84. *Sur les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann.*

Par Kentaro YANO.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1939.)

Dans une Note précédente,[1] nous avons trouvé les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann à l'aide desquelles nous avons obtenu quelques théorèmes sur les surfaces totalement ombiliquées.

Nous allons, dans cette Note, chercher les équations de Codazzi dans cette géométrie conforme et montrer quelques conséquences des équations de Gauss et de Codazzi.

(1) Résumons tout d'abord les résultats de la Note précédente.

On considère un espace de Riemann V_n à n dimensions dont la forme fondamentale est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu, \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots = 1, 2, \dots, n). \tag{1.1}$$

Si le nombre n de dimensions de l'espace V_n dépasse 3, la condition nécessaire et suffisante pour que V_n soit conforme à un espace euclidien est que le tenseur conforme de courbure de M. Weyl

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} - \frac{1}{n-2}\left(R_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\omega} - R_{\mu\omega}\delta^{\lambda}_{\nu} + g_{\mu\nu}R^{\lambda}_{\cdot\omega} - g_{\mu\omega}R^{\lambda}_{\cdot\nu}\right) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}\left(g_{\mu\nu}\delta^{\lambda}_{\omega} - g_{\mu\omega}\delta^{\lambda}_{\nu}\right) \tag{1.2}$$

s'annule. Considérons ensuite un sous-espace V_m défini par $(n > m)$

$$u^\lambda = u^\lambda(\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dots, \dot{u}^m). \tag{1.3}$$

Le tenseur d'Euler-Schouten étant donné par les équations

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = B_{j,k}^{\cdot\lambda} + B_j^{\cdot a}\left\{{\lambda \atop a\nu}\right\} B_k^{\cdot\nu} - B_a^{\cdot\lambda}\left\{{a \atop jk}\right\}, \tag{1.4}$$

le tenseur défini par

$$M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} - \frac{1}{m} g^{ab} H_{ab}^{\cdot\cdot\lambda} g_{jk} \tag{1.5}$$

est invariant par rapport à la transformation conforme

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \rho^2 g_{\mu\nu} \tag{1.6}$$

de l'espace ambiant V_n. Le point où le tenseur $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ s'annule s'appelle ombilic et la surface sur laquelle on a toujours $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda} = 0$ s'appelle surface totalement ombiliquée. Si l'on prend $n-m$ vecteurs $B_A^{\cdot\lambda}$ $(A, B, C, \dots =$

---

1) K. Yano: Sur les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann. Proc. **15** (1939), 247–252. Nous employons ici les notations adoptées dans cette Note.

$\dot{m}+\dot{1}, \dot{m}+\dot{2}, \ldots, \dot{n}$) unitaires et orthogonaux entre eux dans les directions normales à V_m, on peut poser

$$(1.7) \qquad H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jkA}B_A^{\cdot\lambda}, \qquad M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=M_{jkA}B_A^{\cdot\lambda},$$

les $H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ et par suite $M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}$ étant vecteurs contrevariants de V_n normaux à V_m.

Cela étant, les équations de Gauss dans la géométrie conforme des espaces de Riemann s'écrivent

$$(1.8) \quad \begin{aligned} C^{i}_{\cdot jkh}=\Big[& B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda jkh}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{m-2}(B^{\mu\nu}_{jk}B^{\omega i}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^i_h-B^{\mu\nu}_{jh}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^i_k \\ & +g_{jk}B^{\mu\nu}_{ah}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai}-g_{jh}B^{\mu\nu}_{ak}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}g^{ai}) \\ & +\frac{B^{\mu\nu}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^i_h-g_{jh}\delta^i_k)\Big] \\ & +M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot h\lambda}-M_{jh}^{\cdot\cdot\lambda}M^{i}_{\cdot k\lambda}+\frac{1}{m-2}(M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot k\lambda}\delta^i_h \\ & -M_{ja}^{\cdot\cdot\lambda}M^{a}_{\cdot h\lambda}\delta^i_k+g_{jk}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot h\lambda}-g_{jh}M^{i\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot k\lambda}) \\ & -\frac{M^{b\cdot\lambda}_{\cdot a}M^{a}_{\cdot b\lambda}}{(m-1)(m-2)}(g_{jk}\delta^i_h-g_{jh}\delta^i_k) \end{aligned}$$

où $C^{i}_{\cdot jkh}$ est le tenseur conforme de courbure de M. Weyl pour le sous-espace V_m. On voit facilement qu'une surface totalement ombiliquée dans un espace conforme à un espace euclidien est elle-même aussi conforme à un espace euclidien.

