PAPERS COMMUNICATED

88. *Einige Eigenschaften der endlichen separablen algebraischen Erweiterungen über perfekten Körpern.*

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut der Hokkaido Kaiserlichen Universität zu Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1941.)

Die vorliegende Note soll als eine Vorbereitung meiner Arbeiten über die abelschen Erweiterungen über perfekten Körpern dienen, in denen die klassische *Klassenkörpertheorie im Kleinen* von einem sehr allgemeinen Standpunkt aus behandelt wird.

Hilfssatz 1. Es sei k ein exponentiell bewerteter Körper in bezug auf einen Primdivisor $\mathfrak{p}$ und K eine endliche Erweiterung vom Grade n über k. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ aus K, so ist der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ nach $\mathfrak{P}$ in K endlich algebraisch von einem Grade $\leqq n$ über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ nach $\mathfrak{p}$ in k.

Beweis. Es sei $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m$ ein Elementsystem aus $\mathfrak{K}$ und $m > n$. Ferner sei ω_i ein Repräsentant aus $\bar{\omega}_i\,(1 \leqq i \leqq m)$. Dann gilt für die für $\mathfrak{p}$ ganzen Elemente $a_1, \dots, a_m$ aus k:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\omega_i = 0\,,$$

weil $(K:k) = n < m$ ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß unter den a_i mindestens eine Einheit (in bezug auf $\mathfrak{p}$) existiert. Geht man nun in den Restklassenkörper über, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{a}_i\bar{\omega}_i = 0\,,$$

wo die $\bar{a}_i$ Elemente aus $\mathfrak{k}$ bedeuten und mindestens eines von den $\bar{a}_i$ von Null verschieden ist. Somit ist gezeigt, daß die $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m$ über $\mathfrak{k}$ linear abhängig sind. Hieraus schließt man in geläufiger Weise, daß $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ endlich algebraisch von einem Grade $\leqq n$ ist.

Im folgenden bezeichne k durchweg einen perfekten Körper in bezug auf einen (Exponenten-) Primdivisor $\mathfrak{p}$, und K sei eine endliche separable Erweiterung vom Grade n über k. Dann besitzt K bekanntlich nur einen einzigen Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$. Wir können im folgenden ohne Mißverständnis vom Restklassenkörper von K bzw. k sprechen, indem wir darunter stets den Restklassenkörper $K/\mathfrak{P}$ bzw. $k/\mathfrak{p}$ verstehen, und bezeichnen ihn mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{k}$.

Betrachtet man nun die Wertgruppe $w(K)$ bzw. $w(k)$ von K bzw. k, so ist $w(K)/w(k)$ endlich. Wenn man also mit f und e bzw. $(K:k)$ und $\big(w(K):w(k)\big)$ bezeichnet, so gilt stets:

$$ef \mid n\,.$$

Wir nennen den Körper K über k *unverzweigt*, wenn $e=1$ ist. Wenn insbesondere $f=n$ ist, so heiße K über k *eigentlich-unverzweigt*. Obwohl K über k separabel ist, so braucht K doch nicht über $\mathfrak{k}$ separabel sein. Es existiert daher über $\mathfrak{k}$ ein maximaler separabler Teilkörper $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$. Dabei bezeichnen wir mit f_0 den Grad von $\mathfrak{K}^*$ nach $\mathfrak{k}$ und nennen f_0 den *reduzierten Restklassengrad* von K über k. Es sei $\bar{\xi}_0$ ein primitives Element von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$, und ferner $\bar{f}(x)=x^{f_0}+\bar{a}_1x^{f_0-1}+\cdots+\bar{a}_{f_0}$ ein irreduzibles Polynom in $\mathfrak{k}[x]$, welches $\bar{\xi}_0$ als eine Nullstelle besitzt. Im Integritätsbereich $\mathfrak{K}^*[x]$ gilt nun:

$$\bar{f}(x)=(x-\bar{\xi}_0)\,\bar{g}(x)\,,$$

wo $\bar{g}(x)$ ein Polynom aus $\mathfrak{K}^*[x]$ bezeichnet. Ferner gilt wegen der Separabilität von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$:

$$\big((x-\bar{\xi}_0),\ \bar{g}(x)\big)=1\,.$$

Nun bezeichnen wir mit $a_1, \dots, a_{f_0}$ die Elemente aus k, welche bzw. zu $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{f_0}$ gehören. Dann gilt, der Zerlegung $\bar{f}(x)=(x-\bar{\xi}_0)\bar{g}(x)$ entsprechend, die Kongruenz:

