69. Une remarque concernant un problème de M. N. Lusin.

Par Takeshi INAGAKI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Un ensemble C situé dans le plan $\mathfrak{J}_{xy}$[1] est dit *crible rectiligne*, s'il est composé d'une infinité dénombrable (ou fini) d'ensembles fermés situés sur des droites parallèles à l'axe $\mathfrak{J}_x$.

Comme on sait, tous les ensembles analytiques linéaires quelconques, mesurables B ou non, sont définits au moyen de cribles rectilignes. Dans cette Note, nous considérons seulement un crible rectiligne définissant un ensemble analytique non mesurable B. Dans ce cas, le complémentaire $\mathscr{E}$ de l'ensemble analytique criblé au moyen de crible rectiligne C est décomposé complètement en ses constituantes, toutes mesurables B,

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}_1+\cdots+\mathscr{E}_\alpha+\cdots|\Omega\,. \tag{1}$$

Comme l'ensemble $\mathscr{E}$ est non mesurable B, parmi les constituantes $\mathscr{E}_\alpha$ du développement (1) il y a une infinité non dénombrable des constituantes non nulles. Il est manifeste que la nature des constituantes $\mathscr{E}_\alpha$ du développement (1) se rapport à celle du crible rectiligne C.

Dans un article,[2] M. N. Lusin a exprimé plusieurs problèmes concernant quelque relation entre un crible rectiligne C et des constituantes $\mathscr{E}_\alpha$ du développement (1) de l'ensemble complémentaire analytique correspondant à C.

Tout d'abord nous appelons *isolateur* de $\mathscr{E}_\alpha$ un ensemble H_α tel qu'il renferme tolalement $\mathscr{E}_\alpha$ et il ne contient aucun point d'une constituante $\mathscr{E}_{\alpha'}$ différent de $\mathscr{E}_\alpha$, $\alpha'\neq\alpha$. Puis, d'après M. N. Lusin, une constituante $\mathscr{E}_\alpha$ est dite *isoilée*, s'il existe un isolateur H_α de classe inférieure à celle de $\mathscr{E}_\alpha$.

Cette définition étant posée, M. N. Lusin a proposé le problème suivant (le problème V dans son article cité):

Reconnaître, s'il est possible de définir un crible rectiligne C tel que toutes les constituantes $\mathscr{E}_\alpha$ à partir d'un certain rang soient isolées?

Il semble que c'est assez difficile à donner la réponse affirmative de ce problème. Pour mettre en lumière la complexité de la distribution des constituantes $\mathscr{E}_\alpha$, il sera intéressant de définir un crible rectiligne qui n'a pas la propriété énoncée dans ce problème.

Le but de cette Note est à démontrer la proposition suivante:

Théorème. Il existe un crible rectiligne C tel qu'une infinité non

---

1) D'après M. N. Lusin, nous désignons par $\mathfrak{J}_x$, $\mathfrak{J}_t$ etc. l'ensemble de tous les points irrationnels dans un domaine linéaire, si l'on considére l'ensemble des points irrationnels comme appartenant aux axes OX, OT etc. L'ensemble produit cartésien $\mathfrak{J}_x\times\mathfrak{J}_y$ ou bien $\mathfrak{J}_x\times\mathfrak{J}_y\times\mathfrak{J}_z$ sera désigné par $\mathfrak{J}_{xy}$ ou bien par $\mathfrak{J}_{xyz}$.

2) N. Lusin, *Sur les ensembles analytiques nuls.* Fund. Math., t. **25** (1935), p. 121–125.

dénombrable des constituantes du développement (1) *de l'ensemble complémentaire analytique correspondant à C ne sont pas isolées.*

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuierons sur les faits suivants:[1]

1° *La constituante* $\mathscr{E}_{\omega^\gamma}(0 \leq \gamma < \Omega)$ *correspondant à un crible rectiligne C est un ensemble appartenant à la famille* $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$.[2]

2° *M étant un ensemble quelconque appartenant à la famille* $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$, *il y a un crible rectiligne C et qui donne le développement de l'axe* $\mathfrak{J}_x$ *en deux constituantes tel que* $\mathfrak{J}_x = \mathscr{E}_{\omega^\gamma} + \mathscr{E}_{\omega^{\gamma+1}}$ *et* $\mathscr{E}_{\omega^\gamma} = M$.

