54. Über die Beziehungen zwischen dem Erweiterungssatz von O. Schreier und dem von K. Shoda,

Von Hirosi NAGAO.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1945.)

Das Erweiterungspreblem wurde bekanntlich zuerst von O. Schreier[1] gestellt und gelöst. Vor kurzem hat K. Shoda[2] auch einen Eaweiterungssatz aufgestellt. Er hat nämlich die Erweiterung einer Gruppe $\mathfrak{N}$ durch eine Gruppe $\mathfrak{B}$ untersucht unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{B}$ als eine durch $E=\{b_1, b_2, \ldots\}$ erzeugte freie Gruppe mit dem Relationensystem R vorgegeben ist. Die von K. Shoda dabei angegebenen Bedingungen sollen mit den Bedingungen von O. Schreier äquivalent sein, wenn man als Erzeugenden von $\mathfrak{B}$ die sämtlichen Elemente von B annimmt, was in der vorliegenden Note direkt bewiesen wird. Dadurch kann man auf dem Grund des Shodaschen Frweitrungssatzes die ganze Schreiersche Erweiterungsteorie einheitlich aufbauen.

Der Shodasche Satz lautet: Zwei Gruppen $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{B}$ seien vorgegeben. $\mathfrak{B}$ sei durch ein Erzeugendensystem E und ein definierendes Relationensystem R definiert. Die aus den sämtlichen Folgerelationen von R bestehende Gruppe sai $\mathfrak{N}$. Eine homomorphe Abbildung $b \to S_b$ der durch E erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ und eine bezüglich dem Operatorberaich $\mathfrak{F}$ operatorhomomorphe Abbildung $f(b) \to A_f$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ seien bestimmt, so daß die entsprechenden Elemente in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ denselben Automorphismus von $\mathfrak{N}$ bewirken. Dann reduziert sich das freie Produkt von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}$ auf eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$, wenn man $b^{-1}A^{-1}bA^{S_b}$, $A_f^{-1}f$ als Relationen hinzufügt. Umgekehrt kann man auf diese Weise jede Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{B}$ konstruieren.

Wir wenden diesen Satz auf den Fall an, daß E aus den sämtlichen Elemente aus $\mathfrak{B}$ besteht. Ordnen wir nun jedem Element b aus $\mathfrak{B}$ ein Element $\bar{b}$. E bestehe aus den $\bar{b}$. $\mathfrak{B}$ wird dann als eine durch E erzeugte freie Gruppe mit den Relationen $\overline{b_1 b_2}^{-1}\bar{b}_1\bar{b}_2$ definiert. Ordnen wir jedem b einen Automorphismus S_b, so ist natürlich

$$(1) \qquad (A_1A_2)^{S_b} = A_1^{S_b} A_2^{S_b}, \; A_i \in N$$

und, da das Einselement 1 von $\mathfrak{B}$ mit dem von $\mathfrak{N}$ übereinstimmt,

1) O. Schreier, Über die Erweiterung von Gruppen. Monatshefte für Math. u. Physik, 34 (1926), 165–180; Hamb. Abh. 4 (1928), 321–346.

2) K. Shoda, Über die Schreiersche Erweiterungstheorie, Proc. 16 (1943), 518–519.

(2′) $$A^{S_1} = A,\ A \in \mathfrak{N}.$$

Bezeichnet man das $\overline{b_1 b_2}^{-1}\overline{b_1}\overline{b_2}$ zugeordnete Element aus $\mathfrak{N}$ mit (b_1, b_2), so ist ersichtlich

(2) $$A^{S_{\overline{b_1 b_2}}^{-1} S_{b_1} S_{b_2}} = A^{(b_1, b_2)}, \text{ d.h. } A^{S_{b_1} S_{b_2}} = A^{S_{b_1, b_2}(b_1, b_2)},$$

wobei $$A^{S_b S_{b'}} = (A^{S_b})^{S_{b'}},\ A^N = N^{-1}AN,\ N \in \mathfrak{N}.$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}(\overline{abc}^{-1}\overline{a}\overline{bc})(\overline{bc}^{-1}\overline{b}\overline{c}) &= \overline{abc}^{-1}\overline{a}\overline{b}\overline{c}\\ &= \overline{abc}^{-1}\overline{ab}\overline{c}\overline{c}^{-1}\overline{ab}^{-1}\overline{a}\overline{b}\overline{c}\\ &= (\overline{abc}^{-1}\overline{ab}\overline{c})(\overline{ab}^{-1}\overline{a}\overline{b})^{S_c}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung in $\mathfrak{R}$ wird operatorhomomorph auf

(3) $$(a, bc)(b, c) = (ab, c)(a, b)^{S_c}$$

abgebildet Natürlich gilt auch noch

(3′) $$(x, 1) = (1, x) = 1$$

Damit erhält man die Schreierschen Bedingungen (1), (2), (3) mit den Nebenbedingungen (2′), (3′).