(2) Avant de considérer les équations de Codazzi, remarquons que le tenseur défini par

$$(2.1) \qquad L_{ABj}=g_{\lambda\mu}B^{\cdot\lambda}_{A;j}B^{\cdot\mu}_{B}$$

est invariant par rappart à la transformation conforme (1.6).[1] En effet

$$\bar{L}_{ABj}=\rho^2 g_{\lambda\mu}\Big[\Big(\frac{1}{\rho}B^{\cdot\lambda}_{A}\Big)_{,j}+\frac{1}{\rho}B^{\cdot\alpha}_{A}(\{{}^{\lambda}_{\alpha\nu}\}+\delta^{\lambda}_{\alpha}\rho_\nu+\delta^{\lambda}_{\nu}\rho_\alpha-g^{\lambda\beta}\rho_\beta g_{\alpha\nu})B^{\cdot\nu}_{j}\Big]\cdot\frac{1}{\rho}B^{\cdot\mu}_{B}$$

$$=g_{\lambda\mu}(B^{\cdot\lambda}_{A,j}+B^{\cdot\alpha}_{A}\{{}^{\lambda}_{\alpha\nu}\}B^{\nu}_{j})B^{\cdot\mu}_{B}=L_{ABj}.$$

Cela étant, des équations de Weingarten

$$(2.2) \qquad B^{\cdot\lambda}_{A;j}=-B^{\cdot\lambda}_{i}H^{i}_{\cdot jA}+L_{ABj}B^{\cdot\lambda}_{B},$$

on peut déduire les équations de Codazzi dans la géométrie riemannienne:

$$(2.3) \qquad B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=-H^{i}_{\cdot jA;k}+H^{i}_{\cdot kA;j}+H^{i}_{\cdot jB}L_{ABk}-H^{i}_{\cdot kB}L_{ABj},$$

où

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}=B^{i}_{\cdot\lambda}B^{\cdot\mu}_{A}B^{\cdot\nu}_{j}B^{\cdot\omega}_{k}, \qquad H^{i}_{\cdot jA}=g^{ia}H_{ajA}.$$

1) S. Sasaki: Some theorems on conformal transformations of Riemannian spaces, Proc. Physico-Math. Soc. Japan. **18** (1936), 572–578.

En contractant $B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}$ à (1.2), on trouve

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}R^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}-\frac{1}{n-2}(B^{\mu\nu}_{Aj}R_{\mu\nu}\delta^i_k-B^{\mu\nu}_{Ak}R_{\mu\nu}\delta^i_j)$$

où

$$B^{\mu\nu}_{Aj}=B_A^{\cdot\mu}B_j^{\cdot\nu}.$$

En substituant (2.3) dans ces équations, on a

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=-H^i_{\cdot jA;k}+H^i_{\cdot kA;j}+H^i_{\cdot jB}L_{ABk}-H^i_{\cdot kB}L_{ABj}-\frac{1}{n-2}(B^{\mu\nu}_{Aj}R_{\mu\nu}\delta^i_k-B^{\mu\nu}_{Ak}R_{\mu\nu}\delta^i_j). \tag{2.4}$$

Posons dans ces équations $i=k$ et sommons par rapport à cet indice de 1 à n, alors on aura

$$B^{\mu\nu}_{Aj}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=-H^a_{\cdot jA;a}+H^a_{\cdot aA;j}+H^a_{\cdot jB}L_{ABa}-H^a_{\cdot aB}L_{ABj}-\frac{m-1}{n-2}B^{\mu\nu}_{Aj}R_{\mu\nu},$$

d'où

$$-\frac{1}{n-2}B^{\mu\nu}_{Aj}R_{\mu\nu}=\frac{1}{m-1}(B^{\mu\nu}_{Aj}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^a_{\cdot jA;a}-H^a_{\cdot aA;j}-H^a_{\cdot jB}L_{ABa}+H^a_{\cdot aB}L_{ABj}).$$