Cela posé, nous allons démontrer le théorème.

Démonstration. Tout d'abord, nous prenons un crible $\widetilde{C}$, dit *universel,*[3] situé dans l'espace $\mathfrak{J}_{xyz}$ à trois dimensions et composé d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés situés sur les plans parallèles au plan $\mathfrak{J}_{xy}$. Un tel crible $\widetilde{C}$ est coupé par chaque plan $y = y_0$ suivant un crible rectiligne $\widetilde{C}_{y_0}$, et il importe de remarquer que tout crible rectiligne peut être obtenu de cette manière.

Désignons par $\widetilde{\mathscr{E}}$ le complémentaire d'ensemble criblé au moyen de ce crible $\widetilde{C}$; $\widetilde{\mathscr{E}}$ est un ensemble de points à deux dimensions situés dans le plan $\mathfrak{J}_{xy}$.

Soit

$$(2) \qquad \widetilde{\mathscr{E}} = \widetilde{\mathscr{E}}_0 + \widetilde{\mathscr{E}}_1 + \cdots + \widetilde{\mathscr{E}}_\alpha + \cdots \mid \Omega$$

le développement du complémentaire $\widetilde{\mathscr{E}}$ en une suite des constituantes toutes mesurables B et à deux dimensions.

Désignons par $\widetilde{H}_\alpha$ un isolateur de $\widetilde{\mathscr{E}}_\alpha$, et prenons un ensemble M linéaire quelconque appartenant à la famille $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$, où γ est un nombre transfini de seconde classe (ou fini). D'après 2°, quel que soit le nom-

1) Voir ma Note *Sur les classes des constituantes*... Ces Proc. **13** (1937), 343–344.

2) Désignons par $\mathfrak{G}_\sigma^0$ la famille des ensembles ouverts dans un domaine linéaire (ou l'espace considéré). Posons $\mathfrak{G}_\delta^1 = (\mathfrak{G}_\sigma^0)_\delta$. Supposons qu'on défini $\mathfrak{G}_\sigma^{2\beta}$ et $\mathfrak{G}_\delta^{2\beta+1}$ pour tous les nombres β inférieurs à $\gamma\,(0 < \gamma < \Omega)$ et définissons $\mathfrak{G}_\sigma^{2\gamma}$ et $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1}$ respectivement comme il suit: $\mathfrak{G}_\sigma^{2\gamma} = (\sum_{0 \leq \beta < \gamma} \mathfrak{G}_\delta^{2\beta+1})_\sigma$ et $\mathfrak{G}_\delta^{2\gamma+1} = (\mathfrak{G}_\sigma^{2\gamma})_\delta$.

3) Un crible universel peut être facilement construit comme il suit:

Dans le plan $\mathfrak{J}_{xy}$, prenons d'abord l'ensemble universel U des ensembles F_σ linéaires tel qu'on peut obtenir les ensembles F_σ linéaires possibles en coupant par des droites $y = y_0$. Soit $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ $(U_n = U, n = 1, 2, 3, \ldots)$ une suite de l'ensemble universel U, et supposons que l'ensemble U_n soit situé dans le domaine $\mathfrak{J}_{xy_n}$. Cela posé, prenons une suite de fonctions $y_1 = \varphi_1(y)$, $y_2 = \varphi_2(y)$, ..., $y_n = \varphi_n(y)$, ... continues dans le domaine $\mathfrak{J}_y$ et telles que, quel que soit une suite de nombres irrationnels $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0, \ldots$, il existe un nombre irrationnel y^0 tel que nous ayons les égalités $y_1^0 = \varphi_1(y^0)$, $y_2^0 = \varphi_2(y^0)$, ..., $y_n^0 = \varphi_n(y^0)$, ... Désignons par U_n^* le transformé de U_n au moyen de l'équation $y_n = \varphi_n(y)$, $x = x$. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ une suite des nombres irrationnels partout dense dans le domaine $\mathfrak{J}_z$. Considérons un ensemble U_n^{**} situé dans le domaine $\mathfrak{J}_{xyz}$ tel que la section de U_n^{**} par le plan $z = z_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ coïncide avec l'ensemble U_n^* et toutes les autres soient vides. Alors la somme $\widetilde{C} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{**}$ est l'ensemble désiré.

