Equités sur les automates à pic

Douadi Mihoubi

Abstract

We study the behaviors of one turn pushdown automata using the notions of fairness defined by L. Priese et al. in [10], as conditions of acceptance. We show in particular that these notions are simulable by the modes of acceptance of J. R. Buchi and D. Muller.

Résumé

On s'intéresse dans ce papier au comportements des automates à pic en utilisant les notions d'équités définies par L. Priese et al. dans [10] . On montre en particulier que ces notions d'équités sont simulables par les conditions d'acceptance de J. R. Buchi et D. Muller sur les systèmes à pic. Pour l'équité définie sur les grammaires algébriques par N. Francez et al. dans [3], on montre que cette notion d'équité ne peut être équivalente à ces conditions d'acceptations.

1 Introduction

Dans [10], L.Priese et al. définissent des notions d'équités sur un chemin par rapport aux transitions, actions (resp. séquences de transitions, séquences d'actions) sur un système de transition fini, qui est un modèle sans mémoire interne, et montrent principalement que les comportements équitables par rapport aux transitions (resp. actions) sur les automates finis sont des langages infinitaires rationnels. Nôtre objectif est l'extension de ces notions d'équités aux systèmes à

Received by the editors April 2008 - In revised form in June 2010.
Communicated by A. Weiermann.
2000 *Mathematics Subject Classification* : 68Q10, 68Q85.
Key words and phrases : Automates finis et à pic, grammaire linéaire, équités.

pic, qui sont des systèmes avec mèmoires internes, et montrer si ces notions peuvent aussi êtres simulables par les conditions d'acceptations de J.R. Buchi et D. Muller.

Dans la seconde partie, on s'intéresse au concept d'équité définit sur les grammaires algébriques par N. Francez et al. dans [3] , notée F-équité, ces auteurs montrent qu'une grammaire algébrique est F-équitable ssi elle n'est pas expansive en d'autres mots s'il n'existe pas une variable qui dédouble dans les productions . En appliquant cette notion d'équité, on montre aussi que les grammaires linéaires et bilinéaires sur les mots infinis, sont F-équitable c.à.d leurs dérivations F-équitables sont finies. Finalement, en prenant la F-équité comme condition d'acceptation sur un automate à pic réduit (tous ses états sont accessibles et coaccessibles), avec mode de reconnaissance par pile vide, on montre qu'il est F-équitable, ce qui montre d'une manière triviale que cette notion d'équité ne peut être équivalente aux conditions d'acceptations de D. Muller et J.R. Buchi.,

Le papier est subdivisé en quatre sections, la première section est consacrée aux préliminaires sur les mots finis, infinis et les notions de dérivation et accessibilité dans une grammaire algébrique. Dans la seconde section on décrit les notions d'équités développées par L. Priese et al. sur les automates finis. Dans la troisième section on fait étendre ces notions d'équités sur les systèmes à pic. Enfin la dernière section est consacrée à l'équité sur les grammaires linéaires et bilinéaires.

2 Préliminaires

Soit Σ un ensemble fini de symboles appelés lettres ou actions. On note Σ^* le monoïde libre sur Σ, dont les éléments sont appelés mots, d'élément neutre le mot vide noté ε. On appelle langage sur Σ toute partie de Σ^*. La famille de tous les langages formés de mots sur Σ coincide avec l'ensemble $P(\Sigma^*)$ de toutes les parties sur Σ^*. On définit donc naturellement les opérations réunion, intersection et complémentation sur les langages. On définit aussi une opération produit notée "." sur $P(\Sigma^*)$ par:

$$\forall\ A, B \in P(\Sigma^*) \quad A.B = \{w \in \Sigma^* /\ \exists\ (u,v) \in A \times B : w = u.v\}.$$

Un mot infini μ sur Σ est une application $\mu : \mathbb{N}^+ \to \Sigma$, où $\mathbb{N}^+$ désigne l'ensemble des entiers naturels positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^+$, on note par $\mu(n)$ la n–ième lettre de μ et par $\mu[n] = \mu(1)...\mu(n)$ le segment initial de longueur n de μ. L'ensemble des mots infinis sur Σ est noté par Σ^ω et l'ensemble des mots finis et infinis par $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$ où ω désigne le premier ordinal dénombrable.

On dit que $\beta \in \Sigma^\infty$ est un facteur gauche de $\alpha \in \Sigma^\infty$ que l'on note $\beta \leq \alpha$, s'il existe $\gamma \in \Sigma^\infty$ tel que $\alpha = \beta\gamma$. Donc, ou bien $\beta \in \Sigma^*$ et $\beta = \alpha[n]$ avec $n = |\beta|$ est la longueur du mot β ou bien $\beta \in \Sigma^\omega$ et dans ce cas $\alpha = \beta$. La relation " $\leq$ " est un d'ordre partiel sur Σ^∞.

Pour $A \subset \Sigma^*$. On pose:

$A^\omega = \left\{ u \in X^\omega \ / \ u = \prod_{i=1}^{\infty} u_i \text{ avec } u_i \in A^+, \forall\ i \in \mathbb{N}^+ \right\}$, le langage de mots infinis construit à partir des mots de A, en particulier si $A = \{\varepsilon\}$ alors $A^\omega = \{\varepsilon\}$.