$$f(x)=x^{f_0}+a_1x^{f_0-1}+\cdots+a_{f_0}\equiv(x-\xi_0)\,g(x)\ \bmod\ \mathfrak{P}\,,$$

wo $g(x)$ ein Polynom mit ganzen Elementen aus K als Koeffizienten und ξ_0 ein Element aus $\bar{\xi}_0$ bezeichnet. Ferner gilt offenbar:

$$\big(x-\xi_0,\ g(x)\big)\equiv 1\ \bmod\ \mathfrak{P}\,.$$

Nach einem bekannten Henselschen Lemma[1] gilt in $K[x]$ folgende Zerlegung:

$$f(x)=(x-\xi)\,h(x)\,,$$

wo $\xi\equiv\xi_0$, $h(x)\equiv g(x)$ mod $\mathfrak{P}$ sind. Bildet man nun den Körper $K^*=k(\xi)\leqq K$, so enthält der Restklassenkörper von K^* den Körper $\mathfrak{k}(\bar{\xi})$, welcher über $\mathfrak{k}$ vom Grade f_0 ist; es ist also nach dem oben Bemerkten $\mathfrak{k}(\bar{\xi})$ der Restklassenkörper von K^*. Da $\mathfrak{K}^*=\mathfrak{k}(\bar{\xi}_0)$ und $\xi\equiv\xi_0$ mod $\mathfrak{P}$ ist, so kann man wie üblich $\mathfrak{k}(\bar{\xi})$ mit $\mathfrak{K}^*$ identifizieren; d. h. der Restklassenkörper von K^* ist gleich $\mathfrak{K}^*$, und ferner ist K^* über k eigentlich unverzweigt, weil $(\mathfrak{K}^*:\mathfrak{k})=f_0=(K^*:k)$ ist.

Die Diskriminante D des Polynomes $f(x)$ gehört definitionsgemäß zur Restklasse $\bar{D}$, welche die Diskriminante von $\bar{f}(x)$ definiert. Da $\bar{D}\neq 0$ ist, so ist D eine Einheit in bezug auf $\mathfrak{p}$. Also ist $K^*=k(\xi)$ über k separabel. Zusammenfassend alle obigen Tatsachen, haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Besitzt der Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ den maximal-separablen Teilkörper $\mathfrak{K}^*$ vom Grade f_0 über $\mathfrak{k}$, so existiert in K ein eigentlich-unverzweigter separabler Teilkörper K^* vom Grade f_0 über k. Ferner gibt es ein primitives Element von K^* über k derart, daß die ihm zugehörige Restklasse ein primitives Element von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$ wird.*

1) Vgl. etwa Van der Waerden, Moderne Algebra, 2. Aufl., S. 259-261.

Ist nun α ein Element aus einer separablen Erweiterung vom Grade n über k, so nennen wir vorläufig die Determinante $D_{K,k}(\alpha)$ $=\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1\cdots\alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2\cdots\alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & \alpha_n\cdots\alpha_n^{n-1}\end{vmatrix}^2$ die *Diskriminante* von α nach k. Dabei sind $\alpha=\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zu α konjugierten Elemente über k. Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz 2. Es sei K eine separable Erweiterung vom Grade n über einem perfekten Körper k. Gibt es dann in K ein ganzes Element ξ vom Grade n über k, dessen Diskriminante eine Einheit ist, so bildet $1, \xi, \dots, \xi^{n-1}$ eine Minimalbasis des Bewertungsringes von K über dem Bewertungsring von k.

Beweis. Da $(\xi:k)=n=(K:k)$ ist, so bildet $1, \dots, \xi^{n-1}$ eine Körperbasis von K über k. Ist α ein ganzes Element aus K, so ist offenbar

$$\alpha=a_0+a_1\xi\cdots+a_{n-1}\xi^{n-1},$$

wo $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ Elemente aus k bezeichnen. Bezeichnet man nun mit $\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ bzw. die zu α konjugierten Elemente aus $k(\xi_1)=K$, $k(\xi_2), \dots, k(\xi_n)$, so gilt:

$$D_{K,k}(\xi)a_i=\Delta(1, \xi, \dots, \xi^{i-1}, \alpha, \xi^{i+1}, \dots, \xi^{n-1})\Delta(1, \xi, \dots, \xi^{n-1}),$$

wo $\Delta(1, \xi, \dots, \xi^{i-1}, \alpha, \xi^{i+1}, \dots, \xi^{n-1})=\begin{vmatrix} 1 & \xi_1\cdots\alpha_1\cdots\xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2\cdots\alpha_2\cdots\xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 1 & \xi_n\cdots\alpha_n\cdots\xi_n^{n-1}\end{vmatrix}$ und $\Delta(1, \xi, \dots, \xi^{n-1})$ $=\begin{vmatrix} 1 & \xi_1\cdots\xi_1^{n-1} \\ 1 & \xi_2\cdots\xi_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & \xi_n\cdots\xi_n^{n-1}\end{vmatrix}$ ist. Da nach Voraussetzung ξ, α ganze Elemente aus K sind, so ist $a_iD_{K,k}(\xi)$ ganzes Element aus k; also sind die a_i ganz, weil $D_{K,k}(\xi)$ eine Einheit ist, w. z. b. w.

