17. *Sur les théorèmes de M. Valiron et les singularités trenscendantes indirectement critiques.*

Par Yosiro TUMURA.
Nippon Ikadaigaku Yoka.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., March 12, 1941.)

1. M. L. Ahlfors a démontré le théorème suivant[1]:
A. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre ρ, dont la fonction inverse possède n singularités trenscendantes directement critiques distinctes sur sa surface de Riemann. Alors, pour $n \geqq 2$, l'ordre est au moins $\frac{n}{2}$; pour $n=1$, il n'existe pas de chemin* B *surlequel $\frac{1}{f-\omega}$ est bornée, où ω est la coordonné de la singularité.*

M. G. Valiron a prouvé deux théorèmes suivants:
B[2]. 1° *Toute fonction méromorphe dont la fonction caractéristique $T(r, f)$ satisfait à la condition*

$$\lim \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} = 0 ,$$

possède au plus une valeur asymptotique. 2° *Encore, il existe une suite de circonférences $|z| = r_n$ $(r_n \to \infty)$ sur lesquelles $f(z)$ tend uniformément vers une même limite.*
C[3]. *Soit $f(z)$ une algébroïde méromorphe à k branches dont la fonction caractéristique satisfait à la condition $T(r, f) = 0\big((\log r)^2\big)$. Elle possède au plus k valeurs asymptotiques.*

En employant des familles normales, nous prouvons l'extension des théorèmes de M. Valiron, ensuite étudions la singularité indirectement critique.

2. Lemme 1. *Etant donnée une suite des nombres positifs $0 < p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_i \leqq \cdots (\lim p_i = \infty)$, désignons le nombre des $p_i \leqq r$ par $n(r)$,*

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt \quad \text{et si} \quad \underline{\lim} \frac{N(r)}{(\log r)^2} \leqq h < +\infty \tag{1}$$

alors

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \frac{p_{i+1}}{p_i} \geqq e^{\frac{1}{2h}} > 1 . \tag{2}$$

Si pour tout $r > r_0$, $n(r) > 2h' \log r$ $(h' = h + \varepsilon, \varepsilon > 0$ arbitraire), on a par l'intégral partielle

---

1) L. Ahlfors, Über die asymptotischen Wert der meromorphnen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. 6, 1932. voir aussi Ullrich, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen, Jahresb. Deuts. Math., 46, 1936.

2) G. Valiron, Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions méromorphes, Rendiconti Circolo mat. di Palermo 46, 1925.

3) G. Valiron, Sur le nombre des singularités trenscendantes des fonctions inverse d'une classe d'algebroïde. C. R. 200, 1935.

$$N(r) > 2h'\int_{p_1}^{r} \frac{\log t}{t} dt > 2h' (\log r)^2 - 2h' \int_{p_1}^{r} \frac{\log t}{t} dt - 0(1)$$

d'où

$$N(r) > h' (\log r)^2 - 0(1),$$

qui est contradictoire avec (1). Donc il existe une suite $\{r_\nu\}$ qui satisfont à

$$n(r_\nu) < 2h' \log r_\nu .$$

Supposons, encore, $kp_i > p_{i+1}$ pour tout $i \geqq \beta$, où β est arbitraire mais fixe, $k = e^{\frac{1}{2h'}} - \varepsilon$. De $p_{n(r_\nu)+1} > r_\nu$,

$$p_\beta k^{n(r_\nu)-\beta+1} > r_\nu \quad \text{pour tout} \quad r_\nu > p_\beta$$

donc

$$n(r_\nu) > \frac{1}{\log k}(\log r_\nu - \log p_\beta + \beta - 1) = \frac{\log r_\nu}{\log k} - 0(1),$$

pour tout $r_\nu > p_\beta$. C'est contradiction. Comme $\varepsilon > 0$ peut être aussi petit que l'on veut, on obtient (2).