Une grammaire algébrique est un quadruplet $G = (V, \Sigma, P, S)$ où Σ, V sont deux alphabets finis disjoints appelés respectivement alphabet terminal et alphabet non terminal (ensemble de variables) et P est un ensemble fini d'éléments de $V \times (\Sigma \cup V)^*$ (i.e. $P \subseteq V \times (\Sigma \cup V)^*$) appelé règles ou productions de la grammaire, S est l'axiome de la grammaire. Une règle $(A, \alpha) \in P$ est généralement notée $A \longrightarrow \alpha$. Une grammaire algébrique est dite linéaire si toute production dans P est de la forme: $A \longrightarrow uBv$ ou bien $A \longrightarrow u$ avec $u, v \in \Sigma^*$ et $A, B \in V$.
On dit q'un mot $g \in (\Sigma \cup V)^*$ dérive directement d'un mot $f \in (\Sigma \cup V)^*$ qu'on note $f \Longrightarrow g$, si et seulement si, ils existent h_1, $h_2 \in (\Sigma \cup V)^*$ et $A \in V$ tels que: $f = h_1 A\, h_2$, $g = h_1 \alpha\, h_2$ avec $A \longrightarrow \alpha$ est une production dans P.
Une dérivation d'un mot $f \in (\Sigma \cup V)^*$ en un mot $g \in (\Sigma \cup V)^*$ est une suite de mots de $(\Sigma \cup V)^*$de la forme $f = f_1, f_2, ..., f_n, f_{n+1} = g$ tels que: $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $f_i \Longrightarrow f_{i+1}$, le nombre n s'appelle l'ordre de la dérivation, cette dérivation est généralement notée $f \overset{*}{\Longrightarrow} g$ si on s'intéresse pas à la longueur n. Une variable A dans une grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, P, S)$ est dite engendrante s'il existe un mot $x \in \Sigma^*$ tel que $A \overset{*}{\Longrightarrow} x$. Une variable A est dite accessible à partir de l'axiome si $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha A \beta$ où $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$. Une dérivée de G est un mot $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ tel que $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha$. On dira qu'une grammaire est réduite ssi toute variable est accessible et engendrante. On dit que la règle $A \longrightarrow \alpha$ est applicable à la dérivée β ssi $\beta = \gamma A \beta$ tels que: $\gamma, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

3 Systèmes de transitions finis et équités

Pour les notions d'équités et les preuves des résultats introduites dans cette section le lecteur pourra consulter [10].

Définition 1. *Un système de transition fini est un quadruplet $S = (Q, \Sigma, q_0, T)$ tel que:*
(i). Q est un ensemble fini d'états, $q_0 \in Q$ l'état initial.
(ii). Σ un alphabet fini dit ensemble d'actions.
(iii). $T \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ ensemble fini de transitions.

Soit $\sigma : q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \longrightarrow ... \xrightarrow{a_n} q_n \longrightarrow$ ...un chemin dans S d'origine l'état initial q_0 telle que $\forall i \geq 0$, $t_i = (q_i, a_{i+1}, q_{i+1})$ est un élément de T de calcul correspondant $C = (q_i)_{i \geq 0}$. Le chemin σ est dite maximal dans S si elle es infini ou bien fini d'extrémité un état q mais sans issue. Si le chemin σ est infini, on notera $t \underset{\omega}{\in} \sigma$ le fait que la transition t occure une infinité de fois dans le chemin σ et $\inf(C)$ l'ensemble des états rencontrés une infinité de fois de le calcul correspondant C. On dira que le chemin $\sigma \in T^\infty$ d'origine l'état q_0 est x-équitable avec $x \in \{t, a, c, m\}$ le fait que le chemin σ soit respectivement {transition, action, chemin, mot} équitable.
On notera

$$L^x(S) = \{w \in \Sigma^\infty / \ \exists\, \sigma \in T^\infty \text{ d'origine } q_0\ x-\text{équitable tel que: } w = \Pi_2(\sigma)\}$$

le langage $x-$équitable reconnu par S avec $\Pi_2(\alpha = t_1...t_n) = \Pi_2(t_1)...\Pi_2(t_n)$

tel que pour $t = (q, a, q') \in T$ on a $\Pi_2(t) = a$. On désigne par $x - \mathrm{Re}\, c(\Sigma^\infty)$ la famille des langages infinitaires *x-équitables.* Rappelons qu'un langage infinitaire (i.e $L \subseteq \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$) est dit reconnaissable ssi $L \cap \Sigma^*$est reconnu par un automate fini et $L \cap \Sigma^\omega$ est reconnu par un automate de Büchi non déterministe.

Exemple 1. Soient les systèmes de transitions finis S_1 et S_2 représentés par leurs graphes de transitions figure 1.

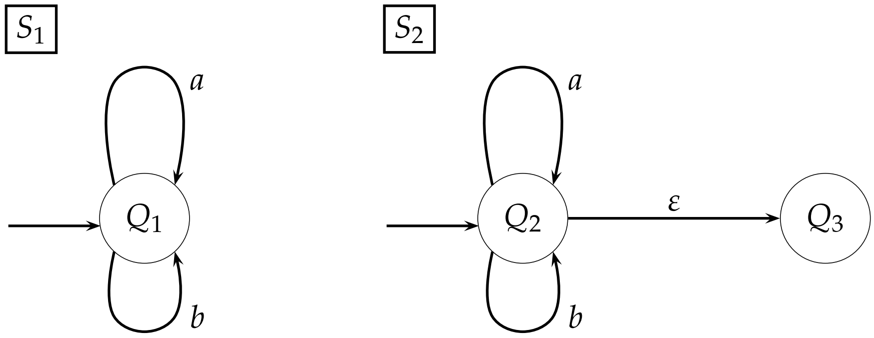

Figure 1.

On a $L^t(S_1) = (a^*bb^*a)^\infty$ et $L^a(S_1) = (a^*bb^*a)^\infty$. On a $(ab)^\omega \in (a^*bb^*a)^\infty$ et par conséquent $(ab)^\omega$ est *a−équitable* et *t−équitable* dans S_1, mais $(ab)^\omega$ n'est ni *c−équitable* ni *m−équitable* dans S_1. Pour S_2, on a $L^x(S_2) = (a+b)^\infty$ pour tout $x \in \{t, a, c, m\}$.
A partir des définitions précédentes, on peut en déduire facilement les résultats suivants:

Lemme 1. *Pour tout système de transition fini $S = (Q, \Sigma, q_0, T)$, on a :*
(i). $L^t(S) \subseteq L^a(S)$.
(ii). $L^c(S) \subseteq L^m(S)$.
(iii). $Rat(\Sigma^*) \subseteq x - \mathrm{Re}\, c(\Sigma^\infty)$.

Le résultat qui suit permet d'affirmer l'équivalence entre la $a-$équité et la $t-$équité.