Hilfssatz 3. Es sei f_0 der reduzierte Restklassengrad von K über k und K^* ein solcher eigentlich-unverzweigte Teilkörper von K vom Grade f_0 über k, daß der Restklassenkörper von K^* über $\mathfrak{k}$ separabel ist. Ist dann K_1 ein eigentlich-unverzweigter Teilkörper von K über k derart, daß der Restklassenkörper von K_1 über $\mathfrak{k}$ separabel ist, so ist K_1 stets in K^* enthalten.

Beweis. Nach dem eben bewiesenen Satz 1 existiert in K_1 ein primitives Element ζ, dessen Restklasse $\bar{\zeta}$ gerade ein primitives Element des Restklassenkörper $\mathfrak{K}_1$ von K_1 über $\mathfrak{k}$ wird. Ferner genüge ζ einer irreduziblen Gleichung

$$f(x)=x^{n_1}+b_1x^{n_1-1}+\cdots+b_{n_1}=0$$

in k, wo $b_1, \dots, b_{n_1}$ ganze Elemente aus k bezeichnen. Geht man nun in die Restklassen über, so ist das Polynom

$$\bar{f}(x)=x^{n_1}+\bar{b}_1x^{n_1-1}+\cdots+\bar{b}_{n_1}$$

in $\mathfrak{k}[x]$ irreduzibel, weil $\bar{\zeta}$ eine Nullstelle von $\bar{f}(x)$ und $\left(\mathfrak{k}(\bar{\zeta}):\mathfrak{k}\right)=n_1$ ist. Da $\mathfrak{k}(\bar{\zeta})$ über $\mathfrak{k}$ separabel ist, so ist die Diskriminante von $f(x)$ eine

Einheit. Bildet man nun das Kompositum K^*K_1 von K^* und K_1, so ist $K^*K_1=K^*(\zeta)$. Spaltet nun $f(x)$ in $K^*[x]$ einen irreduziblen Faktor $g(x)$ vom Grade m_1 ab, welcher ζ als eine Nullstelle besitzt, so ist $g(x)$ sicher über K^* separabel. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, daß $g(x)$ ein Polynom mit ganzen Elementen als Koeffizienten und sogar den höchsten Koeffizienten 1 besitzt. Da die Diskriminante von $g(x)$ als Teiler der Diskriminante von $f(x)$ eine Einheit ist, so ist die Diskriminante des Polynomes $\bar{g}(x)$, welches man as $g(x)$ durch den Übergang in den Restklassenkörper K erhält, von Null verschieden. Die Restklasse $\bar{\zeta}$ aus dem Restklassenkörper von K^*K_1 ist eine Nullstelle von $\bar{g}(x)$ und infolgedessen über dem Restklassenkörper $\mathfrak{K}^*$ von K^* separabel. Da alsdann $\mathfrak{K}^*(\bar{\zeta})$ über $\mathfrak{k}$ separabel wird, so muß wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$ das Element $\bar{\zeta}$ in $\mathfrak{K}^*$ enthalten sein. Nach dem Henselschen Lemma besitzt $g(x)$ bereits in $K^*[x]$ einen linearen Faktor als Teiler, es muß also $m_1=1$ sein, w. z. b. w.

Nach dem eben bewiesenen Satz ist der Körper K^* durch die Eigenschaft, daß er über k eigentlich-unverzweigt vom Grade f_0 und sein Restklassenkörper über $\mathfrak{k}$ separabel ist, eindeutig bestimmt. Den Körper K^* wollen wir im folgenden den *Trägheitskörper*[1] von K über k nennen.

Satz 2. *Wenn der maximal-separable Teilkörper $\mathfrak{K}^*$ von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$ galoissch ist, so ist der Trägheitskörper K^* von K über k auch galoissch. Ferner gilt:*

Galoisgruppe von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k} \cong$ Galoisgruppe von K^* über k.

