k(\xi^{\tau,k}_{j+1}\phi^{\tau,k}_{i+1} + \sum_{k'}\xi'^{\tau,k}_{j+1,k'}a^{\tau,k'}_{i+1}) + \sum\sum_k \beta'_k(T^k - T^{k+1})h_{i+1} + \partial\tau w' \\ &= -(\sum\varepsilon\phi^{\tau}_{i+1} + \sum\theta\bar{z}_{i+1} + \sum\gamma\bar{x}_{i+1} + \sum\delta\bar{y}_{i+1})\,.\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence (g) montre que

$$\begin{aligned}-\varepsilon &\equiv \sum_k \alpha'_k\xi^{\tau,k}_{j+1} &&\text{mod } pt\,,\\ \theta &\equiv \gamma\equiv\delta\equiv 0 &&\text{mod } p\,.\end{aligned}$$

Enfin, comme $\xi^{\tau,k}_{j+1}\equiv 0$ mod p (Lem. 10), on a $\varepsilon\equiv 0$ mod p, donc $\omega\equiv 0$ mod pt, c. q. f. d.

[Engendrement pour (f) et pour j pair ($p-3\geq j\geq 2$)]. Soit u un τ^{-1}–cycle de dimension i. u, considéré comme un cycle, peut s'écrire sous forme:

$$u = \sum\sum_k \alpha_k a^k_i + \sum\sum_k \beta_k T^k h_i + \partial w\,,$$

où w est une $(i+1)$–chaîne.

$$0=\tau u=\sum\sum_k\alpha_k(\sum_{k'}\xi'^{\tau,k}_{j,k'}a_i^{\tau,k'})+\sum\sum_k\beta_k(T^k-T^{k+1})h_i+\partial\tau w\,.$$

L'indépendance pour (g) montre que

$$\alpha'_{k'}=\sum_k\alpha_k\xi'^{\tau,k}_{j,k'}\equiv 0 \bmod t,\ \text{pour tout } k'\,;$$
$$\beta_0\equiv\beta_1\equiv\cdots\equiv\beta_{p-1} \bmod t'\,.$$

Etant $\alpha'_{k'}=t\alpha''_{k'}$,

$$\Omega=\sum_{k'}\alpha'_{k'}a_i^{\tau,k'}=\partial\sum_{k'}\alpha''_{k'}e^{\tau,k'}_{i+1}=\partial\tau\sum_{k'}\alpha''_{k'}e'^{\tau,k'}_{i+1}\,.$$

Considérant $e'^{\tau,k'}_{i+1}$ comme chaîne du complexe $M(t)$, on peut écrire Ω sous forme:

$$\Omega=\partial\tau\sum_k\bar\alpha_k e^k_{i+1}\,.$$

Posons $\alpha^*_k=\alpha_k-t\bar\alpha_k$ et reprenons une $(i+1)$–chaîne w^* tellement que u se représente sous forme:

$$u=\sum\sum_k\alpha^*_k a^k_i+\sum\beta\sigma h_i+\partial w^*\,, \tag{29}$$

où $\beta\equiv\beta_0 \bmod t'$.

$$\tau\sum_k\alpha^*_k a^k_i=\tau\sum_k\alpha_k a^k_i-\tau\sum_k t\bar\alpha_k a^k_i=\Omega-\partial\tau\sum_k\bar\alpha_k e^k_{i+1}=\Omega-\Omega=0.$$

En considérant $\sum_k\alpha^*_k a^k_i$ comme un τ^{-1}–cycle du complexe $M(t)$, celui peut s'écrire sous une combinaison linéaire du ϕ^σ_i et des $a_i^{\sigma,k}$. D'autre part,

$$0=\tau u=\partial\tau w^*\,.$$

τw^* est donc un cycle et il peut s'écrire, d'après l'hypothèse de récurrence, sous forme:

$$\begin{aligned}\tau w^*=\sum(\bar\omega\phi^\tau_{k+1}+\sum_k\bar\omega_k a^{\tau,k}_{i+1})+\sum\sum_{k=0}^{p-2}\bar\beta_k\tau T^k h_{i+1}\\ +\sum\bar\theta\tau z'_{i+1}+\sum\bar\gamma\tau x'_{i+1}+\sum\bar\delta\tau y'_{i+1}+\partial\tau\bar w\,,\end{aligned}$$

où $\bar w$ est une $(i+2)$–chaîne. $\bar u=w^*-(\sum(\bar\omega\phi'^\tau_{i+1}+\sum_k\bar\omega_k a'^{\tau,k}_{i+1})+\sum\sum_{k=0}^{p-2}\bar\beta_k T^k h_{i+1}+\sum\bar\theta z'_{i+1}+\sum\bar\gamma x'_{i+1}+\sum\bar\delta y'_{i+1}+\partial\bar w)$ est une τ^{-1}–chaîne.