Proposition 1. *Pour tout système de transition fini S_1 il existe un système de transition fini S_2 tel que $L^a(S_1) = L^t(S_2)$.*

Le théorème qui suit montre que la condition d'acceptance de D. Muller permet d'exprimer la *a − équité* et la *t − équité*.

Théorème 1. *Pour tout système de transition fini S, ils existent des automates finis de Muller A_1, A_2 tel que:*
(i). $L^t(S) \cap \Sigma^\omega = L^\omega_M(A_1)$.
(ii). $L^a(S) \cap \Sigma^\omega = L^\omega_M(A_2)$.

Le lemme suivant affirme que la procédure de déterminisation d'automates finis (ou plus précisément des systèmes de transitions finis) ne conserve pas la *t−rationalité* et la *a−rationalité*, en d'autres termes, si M est un automate fini et M' son équivalent déterministe on a pas toujours $L^t(M) = L^t(M')$ (resp. $L^a(M) = L^a(M')$).

Lemme 2. *La déterminisation d'automates finis ne conserve pas la t−*rationalité *(resp. a−*rationalité).
Preuve: Soit l'automate fini M et son équivalent déterministe M'(voir figure 2).

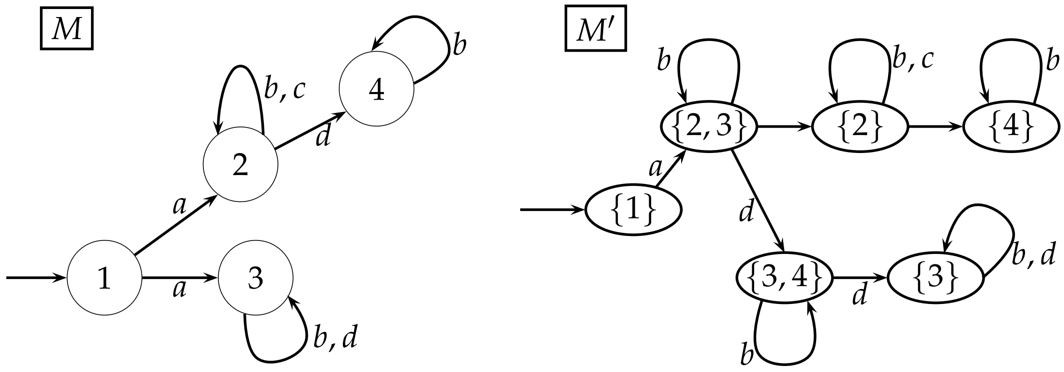

Figure 2.

Soit le mot adb^ω. On a $adb^\omega \in L^t(M)$ par contre $adb^\omega \notin L^t(M')$. L'unique calcul pour adb^ω dans M' qui est $c = \{\overline{1}\}\{\overline{2,3}\}\{\overline{3,4}\}^\omega$ n'est pas *t−équitable*, en effet, la possibilité de transiter de l'état $\{3,4\}$ vers $\{3\}$ est possible infiniment souvent dans c mais jamais utilisé, ce qui perd au calcul c d'être *t−équitable*. Pour la $a-$équité, on considère le même contrexemple, on a
$L^a(M) = a(b+c)^* db^\omega + a\{\mu \in (b+d)^\omega \;/\; |\mu|_b = |\mu|_d = \infty\}$
$L^a(M') = ab^*c(b+c)^* db^\omega + ab^*db^*\{\mu \in (b+d)^\omega \;/\; |\mu|_b = |\mu|_d = \infty\}$
on a $adb^\omega \in L^a(M) - L^a(M')$, ce qui montre que la $a-$rationalité n'est pas conservée. ∎

4 Systèmes de transitions à pic et équités

Définition 2. *Un système à pic est 7-uplet* $M = (K, \Pi = \{K_1, K_2\}, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0)$ *telle que:*
(i). K est un ensemble fini d'états, Π *une partition de K,* $q_0 \in K$ *l'état initial du système.*
(ii). Σ *est l'alphabet d'entrée,* Γ *l'alphabet de la pile,* $Z_0 \in \Gamma$ *le symbole initial de la pile.*
La Machine se trouve à tout instant dans une configuration (q, γ) *où q,* γ *sont respectivement l'état et le contenu de la pile à cet instant, le couple* (q_0, z_0) est la configuration initiale de la machine.
(iii). T est l'ensemble fini de transitions avec $T \subseteq K \times \Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times K \times \Gamma^*$.

Une transition $t = (q, a, z, q', \beta) \in T$ permet de faire passer la machine de l'état q vers l'état q' en executant l'action a et remplace le sommet de pile $Z \in \Gamma$ par le mot $\beta \in \Gamma^*$. la transition t permet de faire passer l'automate de la configuration (q, α) vers la configuration (q', α') si $\alpha = Z\gamma$, $\alpha' = \beta\gamma$ avec $\gamma \in \Gamma^*$, on notera cette relation entre ces configurations par $(q, \alpha) \xrightarrow{a,Z/\beta} (q', \alpha')$ ou pour raison de

simplicité par $(q, \alpha) \xrightarrow{t} (q', \alpha')$. On dira que deux transitions $t, t' \in T$ sont composables s'ils existent un triplet de configurations $(q_1, \alpha_1), (q_2, \alpha_2), (q_3, \alpha 3)$ tel que: $(q_1, \alpha_1) \xrightarrow{t} (q_2, \alpha_2) \xrightarrow{t'} (q_3, \alpha 3)$, on notera cette composition par tt'.
Notons que l'ensemble des transitions T dans un système à pic est de la forme $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ tel que $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ avec:
T_1: est l'ensemble des transitions croissantes (la restriction de T aux états de K_1 est pile-croissante), i.e., si $t = (q, a, Z, q', \beta) \in T_1$ alors $q, q' \in K_1$ et $|\beta| \geq 1$.
T_2: est l'ensemble des transitions de passage des états K_1 vers les états de K_2. Si $t = (q, a, Z, q', \beta) \in T_2$ dans ce cas $q \in K_1$, $q' \in K_2$ et $|\beta| \leq 1$.
T_3: est l'ensemble des transitions décroissantes (la restriction de T aux états de K_2 est pile -décroissante), i.e, $t = (q, a, Z, q', \beta) \in T_3$ dans ce cas $q, q' \in K_2$ avec $|\beta| \leq 1$.