Beweis. Der Restklassenkörper von K^* ist nach Voraussetzung über k galoissch, weil er gemäß Satz 1 $\mathfrak{K}^*$ ist. Es sei $f(x)=x^{f_0}+a_1x^{f_0-1}+\cdots+a_{f_0}=0$ eine definierende Gleichung von K^* über k. Dann kann man nach Satz 1 ohne Einschränkung annehmen, daß beim Übergang in den Restklassenkörper $\bar{f}(x)=x^{f_0}+\bar{a}_1x^{f_0-1}+\cdots+\bar{a}_{f_0}$ in $\mathfrak{k}[x]$ separabel ist und eine Nullstelle ξ von $f(x)$ aus K^* ein primitives Element $\bar{\xi}$ von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$ definiert. Da $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$ galoissch ist, so sind alle Nullstellen von $\bar{f}(x)=0$ Polynome von ξ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{k}$. Es sei also

$$\bar{\xi}_i=\bar{a}_0^{(i)}+\bar{a}_1^{(i)}\xi+\cdots+\bar{a}_{f_0-1}^{(i)}\xi^{f_0-1}$$

eine Nullstelle von $\bar{f}(x)=0$, wo $1\leqq i\leqq f_0$, die $\bar{a}_j^{(i)}\in\mathfrak{k}\ (0\leqq j\leqq f_0-1)$ sind, und $\bar{\xi}=\bar{\xi}_1$ ist. Bezeichnet man dann mit $a_j^{(i)}$ ein zu $\bar{a}_j^{(i)}$ gehöriges Element aus k, so gilt für $\xi_i=a_0^{(i)}+\cdots+a_{f_0-1}^{(i)}\xi^{f_0-1}$ stets:

$$f(\xi_i)\equiv 0 \mod \mathfrak{P}^* \quad (1\leqq i\leqq f_0)\,;$$

d. h. es besteht in K^* die Kongruenz:

$$f(x)\equiv\prod_{i=1}^{f_0}(x-\xi_i) \mod \mathfrak{P}^*\,,$$

wo $\mathfrak{P}^*$ der Primdivisor von K^* ist. Beachtet man nun, daß $\bar{f}(x)$ in

---

1) A. Ostrowski hat K^* den regulären Trägheitskörper genannt.

$\mathfrak{k}[x]$ separabel ist, so erhält man durch wiederholte Anwendung des Henselschen Lemmas in $K^*[x]$

$$f(x)=\prod_{i=1}^{f_0}(x-\eta_i)$$

und

$$\xi_i \equiv \eta_i \bmod \mathfrak{P} \quad (i=1,\dots,f_0);$$

d. h. K^* ist über k galoissch.

Da nach Hilfssatz 2 $1,\dots,\eta^{f_0-1}$ eine Minimalbasis von K^* über k ist, so kann man

$$\eta_i = c_0^{(i)} + c_1^{(i)}\eta + \cdots + c_{f_0-1}^{(i)}\eta^{f_0-1} = \Phi_i(\eta)$$

setzen, wo $\eta=\eta_1=\xi$ und $c_0^{(i)},\dots,c_{f_0-1}^{(i)}$ ganze Elemente aus k sind. Da $\bar{\eta}_i=\bar{\xi}_i$ ist, so gehören $\eta_1,\dots,\eta_{f_0}$ bzw. zu f_0 verschiedenen Restklassen mod $\mathfrak{P}^*$. Wenn bei Anwendung eines Automorphismus φ von K^* über k η in $\eta_i=\Phi_i(\eta)$ übergeführt wird: $\eta^\varphi=\Phi_i(\eta)$, so induziert φ durch den Übergang in die Restklassen $\overline{(\eta^\varphi)}=\bar{\eta}_i=\bar{\xi}_i=\bar{\Phi}_i(\bar{\eta})$ einen Automorphismus $\bar{\varphi}$ von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{k}$, welcher $\bar{\eta}$ in $\bar{\eta}_i$ überführt. Auf obige Weise induzieren f_0 verschiedene Automorphismen von K^* über k die sämtlichen Automorphismen von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$. Es seien nun φ, ψ Automorphismen von K^* über k, und $\eta^\varphi=\Phi(\eta)$, $\eta^\psi=\Psi(\eta)$, wo $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ wieder Polynome in x mit ganzen Elementen aus k als Koeffizienten bedeuten. Dann ist

$$\eta^{\varphi\psi}=\bigl(\Phi(\eta)\bigr)^\psi=\Phi\bigl(\Psi(\eta)\bigr),$$

also ist

$$\overline{(\eta^{\varphi\psi})}=\bar{\Phi}\bigl(\bar{\Psi}(\bar{\eta})\bigr);$$