En substituant ces équations dans (2.4) on trouve

$$\begin{aligned}B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=&-H^i_{\cdot jA;k}+H^i_{\cdot kA;j}+H^i_{\cdot jB}L_{ABk}-H^i_{\cdot kB}L_{ABj}\\&+\frac{1}{m-1}(B^{\mu\nu}_{Aj}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^a_{\cdot jA;a}-H^a_{\cdot aA;j}\\&\qquad-H^a_{\cdot jB}L_{ABa}+H^a_{\cdot aB}L_{ABj})\delta^i_k\\&-\frac{1}{m-1}(B^{\mu\nu}_{Ak}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}+H^a_{\cdot kA;a}-H^a_{\cdot aA;k}\\&\qquad-H^a_{\cdot kB}L_{ABa}+H^a_{\cdot aB}L_{ABk})\delta^i_j.\end{aligned}$$

Ces équations peuvent être écrites encore sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}&-\frac{1}{m-1}(B^{\mu\nu}_{Aj}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^i_k-B^{\mu\nu}_{Ak}B^{\omega}_{\lambda}C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}\delta^i_j)\\&=-M^i_{\cdot jA;k}+M^i_{\cdot kA;j}+M^i_{\cdot jB}L_{ABk}-M^i_{\cdot kB}L_{ABj}\\&\quad+\frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot jA;a}-M^a_{\cdot jB}L_{ABa})\delta^i_k\\&\quad-\frac{1}{m-1}(M^a_{\cdot kA;a}-M^a_{\cdot kB}L_{ABa})\delta^i_j\end{aligned}\tag{2.5}$$

où

$$M^i_{\cdot jA}=g^{ia}M_{ajA}.$$

(2.5) nous donnent les équations de Codazzi dans la géométrie conforme des espaces de Riemann.

Comme la quantité conforme L_{ABj} est symétrique gauche par rapport aux deux indices A et B

$$L_{ABj} = -L_{BAj}, \tag{2.6}$$

on voit que dans le cas $m=n-1$,

$$L_{ABj}=0 \qquad (A=B=\dot{n}). \tag{2.7}$$

Donc, pour un sous-espace à $n-1$ dimensions, les équations conformes de Codazzi deviennent

$$\begin{aligned} B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} &= -M^{i}_{\cdot jA;\,k} + M^{i}_{\cdot kA;\,j} \\ &\quad + \frac{1}{m-1}(M^{a}_{\cdot jA;\,a}\delta^{i}_{k} - M^{a}_{\cdot kA;\,a}\delta^{i}_{j}), \qquad (A=\dot{n}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

(3) Dans ce Paragraphe, nous allons considérer un espace riemannien dans lequel il existe toujours au moins une hypersurface totalement ombiliquée qui est tangente à un hyperplan quelconque passant par un point arbitraire de V_n.[1]

Pour une hypersurface totalement ombiliquée, on a $M^{i}_{\cdot jA}=0$, donc, (2.8) devient

$$B^{i\mu\nu\omega}_{\lambda Ajk} C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega} = 0, \qquad (A=\dot{n}). \tag{3.1}$$

Si ces équations sont valables pour $n-1$ vecteurs quelconques $B^{\cdot\nu}_{j}$ et un vecteur $B^{\cdot\lambda}_{\dot{n}}$ orthogonal aux $B^{\cdot\nu}_{j}$, on en conclut que

$$C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}=0, \tag{3.2}$$

ce qui nous montre que l'espace ambiant V_n peut être transformé en un espace euclidien par une transformation conforme (1.6).

Comme les tenseurs $C^{\lambda}_{\cdot\mu\nu\omega}$ et $M^{\cdot\cdot\lambda}_{ij}$ s'annulent tous les deux, les équations de Gauss nous montrent que le sous-espace V_m est aussi conforme à un espace euclidien.

Cela étant, nous allons trouver les hypersurfaces totalement ombiliquées dans un espace conforme à un espace euclidien.