Calcul
On appelle calcul d'origine $(q_0, \alpha_0) \in K \times \Gamma^+$, toute suite finie ou infinie $c \in T^* \cup T^\omega$

$$(q_0, \alpha_0) \overset{a_1, Z_1/\beta_1}{\longrightarrow} (q_1, \alpha_1) \ldots (q_{n-1}, \alpha_{n-1}) \overset{a_n, Zn/\beta_n}{\longrightarrow} (q_n, \alpha_n) \ldots$$

de transitions composables qu'on notera aussi

$$(q_0, \alpha_0) \xrightarrow{t_1} (q_1, \alpha_1) \ldots (q_{n-1}, \alpha_{n-1}) \xrightarrow{t_n} (q_n, \alpha_n) \ldots$$

Un calcul ou chemin maximal c dans M est
(1). Soit un calcul fini c.à.d. $c = t_1 \ldots t_n \in T^*$ de la forme
$c : (q_0, z_0) \xrightarrow{t_1} (q_1, \alpha_1) \longrightarrow \ldots (q_{i-1}, \alpha_{i-1}) \xrightarrow{t_i} (q_i, \alpha_i) \ldots (q_{n-1}, \alpha_{n-1}) \xrightarrow{t_n} (q_n, \alpha_n)$ avec $\alpha_n = \varepsilon$.
(2). Soit un calcul infini $c = (t_i)_{i \geq 0} \in T^\omega$ d'origine la configuration initiale (q_0, z_0).

Un cycle dans M est un calcul fini $c = t_1 t_2 \ldots t_n t_{n+1}$ tel que $t_{n+1} = t_1$, on notera ce cycle par $t_1 t_2 \ldots t_n$ ce qui revient à dire que le calcul c est de la forme:

$$(q_1, \alpha_1) \overset{a_1, Z_1/\beta_1}{\longrightarrow} (q_2, \alpha_2) \ldots (q_{n-1}, \alpha_{n-1}) \overset{a_{n-1}, Z_{n-1}/\beta_{n-1}}{\longrightarrow} (q_n, \alpha_n)$$

avec $\alpha_n = Z_n \alpha'_n$ et tel que $(q_1, Z_1) = (q_n, Z_n)$.
On désigne par *cycle* (M) l'ensemble de tous les cycles du système M.

Proposition 2. *Soit M un système à pic. Toute sequence de transitions "composables" σ dans M est infinie ssi l'ensemble de toutes les transitions appliquées une infinité de fois dans σ forment un cycle de M. En d'autres termes,*
$\sigma \in T^\omega$, avec σ une séquence infinie composable dans $M \Longleftrightarrow \exists\, \sigma_s \in cycle\,(M)$ tel que $Inf_t\,(\sigma) = \left\{ t_i \ / \ |\sigma_s|_{t_i} \neq 0 \right\}$ avec $Inf_t\,(\sigma) = \{ t \in T \ / \ |\sigma_t| = \omega \}$ est l'ensemble des transitions qui occurent une infinité de fois dans σ.
Preuve:

($\Longleftarrow$): S'il existe $\sigma_s \in cycle\,(M)$ *tel que* $Inf_t\,(\sigma) = \left\{t_i \;/\; |\sigma_s|_{t_i} \neq 0\right\}$ donc nécessairement $\sigma \in T^\omega$ avec σ un calcul dans M.
($\Longrightarrow$): Inversement, soit $\sigma \in T^\omega$ un calcul infini dans M. Comme $|T|$ est fini, il existe donc au moins une transition $t = (q, a, Z, q', Z'\gamma')$ tel que $t \underset{\omega}{\in} \sigma$. La séquence σ peut s'écrire donc sous la forme: $\sigma = \sigma_1 t \sigma_2 t ... \sigma_n t \sigma_{n+1} ...$
Deux cas se présentent:
1[er] **cas**: $|\sigma_i| = 0$ pour tout $i \geq 1$, dans ce cas $\sigma = t^\omega$ et la transition t forme un cycle dans M.
2[eme] **cas**: $\exists\, J \sqsubseteq \mathbb{N}$ tel que: $\forall k \in J$ on a $|\sigma_k| \geq 1$.
On suppose pour simplifier les choses que $\sigma = \sigma_1 t \sigma_2 t ... \sigma_n t \sigma_{n+1} ...$ avec pour tout $i \geq 1$ on a $|\sigma_i| \geq 1$. On pose alors $\sigma_i = \sigma_i' t_i'$ avec $t_i' \in T$. Dans ce cas σ s'écrit $\sigma = \sigma_1' t_1' t \sigma_2' t_2' t .... \sigma_n' t_n' t \sigma_{n+1}' t_{n+1}' t ....$, avec $t_i' = \left(q_i, a_i, Z_i, q_i', Z_i'\gamma_i'\right)$ où pour tout $i \geq 1$ on a nécessairement $\left(q_i', Z_i'\right) = (q, Z)$ pour que t_i' et t soient composables. Comme $(q, Z) \in \inf(c)$ et $|K \times \Gamma|$ est fini donc $\exists\, (q_k, Z_k) \in Inf\,(c)$ et donc $t_k' = \left(q_k, a_k, Z_k, q_k', Z_k'\gamma_k'\right) \in Inf_t\,(\sigma)$. Posons pour simplifier les choses $t_k' = t_1$, on a donc $|\sigma|_{t_1 t} = \omega$. On peut donc écrire σ sous la forme: $\sigma = \sigma_1'' t_1 t \sigma_2'' t_1 t \sigma_3'' t_1 t ... \sigma_n'' t_1 t \sigma_{n+1}'' t_1 t ...$
En poursuivant le même raisonnement, on peut trouver une transition t_2 tel que la séquence $t_2 t_1 t$ occure, après une étape dans le calcul, une infinité de fois dans σ c.à.d, $t_2 t_1 t \underset{\omega}{\subseteq} \sigma$ où le signe " $\underset{\omega}{\subseteq}$"dénote la relation "occure une infinité de fois dans". Finalement, comme $\sigma \in T^\omega$ et $|T|$ est fini il existe donc $\sigma_s = t_k t_{k-1} ... t_1 t$ tel que $\sigma_s \underset{\omega}{\subseteq} \sigma$ avec $\sigma_s \in cycle\,(M)$.
Remarquons aussi que:

$$cycle\,(M) = cycle\,(M\;/T_1) \cup cycle\,(M\;/T_3) \text{ et } cycle\,(M\;/T_1) \cap cycle\,(M\;/T_3) = \emptyset$$

avec $cycle\,(M\;/T_i)$ dénote l'ensemble des cycles de M restreint aux transitions T_i. ■

On s'intéresse à présent à l'extension les notions d'équités évoquées ci-dessus aux systèmes à pic.