Wir haben nun die Bedingungen im Shodaschen Satz für den Fall, daß E aus den sämtlichen Elemente aus $\mathfrak{B}$ besteht, aus den Schreierschen Bedingungen (1), (2), (3), (2′), (3′) abzuleiten.[3] Einer Folgerelation, d.h. einem Element aus $\mathfrak{R}$,

$$f \equiv \prod_{i=1}^{n} \bar{a}_i^{\varepsilon_i} = 1,\ \epsilon_i = \pm 1,$$

ordnen wir das Element

$$A_f = A'_f A''_f,$$

wobei $$A'_f = \prod_{i=1}^{n-1}\Big(a_i^{\varepsilon_i}, \prod_{j=i+1}^{n} a_j^{\varepsilon_j}\Big)$$

$$A''_f = \prod_{i=1}^{n}(a_i^{\varepsilon_i}, a_i)^{\varepsilon_i^0} \prod_{j=i}^{n} S a_j^{\varepsilon_j}$$

und $\epsilon_i^0 = 0$ für $\epsilon_i = 1$, $\epsilon_i^0 = -1$ fur $\varepsilon_i = -1$ sind. Aus

$$f \equiv \prod_{i=1}^{n} \bar{a}_i^{\varepsilon_i} = 1,\ g \equiv \prod_{i=1}^{m} \bar{b}_i^{\eta_i} = 1$$

folgt, wegen $(x, 1) = 1$ und

$$A^{\prod_{j=1}^{m} S_{b_j}^{\eta_j}} = A^{A'_g}$$

leicht der Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$:

$$A_{fg} = A'_f A'_g A''^{A'_g}_f A''_g = (A'_f A''_f)(A'_g A''_g) = A_f A_g.$$

Wenn man

---

3) **Der Schreiersche Satz lautet bekanntlich: Zu jeder Erweiterung von N durch B gehort ein Faktorensystem (b_i, b_j) und eine Menge aus Automorphismen S_{b_i}, so daß die Bedingungen (1), (2), (3), (2′), (3′) erfüllt sind, und umgekehrt.**

$$A'_f(0)=\prod_{i=1}^{n-1}(a_i^{\varepsilon_i}, \prod_{j=i+1}^{n} a_j^{\varepsilon_j} a_0)$$

setzt, so folgt

$$\begin{aligned}
A_{a_0^{-1} f a_0} &= (a_0^{-1}, a_0)A'_f(0)(a_{n}^{\varepsilon_n}, a_0)(a_0^{-1}, a_0)^{-(a_0^{-1}, a_0)A'_f(0)(a_n^{\varepsilon_n}, a_0)} A_f''^{S_{a_0}} \\
&= A'_f(0)(a_n^{\varepsilon_n}, a_0)A_f''^{S_{a_0}} \\
&= A_f'^{S_{a_0}} A_f''^{S_{a_0}},
\end{aligned}$$

da nach (3) $A'_f(0)(a_n^{\varepsilon_n}, a_0)=A_f'^{S_{a_0}}$ ist. Damit ist gezaigt daß unser Homomorphismus ein Operatorphismus ist. Es gilt ferner

$$A^{f(S_a)} = A^{\prod_{i=1}^{n} S_{a_i}^{\varepsilon_i}} = A^{\prod_{i=1}^{n} S_{a_i}^{\varepsilon_i} A_f''} = A^{A'_f A''_f} = A_f^{-1} A A_f.$$

Damit sind die Shodaschen Bedingungen alles abgeleitet. Diesen Beweis kann man auf dem Grund des Shodaschen Satz als einen Beweis des Schreierschen Erweiterungssatz ansehen.

Es sei noch bemarkt, daß gewisse Sätze über die Erweiterungen, die bis jetzt nach dem Schreierschen Erweiterungssatz abgeleitet wurden, einfacher direkt nach dem Shodaschen bewiesen werden.[4] Ist z.B. $\mathfrak{B}$ zyklisch,[5] so ist die Gruppe $\mathfrak{R}$ die durch $f=b^e-b$ Erzeugende von $\mathfrak{B}$ — erzeugte freie Gruppe. Also bestimmt jede Zuordnung $b^e - A_f \in \mathfrak{N}$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$. Da b den identichen Automorphismus von $\mathfrak{R}$ bewirkt, so muss A_f gegen b invariant sein. Also besagt die Shodasche Bedingung gerade, daß

$$\begin{gathered}
(A_1A_2)^{S_b} = A_2^{S_b} A_2^{S_b} \\
A_f^{S_b} = A_f \\
A^{S_b^e} = A^{A_f}.
\end{gathered}$$

Daraus folgt bekanntlich der Erweiterungssatz für den Fall, daß B Abelsch ist.

Wir betrachten nun nach M. Hall den Fall, daß A_f alles aus dem Zentrum von $\mathfrak{N}$ angenommen werden. Dies ist eine naturgemässe Verallgemeinerung des Falles, daß $\mathfrak{N}$ Abelsch ist. Dann bewirkt jedes Element aus $\mathfrak{R}$ den identischen Automorphismus von $\mathfrak{N}$. Daher induziert die homomorphe Abbildung $b \to S_b$ der durch E erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ gerade die von $\mathfrak{B}$ in die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$. Auf der anderen Seite ist die operatorhomomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$ bekanntlich eine operatorhomomorphe Abbildung der Faktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}$ nach der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{N}$. Aus dieser Aufklärung folgt unmittelbar ein von M. Hall symbolisch formulierier Satz über die zentralen Erweiterungen.