Effectuons une transformation conforme (1.6) de manière que l'espace ambiant V_n devienne un espace euclidien et prenons, dans cet espace euclidien, un système de coordonnées rectangulaires $u^1, u^2, u^3, \dots, u^n$, alors on aura

$$g_{\lambda\mu}=\delta_{\lambda\mu}, \qquad g_{jk}=B^{\cdot\nu}_{j}B^{\cdot\nu}_{k}, \qquad \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}=0, \tag{3.3}$$

$$\left\{{i \atop jk}\right\} = g^{ia}B^{\cdot\nu}_{a}B^{\cdot\nu}_{j,k}, \tag{3.4}$$

et par suite

$$\begin{aligned} H^{\cdot\cdot\lambda}_{jk} &= B^{\cdot\lambda}_{j,k} - B^{\cdot\lambda}_{a}\left\{{a \atop jk}\right\} \\ &= B^{\cdot\lambda}_{j,k} - B^{\cdot\lambda}_{a}B^{\cdot\mu}_{b}g^{ab}B^{\cdot\mu}_{j,k} \end{aligned} \tag{3.5}$$

donc, en posant

$$B^{\cdot\lambda}_{\dot{n}} = B^{\lambda}$$

---

1) J. A. Schouten: Über die konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer Massbestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer Massbestimmung. Math. Zeitschr. **11** (1921), 58–88.

S. Sasaki: Une autre démonstration d'un théorème de M. J. A. Schouten sur les hypersurfaces totalement ombiliquées dans un espace de Riemann. Tensor, No. **2** (1939), 25–29.

et en remarquant que

$$g^{\lambda\mu}=B_{a}^{\cdot\lambda}B_{b}^{\cdot\mu}g^{ab}+B^{\lambda}B^{\mu}\,,\qquad g^{\lambda\mu}=\delta^{\lambda\mu}\,,$$

on obtient

$$H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=B^{\lambda}B^{\mu}B_{j,k}^{\cdot\mu}\,. \tag{3.6}$$

Donc

$$0=M_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}=H_{jk}^{\cdot\cdot\lambda}-\frac{1}{m}g^{ab}H_{ab}^{\cdot\cdot\lambda}g_{jk}$$

$$=B^{\lambda}B^{\mu}B_{j,k}^{\cdot\mu}-\frac{1}{m}B^{\lambda}B^{\nu}B_{a,b}^{\cdot\nu}g^{ab}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\mu}\,,$$

d'où

$$B^{\mu}B_{j,k}^{\cdot\mu}=\frac{1}{m}B^{\nu}B_{a,b}^{\cdot\nu}g^{ab}B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\mu}\,.$$

Donc, en posant

$$H^{\mu}=\frac{mB^{\mu}}{B^{\nu}B_{a,b}^{\cdot\nu}g^{ab}}\,,$$

on a

$$H^{\mu}B_{j,k}^{\cdot\mu}=B_{j}^{\cdot\mu}B_{k}^{\cdot\mu}\,, \tag{3.7}$$

$$H^{\mu}B_{j}^{\cdot\mu}=0\,. \tag{3.8}$$

En dérivant (3.8) et en tenant compte de (3.7), on trouve

$$-H_{,j}^{\mu}=B_{j}^{\cdot\mu}+\lambda_{j}H^{\mu}\,, \tag{3.9}$$

où

$$-\lambda_{j}=\frac{1}{2}\frac{\partial\log H^{\mu}H^{\mu}}{\partial u^{j}}\,.$$

En dérivant (3.9) encore et en tenant compte de (3.9) lui-même, on a

$$\lambda_{j}(B_{k}^{\cdot\mu}+\lambda_{k}H^{\mu})-\lambda_{k}(B_{j}^{\cdot\mu}+\lambda_{j}H^{\mu})=0\,,$$

d'où

$$\lambda_{j}=0\,, \tag{3.10}$$

donc (3.9) nous donne

$$-H^{\mu}=u^{\mu}-u_{0}^{\mu}\,,$$

et (3.10) nous montre que $H^{\mu}H^{\mu}=\text{const.}$, donc

$$(u^{\mu}-u_{0}^{\mu})\,(u^{\mu}-u_{0}^{\mu})=\text{const.},$$

par conséquent, notre hypersurface est bien une hypersphère ordinaire dans un espace euclidien.

Nous avons ainssi démontré un théorème dû à M. J. A. Schouten:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe toujours, dans un espace V_n de Riemann, au moins une hypersurface totalement ombiliquée tangente à un hyperplan quelconque passant par un point arbitraire de V_n, est que l'espace ambiant V_n soit conforme à un espace euclidien ($n>3$).