Voir N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques* ..., Paris. Gauthier-Villars. (1930), p. 126–128; W. Sierpiński, *Sur un crible universel.* Fund. Math., t. **17** (1931), p. 1–3.

bre γ, il existe un crible rectiligne Γ et qui donne le développement de l'axe $\mathfrak{J}_x$ en deux constituantes tel que $\mathfrak{J}_x=\mathscr{E}^*_{\omega^\gamma}+\mathscr{E}^*_{\omega^{\gamma+1}}$ et $\mathscr{E}^*_{\omega^\gamma}=M$.

Cela posé, prenons un nombre irrationnel y_0 tel que le crible correspondant $\widetilde{C}_{y_0}$ soit identique au crible considéré Γ. Il est claire que la section de la constituante $\widetilde{\mathscr{E}}_{\omega^\gamma}$ du développement (2) par la droite $y=y_0$, $z=0$ coïncide avec la constituante $\mathscr{E}^*_{\omega^\gamma}$ du crible Γ, et par suite elle est identique à l'ensemble M. Par conséquent, il est évident que la partie commune à l'ensemble isolateur $\widetilde{H}_{\omega^\gamma}$ et à la droite $y=y_0$, $z=0$ est identique avec l'ensemble $\mathscr{E}^*_{\omega^\gamma}$, $\mathscr{E}^*_{\omega^\gamma}=M$. Donc, la classe de $\widetilde{H}_{\omega^\gamma}$ n'est pas inférieure à celle de M.

Nous allons maintenant démontrer qu'on peut obtenir un développement (2) aux constituantes $\mathscr{E}_\alpha$ linéaires et ne se laissant pas enfermer dans des ensembles isolateurs H_α de classe inférieure à celle de $\mathscr{E}_\alpha$. Or, pour le faire, il suffit de transformer le domaine à deux dimensions $\mathfrak{J}_{xy}$ en un domaine $\mathfrak{J}_t$ linéaire au moyen d'une transformation biunivoque et continue dans les deux sens:

$$x=\varphi(t)\,, \qquad y=\psi(t) \quad \text{et} \quad t=F(x,y)\,.$$

Il est claire que si nous ajoutons à ces équations l'identité

$$z=z$$

nous obtenons une transformation du domaine $\mathfrak{J}_{xyz}$ à trois dimensions en le domaine $\mathfrak{J}_{tz}$ à deux dimensions. Il est facile de voir que l'ensemble transformé du crible universel $\widetilde{C}$ est alors un crible rectiligne C situé dans le plan $\mathfrak{J}_{tz}$ et dont les constituantes linéaires $\mathscr{E}_\alpha$ sont les transformées des constituantes planes $\widetilde{\mathscr{E}}_\alpha$ correspondantes du développement (2). Comme la transformation du domaine $\mathfrak{J}_{xy}$ en $\mathfrak{J}_t$ est biunivoque et continue dans les deux sens, il est manifeste que les classes des ensembles transformés des constituantes et des isolateurs sont invariables. Or, d'après 1°, la constituante $\widetilde{\mathscr{E}}_{\omega^\gamma}(0\leq\gamma<\Omega)$ ne possède pas un isolateur de classe inférieure, et par suite aucunes des constituantes $\mathscr{E}_{\omega^\gamma}(0\leq\gamma<\Omega)$ ne sont isolées, c. q. f. d.