Nachträglich macht mich K. Asano darauf aufmerksam, daß man die Sho-

---

4) Die folgenden Bemerkungen verdanke ich K. Shoda.

5) Vgl. etwa H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, S. 93.

daschen Bedingungen nach dem folgenden Satz übersichtlicher aus den Schreierschen ableiten kann. Der Satz lautet: Die Gruppe $\mathfrak{N}$ ist der durch $\overline{(a, b)} = \overline{ab}^{-1}\overline{a}\overline{b}$ erzeugte Normalteiler, d.h. die durch $\overline{(a, b)}^{f} = \overline{f}^{-1}\overline{(a, b)}\overline{f}$, $f \in \mathfrak{F}$, erzeugte Gruppe mit den definierenden Relationen

$$\overline{(ab, c)}\,\overline{(a, b)}^{c} = \overline{(a, bc)}\,\overline{(b, c)}$$
$$\overline{(c, d)}^{\overline{bab}} = \overline{(a, b)}^{-1}\overline{(c, d)}^{\overline{bab}}\,\overline{(a, b)}.$$

Zum Beweis betrachten wir die durch die Symbolen $(a, b; \overline{f})$ erzeugte freie Gruppe mit den Relationen

$$(1) \qquad (ab, c; 1)(a, b; \overline{c}) = (a, bc; 1)(b, c; 1)$$
$$(2) \qquad (c, d; \overline{f}\overline{ab}) = (a, b; 1)^{-1}(c, d; \overline{f}\overline{ab})(a, b; 1).$$

Wir zeigen, daß diese Gruppe $\mathfrak{N}^*$ zu $\mathfrak{N}$ homomorph ist. Die Symbolen $\overline{\overline{a}}$ und $\overline{\overline{a}}\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i; \overline{f_i})^{\varepsilon_i}$; $\varepsilon_i = \pm 1$ bilden eine Gruppe nach dem Multiplikationsregel

$$\overline{\overline{a}}\prod_{i=1}^{n}(a_i; b_i; \overline{f_i})^{\varepsilon_i} \cdot \overline{\overline{b}}\prod_{j=1}^{m}(c_j; d_j, \overline{g_j})^{\eta_j} = \overline{\overline{ab}}(a, b; 1)\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i; \overline{f_i}\,\overline{b})^{\varepsilon_i}\prod_{j=1}^{m}(c_j, d_j; g_j)^{\eta_j}.$$

Denn dieses System besitzt das Einselement $\overline{\overline{1}}$ und zu jedem Element gibt es ersichtlich das Reziprok. Überdies gilt das Assoziativgesetz:

$$\Big(\overline{\overline{a}}\Pi(a_i, b_i; \overline{f_i})^{\varepsilon_i} \cdot \overline{\overline{b}}\prod_{j}(c_j, d_j; \overline{g_j})^{\eta_j}\Big) \cdot \overline{\overline{c}}\Pi \ldots$$
$$= \overline{\overline{abc}}(ab, c; 1)(a, b; \overline{c})\prod_{i}(a, b_i; \overline{f_i}\overline{bc})^{\varepsilon_i}\prod_{j}(c_j, d_j; \overline{g_j}\overline{c})^{\eta_j} \cdot \Pi \ldots$$
$$= \overline{\overline{abc}}(a, bc; 1)(b, c; 1)\prod_{i}(a_i, b_i; \overline{f_i}\overline{bc})\prod_{j}(c_j, d_j; \overline{g_j}\overline{c})^{\eta_j} \cdot \Pi \ldots$$
$$= \overline{\overline{abc}}(a, bc; 1)\prod_{i}(a_i, b_i; \overline{f_i}\overline{bc})\Big((b, c; 1)\prod_{j}(c_j, d_j; \overline{g_j}\overline{c})^{\eta_j}\Pi \ldots\Big)$$

Diese Gruppe $\mathfrak{F}^*$ ist aber durch $\overline{\overline{a}}, \overline{\overline{b}}, \ldots$ erzeugt, da

$$(a, b; 1) = \overline{\overline{ab}}^{-1}\overline{\overline{a}}, \overline{\overline{b}},$$
$$(a, b; \overline{f}\overline{x}) = \overline{\overline{x}}^{-1}(a, b; \overline{f})\overline{\overline{x}}.$$

Also ist $\mathfrak{F}^*$ nach der Zuordnung $\overline{x} \to \overline{\overline{x}}$ zu $\mathfrak{F}$ homomorph und dabei ist $\mathfrak{N}^*$ zu $\mathfrak{N}$ homomorph. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Abbildung $\overline{(a, b)} \to (a, b)$, $\overline{(a, b)}^{f} \to (a, b)^{f}$ von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ erfüllt die Shodaschen Bedingungen, wie man sich leicht überzeugt.

---

6) M. Hall, Group rings and extentions, Ann. Math. Ser. II, 39 (1938), 220–234, Theorem 3.1.