Définition 3. *Soit* $\sigma \in T^\infty$ *une séquence de transitions dans une machine à pic de calcul correspondant* $c = \left\{\left(q_i, a_i, Z_i, q_{i+1}, \gamma_{i+1}\gamma_{i+1}'\right)\right\}_{i \geq 0}$ *tel que pour tout* $i \geq 0$, $(q_i, a_i, Z_i, q_{i+1,}\gamma_{i+1})$ *soit une transition dans* T *avec au départ* $\gamma_1' = \varepsilon$. *Alors* σ *est dite:*
(i). $t-$*équitable* $\Longleftrightarrow$ σ *est maximale finie ou bien* $\forall\ (q, Z) \in Inf\,(c)$ *et* $\forall\ t = (q, a, Z, q', \gamma') \in T$ *alors* $t \underset{\omega}{\in} \sigma$.
(ii). $a-$*équitable* $\Longleftrightarrow$ σ *est maximale finie ou bien* $\forall\ (q, Z) \in Inf\,(c)$ *et* $\forall\ t = (q, a, Z, q', \gamma') \in T$ *alors* $\Pi_2\,(t) \underset{\omega}{\in} \Pi_2\,(\sigma)$.
(iii). $m-$*équitable* $\Longleftrightarrow$ σ *est maximale finie ou bien* $\forall\ (q, Z) \in Inf\,(c)$ *et* $\forall p = t_1 t_2 ... t_n \in T^*$ *une séquence finie de transitions d'origine le couple* (q, Z) *(c.à.d la transition* t_1 *démarre à partir de* (q, Z)*) alors on a:* $\Pi_2\,(p) \sqsubset \Pi_2\,(\sigma)$.
(iv). $c-$équitable $\Longleftrightarrow$ σ *est maximale finie ou bien* $\forall\ (q, Z) \in Inf\,(c)$ *et* $\forall p = t_1 t_2 ... t_n \in T^*$ *une séquence finie de transitions d'origine le couple* (q, Z) *(c.à.d la transition* t_1 *démarre à partir de* (q, Z)*) alors on a:* $p \sqsubset \sigma$.

On note par
$L^x(M) = \{w \in \Sigma^\infty / \exists\, \sigma \in T^\infty$ d'origine (q_0, Z_0) $x-$*équitable* avec $\Pi_2(\sigma) = w\}$
le langage $x-$équitable reconnu par M avec $x \in \{t, a, c, m\}$.

A partir des définitions ci-dessus on peut en déduire facilement les résultats suivants:

Lemme 3. *Pour tout système à pic M, on a:*
(i). $L^t(M) \subseteq L^a(M)$.
(ii). $L^c(M) \subseteq L^m(M)$.

Théorème 2. *Pour tout système à pic M, ils existent deux suites finies de langages* $(L_i)_{n\geq i\geq 1}, (K_i)_{n\geq i\geq 1}$ *telles que:*
(i). L_i *est un langage linéaire.*
(ii). R_i *est un* $\omega-$*langage rationnel.*
(iii). $L^t(M) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i R_i$.

Preuve:
Soit $M = (K, \Pi = \{K_1, K_2\}, \Sigma, \Gamma, T, q_0, Z_0)$ un système a pic. Soit $n = |cycle(M\ /T_3)|$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on pose:
$L_i = \left\{x \in \Sigma^* / (q_0, Z_0) \xrightarrow{*} (q_i, \varepsilon, Z_i\gamma) \text{ avec } q_i \in K_2\right\}$
et $R_i = L^t(M_i)$ avec $M_i = (K_i, \Sigma, \Gamma_i, T_i, q_i, Z_i)$ un sous-automate de M tels que :
a). $T_i \in cycle(M\ /T_3)$.
b). $\forall (q, Z) \in K_i \times \Gamma_i$ tel que $\exists\, t \in T_i$ applicable à (q, Z) et $\forall\, \sigma' \in T^+$ tel que:
$\sigma' : (q, Z\gamma) \xrightarrow{*} (q', Z'\gamma)$ alors $T_i = \{t\ /\ |\sigma'|_t \neq \emptyset\}$ et $q\prime \in K_i$, $Z' \in \Gamma_i$. On a $R_i = L^t(M_i) =$

$$\{y \in \Sigma^\omega\ /\ \exists\, \sigma \in T^\omega \text{ partant de } (q_i, Z_i) \text{ t.q.} y = \Pi_2(\sigma) \text{ et } Inf_t(\sigma) = T_i\}.$$

I. Soit $w \in L^t(M) \Leftrightarrow \exists\, \sigma \in T^\omega$ partant de (q_0, Z_0) $t-$*équitable* de calcul correspondant $c = \left\{\left(q_i, a_i, Z_i, q_{i+1}\gamma_{i+1}\gamma'_{i+1}\right)\right\}_{i\geq 0}$ tel que $\Pi_2(\sigma) = w$. Comme $\sigma \in T^\omega \Leftrightarrow T_i = \{t \in T\ /\ \inf_t(\sigma) = \omega\} \in cycle(M)$. Soit $M_i = (K_i, \Sigma, \Gamma, T_i, q_i, Z_i)$ le sous automate de M qui correspond au cycle T_i tels que:
1). $K_i = \{q \in K_2\ /\ \exists\, Z \in \Gamma \text{ tel que } (q, Z) \in \inf(c)\}$.
2). $\Gamma_i = \{Z \in \Gamma\ /\ \exists q \in K_2 \text{ tel que } (q, Z) \in \inf(c)\}$.
3). $(q_i, Z_i) \in \inf(c)$.