d. h. nach Definition gilt: $\bar{\eta}^{\overline{\varphi\psi}}=\bar{\Phi}\bigl(\bar{\Psi}(\bar{\eta})\bigr)$. Da anderseits

$$\bar{\eta}^{\bar{\varphi}\bar{\psi}}=\bigl(\bar{\Phi}(\bar{\eta})\bigr)^{\bar{\psi}}=\bar{\Phi}\bigl(\bar{\Psi}(\bar{\eta})\bigr)$$

ist, so ist sicher $\overline{\varphi\psi}=\bar{\varphi}\bar{\psi}$. Somit ist gezeigt, daß die Galoisgruppe von $\mathfrak{K}^*$ über $\mathfrak{k}$ mit der von K^* über k isomorph ist.

Es sei nun K endlich separabel *galoissch* über k und $\mathfrak{G}$ die Galoisgruppe von K/k. Dann existiert in K der Invariantenkörper T der Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ über k. Nach der galoisschen Theorie der bewerteten Körper ist T galoissch über k, und zwar ist die Galoisgruppe von T/k isomorph zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$. Ferner ist der Restklassenkörper von T der maximal-separable Teilkörper des Restklassenkörpers von K über $\mathfrak{k}$[1]. Der Körper T stimmt daher mit dem oben definierten Trägheitskörper von K über k überein. Somit ist die Bennenung des Trägheitskörpers gerechtfertigt.

Satz 3. *Es sei K eine endliche separable Erweiterung über einem perfekten Körper k und K^* Trägheitskörper von K über k. Dann ist jede Einseinheit ε[2] aus k Norm eines Elementes aus K.*

---

1) M. Deuring, Verzweigungstheorie bewerteter Körper, Math. Ann. Bd. **105** (1931), S. 290–291.

2) D. h. ε ist kongruent 1 nach dem Primdivisor aus k.

Beweis. Wie wir schon oben bewiesen haben, existiert in K^* ein ganzes primitives Element ξ derart, daß die Diskriminante von $1, \xi, \dots, \xi^{f_0-1}$ eine Einheit aus k ist, wo f_0 den reduzierten Restklassengrad von K über k bedeutet. Da die Diskriminante von ξ nach k eine Einheit ist, so bestätigt man leicht, daß es unter den Spuren von $1, \xi, \dots, \xi^{f_0-1}$ nach k mindestens eine Einheit gibt. Wir bezeichnen also mit η ein ganzes Element aus K^*, dessen Spur nach k eine Einheit ist. Bezeichnet nun π eine passende, ganze Nichteinheit aus k, so gilt nach Voraussetzung: $\varepsilon = 1 + \pi$. Wir betrachten nun eine formale Potenzreihe $a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots + a_n\pi^n + \cdots = \varphi(\pi)$ mit ganzen Elementen aus k als Koeffizienten, und bestimmen die $a_1, \dots, a_n, \dots$ aus der Gleichung

$$\varepsilon = N\big(1 + \eta\varphi(\pi)\big) = 1 + S(\eta)\,\varphi(\pi) + A_2\varphi(\pi)^2 + \cdots + A_{f_0}\varphi(\pi)^{f_0},$$

wo $N(\ \ )$, $S(\ \ )$ bzw. Norm, Spur nach k bezeichnen, und $A_2, \dots, A_{f_0}$ ganze Elemente aus k sind. Offenbar gilt dann:

$$\begin{aligned} &S(\eta)a_1 = 1\,, \\ &S(\eta)a_2 + A_2a_1^2 = 0\,, \\ &S(\eta)a_3 + 2A_2a_1a_2 + A_3a_1^3 = 0\,, \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

Im allgemeinen gilt:

$$S(\eta)a_\nu + G(a_1, \dots, a_{\nu-1}, A_2, \dots, A_{f_0}) = 0\,,$$

wo $G(a_1, \dots, a_{\nu-1}, A_2, \dots, A_{f_0})$ ein Polynom in $a_1, \dots, a_{\nu-1}, A_2, \dots, A_{f_0}$ mit ganzzahligen Koeffizienten bezeichnet. Da sich offenbar a_1, a_2, a_3 alle als ganze Elemente aus k bestimmen lassen, so bestätigt man leicht durch vollständige Induktion, daß a_ν ganzes Element aus k ist. Die Potenzreihe $\varphi(\pi)$ gehört also zu k, und es gilt:

$$\varepsilon = N\big(1 + \eta\varphi(\pi)\big)\,, \quad \text{w. z. b. w.}$$