Soit $f(z)$ une algébroïde à k branches dont la caractéristique satisfait à la condition

$$\underline{\lim} \frac{T(r, f)}{(\log r)^2} \leqq h < +\infty . \tag{3}$$

Soient a, b, c, trois valeures arbitraires, $N_z(r)$ la fonction énumérative (Anzahlfunktion) des points critiques de la z-surface de Riemann.

$$N(r; w) < T(r, f) + 0(1) \qquad (w = a, b, c),$$
$$N(r) < (2k-2)\, T(r, f) + 0(1).$$

Posons

$$N(r) = k\Sigma N(r; w) + kN_z(r) < k(2k+1)\, T(r, f) + 0(1),$$

donc

$$\underline{\lim} \frac{N(r)}{(\log r)^2} \leqq hk(2k+1).$$

Par suite il existe, de lemme 1, une suite de couronne D_n: $r_n < |z| < dr_n \left(\log d = \dfrac{1}{2hk(2k+1)} - \varepsilon > 0\right)$ dans laquelle toute la branches de f est régulière et n'est égale à ni a, ni b, ni c. Posons $f_{n,\nu}(z) = f_\nu\left(\dfrac{z}{r_n}\right)$ $(\nu = 1, \ldots, l;\ l \leqq k)$ où f_ν désignent des branches de f. La famille $\{f_{n,\nu}\}$ est normale[1] dasn le domaine D: $1 < |z| < d$. Si $f(z)$ possède $(k+1)$-valeurs asymptotiques distinctes (sur la surface de Riemann de sa fonction inverse), dans chaque D_n, une branche au moins

1) M. K. Nosiro a prové: Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, $h > 1$ un nombre arbitraire. Posons $f_r(z) = f\left(\dfrac{z}{r}\right)$. Si la famille $\{f_r(z)\}$ est normale dans la couronne $1 < |z| < h$, alors $T(r, f) = 0((\log r)^2)$.

deux chemins asymptotiques. C'est contradictoire, par conséquent l'on obtient le

Théorème I. *Toute l'algébroïde méromorphe à k branches dont la fonction caractéristique $T(r, f)$ vérifie* (3), *possède au plus k valeurs asymptotiques distinctes ; si elle en a ν, soit $a_1, \dots, a_\nu$, il existe une suite de couronne : $r_n < |z| < dr_n$ vérifiant* $\log d = \dfrac{1}{2hk(2k+1)} - \varepsilon > 0$ ($\varepsilon > 0$ *arbitraire*) *dans lesquelles une branche tend uniformément vers a_i* $(i = 1, \dots, \nu)$. *Sa fonction inverse possède au plus k singularités trenscendantes sur la surface de Riemann.*

Pour $k=1$ ce résultat se réduit à l'extension du théorème B 1°.

Nous pouvons étendre quelques théorèmes par cette méthode; Par exemple, *théorème de Phragmén-Lindelöf où une fonction possède dans l'angle des pôles qui vérifie* (1).

3. Soit $w = f(z)$ la fonction méromorphe dont la fonction inverse a une singularité indirectement critique sur $w = \infty$. Dans z-plan une langue Δ correspond au domaine $|w| > 1$. Supposons que Δ possède au moins une contour C allant à l'infini (C est une contour la plus éxtérieure). Soit $\bar{\Delta}$ le domaine simplement connexe qui est limité par C, et Δ' le domaine simplement connexe dont la contour coïncide avec celle de Δ excépté des courbes bornées. Soient p_i ($|p_i| \leqq |p_{i+1}|$) les pôles de $f(z)$ dans Δ, et $g(z, p_i)$ fonctions de Green de $\bar{\Delta}$. Il y a trois cas:

a) $$\lim \frac{N(r, \Delta, f)}{(\log r)^2} = \infty$$

b) $$\begin{cases} \varliminf \dfrac{N(r, \Delta, f)}{(\log r)^2} < +\infty & (4) \\[2ex] \varlimsup \dfrac{\log N(r, \Delta, f)}{\log r} < \dfrac{1}{2} & (5) \end{cases}$$

c) $$\varliminf \frac{N(r, \Delta, f)}{(\log r)^2} < +\infty, \quad \text{et} \quad \varlimsup \frac{\log N(r, \Delta, f)}{\log r} \geqq \frac{1}{2}.$$

Au cas de b), nous démontrons que $\Sigma g(z, p_i)$ converge. Nous transformons $\bar{\Delta}$ en ζ-demi-droit-plan H tel que l'infini correspond à l'infini, et p_i à q_i. Désignons l'arc de $|z| = r$ dans $\bar{\Delta}$ par θ_r, transformé de θ_r dans ζ-plan par γ_r, et $\rho(r) = \mathrm{Min}\,|\zeta|$ sur γ_r.

