

101. Sur le principe du maximum dans la théorie du potentiel.

Par Yôiti YOSIDA.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaidô, Sapporo.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Dec. 12, 1941.)

1. Dans cette Note nous considérons le potentiel

$$u(P) = \int_F \frac{1}{r_{PQ}^\alpha} d\mu_Q \quad (1 \leq \alpha < 3)$$

déterminé par la répartition d'une masse positive μ sur un ensemble fermé et borné F .

Le principe du maximum, dont il s'agit dans la suite, s'énonce comme il suit :

I. Si partout sur F

$$(1) \quad u(P) \leq M,$$

la même inégalité a lieu en tous les points de l'espace.

Ce théorème a été établi par M. Frostman¹⁾ dans un mémoire important publié en 1935. Sa démonstration, s'appuyant sur la méthode du balayage, présuppose au fond la résolution du problème de la répartition d'équilibre, qui est d'ailleurs le point de départ de toute sa théorie. Dans ce qui suit, nous nous proposons de démontrer le principe ne faisant appel qu'aux éléments de la théorie de l'intégrale.

Ainsi établi, ce principe permettra de simplifier considérablement les raisonnements employés par M. Frostman pour résoudre le problème mentionné plus haut. On pourra, en effet, se dispenser d'envisager préalablement, comme l'a fait M. Frostman, le cas particulier d'un domaine fermé qui satisfait à la condition de Poincaré, mais aborder directement le problème dans toute sa généralité.

Il y a lieu de remarquer que la démonstration de I qui sera donnée au numéro 3 de cette Note s'applique, à de petits changements près, aux propositions suivantes ;

II. Soit $f(P)$ une fonction surharmonique et continue dans tout l'espace. Si $u(P) \leq f(P)$ sur F sauf sur un ensemble de capacité nulle²⁾, la même inégalité a lieu en tous les points de l'espace.

III. Soit, dans le cas où $\alpha=1$,

$$v(P) = \int_F \frac{1}{r_{PQ}} d\nu_Q$$

un autre potentiel déterminé par la répartition sur F d'une masse positive ν . Si $u(P) \leq v(P)$ sur F sauf sur un ensemble de capacité nulle²⁾, la même inégalité a lieu en tous les points de l'espace.

1) Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles. (Lund). Voir aussi A. T. Maria, The potential of a positive mass and the weight function of Wiener, Proc. of the Nat. Ac. of U.S.A. **20**.

2) On suppose que F soit de capacité positive.

2.—Lemme. Soient F' un sous-ensemble de F et E un ensemble fermé et borné quelconque. Si $u(P)$ est une fonction continue sur E , le potentiel

$$(2) \quad \bar{u}(P) = \int_{F'} \frac{1}{r_{PQ}^a} d\mu_Q$$

l'est aussi sur E .

Désignons par $[r]_n$ le plus grand des deux nombres r et $\frac{1}{n}$ où n est un nombre entier et positif, et posons

$$u_n(P) = \int_F \frac{1}{[r_{PQ}]_n^a} d\mu_Q \quad \text{et} \quad \bar{u}_n(P) = \int_{F'} \frac{1}{[r_{PQ}]_n^a} d\mu_Q.$$

On obtient ainsi deux suites non-décroissantes de fonctions continues $\{u_n(P)\}$ et $\{\bar{u}_n(P)\}$ qui tendent partout, l'une vers $u(P)$ et l'autre vers $\bar{u}(P)$.

Comme la limite $u(P)$ de la première suite est une fonction continue sur E , il faut, d'après le théorème bien connu de Dini, que sa convergence y soit uniforme. On en conclut que la seconde suite $\{\bar{u}_n(P)\}$ aussi converge uniformément sur E . Cela se voit aisément si l'on tient compte de l'inégalité

$$|\bar{u}_m(P) - \bar{u}_n(P)| \leq |u_m(P) - u_n(P)|,$$

qui est valable pour tout couple de nombres entiers m et n .

Comme la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues, $\bar{u}(P)$ est évidemment continu sur E .

3. Démonstration de I. Remarquons d'abord que $u(P)$ est une fonction sousharmonique dans tout domaine ne renfermant aucun point de F . Cela résulte de la propriété de $1/r_{PQ}^a$ et de la formule de différentiation sous le signe intégral.

Ceci posé, considérons d'abord le cas où $u(P)$ est continu considéré comme fonction sur F . Comme l'a montré M. Frostman³⁾, $u(P)$ est dans ce cas une fonction continue en tous les points de l'espace. Il est donc évident que $u(P)$ ne peut atteindre son maximum qu'en des points de F .

Passons maintenant au cas général. Soient ε un nombre positif quelconque et H un sous-ensemble de F tel que

$$\mu H < \varepsilon$$

et que la suite $\{u_n(P)\}$ du numéro précédent converge uniformément sur $F-H$. L'existence d'un tel H est assurée par le théorème de Egoroff, et, dans le cas actuel, on peut même supposer que H soit un ensemble mesurable B .

Prenons, donc, un ensemble ouvert G tel que

$$\mu G < \varepsilon \quad \text{et} \quad H \subset G,$$

et posons $F' = F - FG$. Comme $u(P)$ est une fonction continue sur l'ensemble fermé et borné F' , le potentiel $\bar{u}(P)$ défini par (2) est,

3) Frostman, l. c. p. 26.

d'après le lemme, aussi une fonction continue sur F' . Le principe du maximum est, par conséquent, valable pour le potentiel $\bar{u}(P)$, et on a l'inégalité

$$\bar{u}(P) \leq M$$

en tous les points de l'espace.

Soit, en particulier, P un point n'appartenant pas à F et dont la distance à F est égale à r . De l'inégalité

$$u(P) = \bar{u}(P) + \int_{FG} \frac{1}{r_{PQ}^a} d\mu_Q \leq M + \frac{\varepsilon}{r^a}$$

il résulte immédiatement que

$$u(P) \leq M.$$