$$\begin{aligned}\partial w^*=\sum(\bar\omega t(\varepsilon_{j+1}\phi^\sigma_i+\sum_k\varepsilon'_{j+1,k}a_i^{\sigma,k})+\sum_k\bar\omega_k t(\eta^k_{j+1}\phi^\sigma_i+\\ \sum_{k'}\eta^{\sigma,k}_{j+1,k'}a_i^{\sigma,k'}))+\sum\bar\theta\bar z_i+\sum\bar\gamma\bar x_i+\sum\bar\delta\bar y_i+\partial\bar u\,,\end{aligned} \tag{30}$$

où $\bar z_i$, $\bar x_i$ et $\bar y_i$ sont éventuellement remplacés par $\bar{\bar z}_i$, $\bar{\bar x}_i$ et $\bar{\bar y}_i$. En remplaçant ∂w^* dans (29) par (30), on voit finalement que u peut s'écrire sous une somme du bord d'un τ^{-1}–chaîne $\bar u$ et d'une forme linéaire en ϕ^σ_i, $a_i^{\sigma,k}$, σh_i, $\bar z_i$, $\bar{\bar z}_i$, $\bar x_i$, $\bar{\bar x}_i$, $\bar y_i$ et $\bar{\bar y}_i$. Cela montre la propostion (f) dans le cas envisagé. Les autres cas peuvent être traités plus facilement, et on laisse la démonstration du reste au lecteur.

14. Démonstration de (h)

Soit u un σ–cycle, qui est le bord d'une τ^{-1}–chaîne w. Montrons que u est le bord d'une σ–chaîne. w peut se représenter, d'une façon unique, sous somme de sa partie diagonale w_0 et de sa partie non-diagonale w_1. w_1 est encore une σ–chaîne, donc $u' = u - \partial w_1$ est aussi une σ–chaîne diagonale. Ceci montre que $u' = pu''$ pour une certaine chaîne diagonale u''. Comme u'' est un τ^{-1}–cycle, u'' peut s'écrire sous forme;

$$\begin{aligned} u'' &= \sum \omega\phi^{\sigma}_{pn+2i} + \sum \alpha a_{pn+p-1} + \sum \alpha_k a^{\sigma,k}_{pn+j} + \sum \alpha_0 a_{pn} \\ &\qquad + \sum \beta\sigma h_l + \sum \gamma z_{pn} + \partial w' . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial u'' &= pu'' = u - \partial w_1 = \partial w_0 \\ &= \sum p\omega\phi^{\sigma}_{pn+2i} + \sum p\alpha a_{pn+p-1} + \sum p\alpha_k a^{\sigma,k}_{pn+j} + \sum p\alpha_0 a_{pn} \\ &\qquad + \sum p\beta\sigma h_l + \sum p\gamma z_{pn} + \partial\sigma w' . \end{aligned} \tag{31}$$

Grâce à (f), on a

$p\omega \equiv 0 \bmod pt$ (pour $t \equiv 0 \bmod p$) ou mod t (pour $t \not\equiv 0 \bmod p$),
$p\alpha \equiv p\alpha_k \equiv p\alpha_0 \equiv 0 \bmod t$, $p\beta \equiv 0 \bmod t'$, et $\delta = 0$.

Cela montre que le dernier membre de (31) est le bord d'une σ–chaîne. Comme w_1 est aussi une σ–chaîne, u est le bord d'une σ–chaîne, c.q.f.d.

15. Démonstration de (i) et (j).

Soit D le complexe diagonal de K^p. D est isomorphe à K, donc $H_i(K, Z_p) \approx H_i(D, Z_p)$. D'autre part, $C_i^{\tau^{-1}}(K^p)/C_i^{\sigma}(K^p) \approx C_i(D) \otimes Z_p$. Ceci montre, à l'aide de la suite exacte (3), que $H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)/j_\sigma H_i^{\sigma}(K^p, Z) \approx H_i(C^{\tau^{-1}}/C^{\sigma}) \approx H_i(D, Z_p) \approx H_i(K, Z_p) \approx F_i \approx H_i^{\tau^{-1}}(K^p, Z)/G_i$. Evidemment $G_i \subset j_\sigma(H_i^{\sigma}(K^p, Z))$. Comme $F_i \approx H_i(K, Z_p)$ est un groupe fini, on voit d'après Stein [2] que $G_i = j_\sigma H_i^{\sigma}(K^p, Z)$. Comme j_σ est biunivoque, $G_i \approx H_i^{\sigma}(K^p, Z)$, c. q. f. d.

(Reçu le 5 février, 1958)

Bibliographie

[1] T. Yoshioka, L'homologie du produit cyclique d'ordre p, Proc. Jap. Acad. *34* (1958), 32–37.

[2] S. K. Stein, Homology of the two-fold symmetric product, Ann. Math. *59* (1954) 570–583.

[3] M. Nakaoka, Cohomology theory of a complex with a transformation of prime period and its applications, J. Inst. Poly. Osaka City Univ. **7** (1956), 51–102.

[4] S. Lefschetz, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc., New York, 1942.