II. Pour montrer que:
a). L_i est un langage linéaire, il suffit de remarquer qu'on peut construire un automate à pic déduit de M, qui vide sa pile dès la rencontre de l'état q_i et le symbole Z_i en haut de la pile.
b). K_i est un ω-langage rationnel car M_i est automate à pic qui se comporte comme un automate fini tel que toutes ses transitions sont répétées, et en vertu du résultat dans [5] , on sait qu'un T-automate de Muller est équivalent à un automate de Muller (notons que dans un $T-$automate de Muller on distingue les transitions au lieu des états), et donc le langage accepté est un rationnel de mots infinis.
Inversement, on a $\bigcup_{i=1}^{n} L_iR_i \subset L^t(M)$. En effet, soit $w \in \bigcup_{i=1}^{n} L_iR_i \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, ..., n\}$ tel que $w \in L_iR_i$, et par suite $w = w_1w_2$ avec $w_1 \in L_i$ et $w_2 \in R_i$.
$w_1 \in L_i \Leftrightarrow \exists\, \sigma_1 \in T^*$ tel que $\sigma_1 : (q_0, w_1, Z_0) \xrightarrow{*} (q_i\ ,\ \varepsilon, Z_i\gamma)$ avec $q_i \in K_2$.
$w_2 \in R_i \Leftrightarrow \exists\, \sigma_2 \in T^\omega$ partant de (q_i, Z_i) avec $w_2 = \Pi_2(\sigma)$. Il évident que $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ est un calcul de M t-équitable et par suite $w \in L^t(M)$. ■

Pour la $a-$équité on a aussi,

Théorème 3. *Soit M un système à pic, ils existent alors deux suites finies de langages $(L_i)_{i=1,...,n}, (K_i)_{i=1,...,n}$ telles que:*
(i). L_i est un langage linéaire.
(ii). K_i est un $\omega-$langage rationnel.
(iii). $L^a(M) = \bigcup_{i=1}^{n} L_iK_i$.

Remarque:

Pour la recherche des cycles, vérifiant les conditions de la $t-$équité (resp. la $a-$équité), dans un automate à pic $M = (K, \Pi = \{K_1, K_2\}, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0)$ où $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ avec $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$, on applique respectivement l'algorithme de Tarjan de recherche des cycles dans un graphe (resp. l'algorithme de L. Priese et al. [10] au graphe $G = (K', T')$ tel que :
$T' = \{((q, Z), a, (q', Z'))\ /\ t = (q, a, Z, q', Z') \in T_3\}$,
et $K' = \{(q, Z) \in K_2 \times \Gamma /\ \exists\, t \in T_3$ avec $t = (q, a, Z, q', Z')$ ou $t = (q', a, Z', q, Z)\}$.

La proposition 1 établissant l'équivalence entre la a-équité et la t-équité se généralise sans peine sur les automates à pic, ceci est dû au fait que les automates à pic se comportent, sur les mots infinis à partir d'un certain rang, comme les automates finis voir [7].

Théorème 4. *Pour tout automate à pic M, il existe un automate à pic M' tel que $L^a(M) = L^t(M')$.*
Preuve:

Soient $H = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$ l'ensemble des sous automates de M vérifiant la condition de la a-équité, on les appelles par abus de langage sous automates a-équitables. Pour tout $i = 1, ..., n$, on pose $M_i = (K_i, \Sigma, \Gamma_i, T_i, q_i, Z_i)$. Pour chaque automate M_i, on construit une copie $\bar{M_i}$ avec $\bar{M_i} = \left(\bar{K_i}, \Sigma, \Gamma_i, \bar{T_i}, \bar{q_i}, Z_i\right)$ tels que:

$\bar{K_i} = \{\bar{q}/\ q \in K_i\}$.et $\bar{T_i} = \left\{ \left(\bar{q}, a, Z, \bar{q}', Z'\right)\ /\ (q, a, Z, q', Z') \in T_i \right\}$.
Posons $M' = (K', \Sigma, \Gamma', T', q_0, Z_0')$ tel que:
$q_0' = q_0, Z_0' = Z_0, \Gamma' = \Gamma$ et $T' = T \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bar{T_i} \cup \{(q_i, \varepsilon, Z_i, \bar{q_i}, Z_i)\}$.
On a bien $L^a(M) = L^t(M')$. En effet, soit $w \in L^a(M) \Rightarrow$ il existe un sous automate M_i de M $a-$équitable tel que $w \in L_i L^a(M_i)$ avec,

$$L_i = \left\{ x \in \Sigma^* /\ (q_0, x, Z_0) \xrightarrow{*} (q_i,\ \varepsilon, Z_i\gamma) \right\}$$

et

$$L^a(M_i) = \left\{ \begin{array}{c} y \in \Sigma^\omega\ /\ \exists\, \sigma \in T_i^\omega \textit{ a-équitable} \text{ partant de } (q_i, Z_i) \\ \text{t.q. } \Pi_2(\sigma) = y \end{array} \right\}.$$