Par le "Verzerrungssatz" de M. Ahlfors on obtient

$$\rho(r) > C\sqrt{r}$$

en particulier

$$|q_i| > C\sqrt{|p_i|}. \tag{6}$$

Comme la fonction énumérative est, de (5) et (6), d'ordre inférieur à un, $\Sigma g(\zeta, q_i)$ converge, où

$$g(\zeta, q_i) = \log \left| \frac{\zeta + \bar{q}_i}{\zeta - q_i} \right| \tag{7}$$

est une fonction de Green de H.

Considérons deux cas:

1° Il existe au moins une point où $\log|f(z)| > \Sigma g(z, p_i)$,

2° $\log|f(z)| \leqq \Sigma g(z, p_i)$ dans Δ. (8)

Cas de 1°. $\varphi(z) = f(z) - \Sigma g(z, p_i)$ étant harmonique dans Δ et $\varphi \leqq 0$ sur son contour, $\varphi(z)$ ne peut être bornée dans Δ. De ces conditions nous obtiendrons d'après des preuves de Théorème A,

$$\int_{\Theta_r} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi > \int_{\Theta_r} \overset{+}{\varphi}(z)\,d\varphi > C\cdot r^{\frac{1}{\alpha(r)}},$$

où $\alpha(r) \leqq 2$ est une quantité relative à l'aire de la partie commune de Δ' et $|z| < r$.

Cas de 2° est impossible. Car Δ correspond à une singularité trenscendantes $w = \infty$, il existe une courbe Γ allant à l'infini dans Δ sur laquelle $f(z)$ tend l'infini. De (8)

$$\lim \Sigma g(z, p_i) = \infty \qquad \text{sur } \Gamma.$$

Si l'on désigne la transformé dans ζ-plan de Γ par Γ',

$$\lim \Sigma g(\zeta, q_i) = \infty \qquad \text{sur } \Gamma'.$$

où $g(\zeta, q_i)$ est une fonction de Green qui est définie par (7). La fonction

$$G(\zeta) = \Pi\,\frac{\zeta + \bar{q}_i}{\zeta - q_i} \tag{9}$$

tend 0 sur la courbe symétrique à l'axe imaginaire. Conséquemment $G(\zeta)$ possède deux valeurs asymptotiques: zéro et l'infini.

On peut prouver aisément le

Lemme 2. Si une suite $\{p_i\}$ possède la propriété (1), et une autre suite $\{q_i\}$ vérifie

$$|q_i| > C\cdot|p_i|^l \qquad (C > 0,\ 0 < l < +\infty)$$

la suite $\{q_i\}$ aussi satisfait à la condition (1) (avec autre valeur de h).

De (4) et lemme 2, la fonction $G(\zeta)$ définie par (9) vérifie (3), c'est contradictoire avec Théorème I. Donc

Théorème II. *Soit $w = f(z)$ une fonction méromorphe dont la fonction inverse possède au moins une singularité indirectement critique (ou non-directement critique au sens de M. Iversen) sur $w = \infty$, et soit Δ la langue correspondante. Si Δ a au moins une contour allant à l'infini,*

1° *soit* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\Theta_r} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi > Cr^{\frac{1}{\alpha(r)}} \qquad \alpha(r) \leqq \dfrac{1}{2}$

2° *soit* $\lim \dfrac{N(r, \Delta, f)}{(\log r)^2} = \infty$

3° *soit* $\overline{\lim}\, \dfrac{\log N(r, \Delta, f)}{\log r} \geqq \dfrac{1}{2}$

3° sera peut-être amélioré. M. Valiron a fait une exemple de fonction dont la caractéristique $T(r, f)$ vérifie

$$T(r, f) < (\log r)^2 \varphi(r)$$

où $\varphi(r)$ est une fonction croissante de $r(\varphi \rightarrow \infty$ avec $r \rightarrow \infty)$ mais aussi lentement que l'on veut et qui a une infinité des valeurs asymptotiques. (loc. cit. 2).

Comme la corollaire il suit que: *Si la fonction inverse possède m singularités directe et n singularités de sorte* 2°, $(m+n \geqq 2)$, *l'ordre* $\rho \geqq \frac{m+n}{2}$.