Comme $Inf_t(\sigma) = T_i$ et $\bar{M_i}$ est la copie de M_i dans $\bar{M}$ comme sous automate t-équitable, on obtient donc $w \in L_i' L^t\left(\bar{M_i}\right)$ avec :
$L_i' = \left\{ x \in \Sigma^*\ /\ (q_0, x, Z_0) \xrightarrow{*} (\bar{q_i}, \varepsilon, Z_i\gamma) \right\}$un langage de $\bar{M}$
et $L^t\left(\bar{M_i}\right) = \left\{ \begin{array}{c} y \in \Sigma^\omega\ /\ \exists\, \sigma' \in \bar{T_i}^\omega \text{ partant de } (\bar{q_i}, Z_i) \\ \text{t.q. } Inf(\sigma') = \bar{T_i} \text{ et } \Pi_2(\sigma) = y \end{array} \right\}$,
ceci montre bien qu'on a $L^a(M) \subseteq L^t\left(\bar{M}\right)$. Inversement, montrons qu'on a $L^t\left(\bar{M}\right) \subseteq L^a(M)$. Soit $w \in L^t\left(\bar{M}\right) \Rightarrow$il existe un sous automate M_i de $\bar{M}$ $t-$*équitable* tel que: $w \in L_i' L^t(M_i)$ avec,
$L_i' = \left\{ x \in \Sigma^* /\ (q_0, x, Z_0) \xrightarrow{*} (q_i,\ \varepsilon, Z_i\gamma) \right\}$
et $L^t\left(\bar{M_i}\right) = \left\{ \begin{array}{c} y \in \Sigma^\omega\ /\ \exists\, \sigma' \in \bar{T_i}^\omega \textit{ t-équitable} \text{ partant de } (\bar{q_i} Z_i) \\ \text{t.q. } \Pi_2(\sigma') = y \text{ et } Inf(\sigma') = \bar{T_i} \end{array} \right\}$.
Comme tout sous automate fini $t-$équitable est aussi $a-$équitable on a aussi $w \in L_i' L^a\left(\bar{M_i}\right)$ avec $\bar{M_i}$ est la copie d'un sous automate M_i de M (par construction), d'où $w \in L^a(M)$. ■

5 Grammaires linéaires et équités

On s'intéresse à présent à l'équité sur les grammaires linéaires. Dans [3], N.Francez et al. ont définis une équité, qu'on appelle $F-$équité, sur les grammaires algébriques. Ces auteurs ont montrés qu'une grammaire algébrique est $F-$équitable ssi elle n'est pas expansive. Notre objectif est de montrer un résultat similaire pour les grammaires linéaires et bilinéaires.

Définition 4. *Soit $d = (\beta_i)_{i \geq 0}$ une dérivation dans une grammaire algébrique $G = (V, \Sigma, P, S)$ telle que: (i). $\beta_0 = S$., (ii). $\beta_i \Longrightarrow \beta_{i+1}$.*
La dérivation d est dite $F-$équitable ssi:
(i). d est finie (c.à.d il existe un j tel que $\beta_j \in \Sigma^*$)
ou bien

(ii). d est infinie et chaque règle $A \to \alpha$ qui est applicable infiniment souvent est appliquée infiniment souvent dans d.

Définition 5. *Une grammaire algébrique est $F-$équitable ssi toutes ses dérivations $F-$équitables sont finis.*

Exemple 2.
Soit la grammaire G : (1). $S \longrightarrow aSb$, (2). $S \longrightarrow \varepsilon$.
Comme toutes les dérivations de G sont de la forme xSy avec $x, y \in \Sigma^*$, il suffit d'appliquer une seule fois la règle $S \longrightarrow \varepsilon$ pour que la dérivation se termine. La seule dérivation infinie $\delta : S \xrightarrow{1} aSb \xrightarrow{1} a^2Sb^2 \xrightarrow{1} ... \xrightarrow{1} a^iSb^i \longrightarrow ...$, est non équitable car la règle $S \longrightarrow \varepsilon$ qui est applicable infiniment souvent n'est pas appliquée infiniment souvent.

Lemme 4. *Toute grammaire linéaire réduite est $F-$équitable.*
Preuve:
Soit $G = (V, \Sigma, P, S)$ une grammaire linéaire réduite c.à.d $\forall\ A \in V$, (i). $\exists\ x \in \Sigma^*$ t.q. $A \overset{*}{\Longrightarrow} x$, (ii). $S \overset{*}{\Longrightarrow} \alpha A \beta$. Supposons qu'il existe une dérivation infinie F-équitable. Soit d une telle dérivation. Comme d est infinie et $|V|$ fini, il existe donc au moins une variable qui est réécrite une infinité de fois dans d. Soit $A \in V$ une telle variable, alors d est de la forme

$$d : S \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_1 A \beta_1 \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_2 A \beta_2 \overset{*}{\Longrightarrow} ... \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_i A \beta_i ...,$$

avec pour tout $i \geq 1$, γ_i ,$\beta_i \in \Sigma^*$.
Soit $R(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ l'ensemble des membres droits des règles $A \to \alpha_i$. On note par r_i la règle numéro i de la variable A c.à.d $A \to \alpha_i = x_i B_i y_i$ tels que $x_i, y_i \in \Sigma^*$ et $B_i \in V$.
Comme d est infinie et $F-$équitable donc $Inf_r(d) \sqsupseteq \{r_1, r_2, ..., r_n\}$ où $Inf_r(d)$ dénote l'ensemble des règles appliquées une infinité de fois dans la dérivation d. On suppose que toutes les règles ayant A comme membre gauche ne sont pas terminales i.e, différentes de la forme: $A \to \alpha$ avec $\alpha \in \Sigma^*$ sinon l'équité force l'application de l'une de ses règles et comme G est linéaire la dérivation termine. Soit $r_i : A \to \alpha_i = x_i B_i y_i \in R(A)$ donc $r_i \in Inf_r(d)$ ce qui implique que la variable B_i apparaît aussi une infinité de fois dans d, et donc $Inf_r(d) \sqsupseteq R(B_i)$. Supposons que toutes les règles ayant B_i comme membre gauche ne sont pas terminales. Comme $B_i, A \in Inf_V(d)$, où $Inf_V(d)$ dénote l'ensemble des variables réécrite une infinité de fois dans d , et B_i est accessible à partir de A donc nécessairement on a aussi l'accessibilité de A à partir de B_i. Pour simplifier le raisonnement, on suppose que la dérivation d est de la forme

$$d : S \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_1 A \beta_1 \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_2 B_i \beta_2 \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_3 A \beta_3 ... \gamma_i A \beta_i \overset{*}{\Longrightarrow} \gamma_{i+1} B_i \beta_{i+1} ...,$$

avec pour tout $i \geq 1$ $\gamma_i, \beta_i \in \Sigma^*$. L'hypothèse qu'une telle dérivation infinie équitable puisse exister est en contradiction avec le fait que la variable S est engendrante et donc nécessairement la dérivation d termine par application d'une règle de la forme $B \longrightarrow \gamma$, ($B \in V$ et $\gamma \in \Sigma^*$). ■

Définition 6. *Une grammaire algébrique* $G = (V, \Sigma, P, S)$ *est dite expansive si et seulement si il existe une variable* $A \in V$ *tel que:* $A \overset{*}{\Longrightarrow} \beta_1 A \beta_2 A \beta_3$ *avec* $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in (V \cup \Sigma)^*$, *en d'autres mots* A *est une variable accessible de l'axiome* S *et qui dédouble dans une forme sententielle.*

Théorème 5. *Une grammaire algébrique* $G = (V, \Sigma, P, S)$ *est F-équitable ssi elle n'est pas expansive.*

Exemple 3.

Considérons la grammaire algébrique G : $(1)\ S \longrightarrow aSSb, (2)\ S \longrightarrow b.$
G n'est pas F-équitable car elle admet une dérivation infinie équitable qui est:

$$d : S \overset{1}{\Longrightarrow} aSSb \overset{2}{\Longrightarrow} abSb \overset{1}{\Longrightarrow} abaSSbb \overset{2}{\Longrightarrow} ababSbb \Longrightarrow ...$$

la dérivation d est F-équitable car les règles (1) et (2) sont applicables et appliquées une infinité de fois. La grammaire G n'est pas F-équitable car elle est expansive. Par contre, la grammaire G' : $S \longrightarrow ST$, $S \longrightarrow ab$, $S \longrightarrow a$, $T \longrightarrow Tb$, $T \longrightarrow b$ est F-équitable car non expansive.

Corollaire *Toute grammaire* 2*-linéaire réduite est F-équitable.*
Preuve:

Il suffit de remarquer qu'une grammaire linéaire n'est jamais expansive et donc d'après le théorème 5, on en déduit le résultat. ∎

On s'intéresse à présent à l'application de cette notion d'équité aux calculs dans un automate à pic.

Définition 7. *On dira que la séquence de transitions* $\sigma \in T^\infty$, *(*$T^\infty = T^* \cup T^\omega$*), de calcul correspondant* $c = \left\{ \left(q_i, a_i, Z_i, q_{i+1}, \gamma_{i+1}\gamma'_{i+1} \right) \right\}_{i \geq 0}$ *est F-équitable si et seulement si:*
1). Le calcul c est maximal fini, ou bien
2). Le calcul c est infini et $\forall\ (q, Z) \in \inf(c)$ *et* $\forall\ t \in T$ *applicable à* (q, Z) *alors* $t \underset{\omega}{\in} \sigma$.

Définition 9. *On dira que l'automate à pic* $M = (K, \Pi = \{K_1, K_2\}, \Sigma, \Gamma, T, q_0, z_0)$ *est F-équitable ssi toutes ses calculs F-équitable sont finis.*

Lemme 5. *Tout automate à Pic M réduit avec le mode de reconnaissance par pile vide est F-équitable.*
Preuve:

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe un calcul $\sigma \in T^\omega$ dans M qui soit F-équitable et qui ne termine pas. D'après la proposition 2, il existe $\sigma_s \in$ *cycle* (M) tel que $\sigma_s \underset{\omega}{\subseteq} \sigma$.
Deux cas sont possibles:
1^{er} cas: $\sigma_s \in T_1^*$, ce cas ne peut se présenter, car il n'y a pas un calcul infini dans M qui applique une infinité fois au moins une transition de T_1 et qui mène vers une situation où la pile est vide, la fonction de transition n'est pas définie de K_1 vers K_2.

$2^{ème}$ cas: $\sigma_s \in T_3^*$. Tout calcul réussi qui mène vers une situation où la pile est vide est évidemment F-équitable.

Par contre la situation est différente si on considère les automates à pic qui reconnaissent par états terminals. Pour ce type d'automates, on peut appliquer les notions d'équités concernant les calculs infinis, similaire à celles présentés dans la section 4. ■

6 Remerciements

L'auteur remercie l'éditeur en chef et les référées pour leurs appréciables remarques et suggestions.

References

[1] A. Arnold et M. Nivat, "Comportements de processus", Colloque AFCET, les mathématiques de l'informatique, Paris(1982), pp35-68.

[2] L. Boasson et M. Nivat, "Adherences of languages", JCSS 20, (1980) pp 285-309.

[3] N. Francez et al., "Fair derivation in context free grammars", Inf. and control, vol 55 (1982), pp 108-116.

[4] S. Ginsburg et E. Spanier, "Finit-turn pushdown automata", SIAM J. on control, 4(1966), pp 423-434.

[5] I. Guessarian et W. Niar, "Fairness and regularity for SCCS processus", RAIRO Inf. theor., vol 23 n°1 (1989), pp 59-86.

[6] D. Lehmann, A. Pnuelli, J. Stavi, "Impartiality, justice and fairness; the ethics of concurrent termination", LNCS 115, Springer verlag, Berlin(1981).

[7] D. Mihoubi, Characterization and closure properties of linear ω-languages, Theoretical Computer Science,191, pp. 79-95, Elsevier Science (1998), The Netherlands.

[8] D. Mihoubi, Modes de reconnaissance et equités dans les ω-automates à pic, Thèse de Doctorat, Université Paris Nord (1989).

[9] M.Nivat, "Behaviors of synchronised systems of processes", Rapport LITP, Univ. Paris7 (1981).

[10] L. Priese, R. Rehrmann, U. Willecke-Klemme. "Some results on Fairness: the regular case", TCS, vol 54 n°2 (1987), pp139-163.

[11] J. Queille et J. Sifakis, "Fairness and related properties in transition systems: a time logic to deal with fairness", Acta informatica, vol 19 fasc. 3 (1983), pp 195-220.

LMPA, département de Mathématiques,
Université de M'sila, 28000 M'sila, Algérie.
E-mail: mihoubi_douadi@yahoo.fr