

# Méthode numérique pour la décroissance de l'énergie d'un réseau de cordes

Kaïs Ammari

Mohamed Jellouli

## Abstract

In this paper we give a numerical method for the study of the decay of the energy of a network of strings. This method is based on a theoretical and numerical construction of some operator say of type  $\mathcal{T}$  by the D'Alembert formula. Moreover we give some illustrations of this method.

## Résumé

Dans cet article on présente une méthode numérique pour étudier la décroissance de l'énergie d'un réseau des cordes. Une telle méthode est basée sur la construction, théorique et numérique des opérateurs de type  $\mathcal{T}$ , par la formule de D'Alembert. On donnera à la fin quelques exemples d'applications.

## 1 Introduction

L'étude de la décroissance de l'énergie globale de la solution de l'équation des ondes sur un arbre soumise à une condition de dissipation a fait l'objet de plusieurs travaux dont on peut citer [1]-[8] et [10].

Dans ce travail on s'intéresse à l'étude numérique de la fonction énergie d'un arbre générique  $\mathcal{AG}$  formé de trois cordes de longueurs  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ .

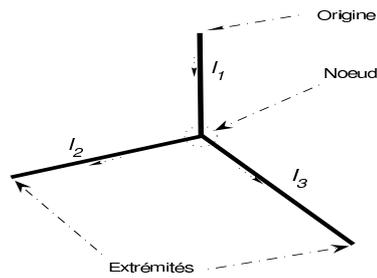
---

Received by the editors January 2009 - In revised form in February 2009.

Communicated by A. Bultheel.

2000 *Mathematics Subject Classification* : Primary: 35B37, 35B40, 35L05; Secondary: 35B35.

*Key words and phrases* : Network of strings, Decay energy, Operator of type  $\mathcal{T}$ , D'Alembert Formula.



Chaque corde  $l_j$  est soumise à des vibrations transversales  $u_j$ .

Ce mouvement vibratoire est décrit par le système d'équations des ondes :

$$\partial_t^2 u_j(x, t) - c_j^2 \partial_x^2 u_j(x, t) = 0, \quad \forall x \in ]0, l_j[ \text{ et } \forall t > 0; \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Au noeud (interne) on considère les conditions de continuité  $u_1(l_1, t) = u_j(0, t)$ ,  $j \in \{2, 3\}$  et d'équilibre des forces (loi de Kirchoff),  $c_1^2 \partial_x u_1(l_1, t) = \sum_{j=2}^3 c_j^2 \partial_x u_j(0, t)$ .

On suppose que les extrémités (externes) de  $l_2$  et  $l_3$  sont fixées, ce qui se traduit par les conditions de Dirichlet homogènes,  $u_j(l_j, t) = 0, j \in \{2, 3\}$ . Quand à l'origine de  $l_1$  nous mettons une condition de dissipation (voir [6]) du type :

$$c_1^2 \partial_x u_1(0, t) = \alpha \partial_t u_1(0, t), \quad \forall t \geq 0,$$

$\alpha$  étant un nombre réel positif donné.

Enfin les données initiales sont :

$$u_j(x, 0) = a_j(x) \text{ et } \partial_t u_j(x, 0) = b_j(x), \quad \forall x \in [0, l_j], \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Notre étude numérique repose en fait sur les opérateurs dits de type  $\mathcal{T}$  introduits dans [1]. Ces opérateurs permettent d'exprimer théoriquement et numériquement l'énergie totale du système (notée  $E_u$ ) en fonction de ces données sans passer par les méthodes classiques de discrétisations.

Pour alléger la présentation de cet article, nous avons choisi de réduire l'étude sur un arbre générique. Le cas général ne présente aucune difficulté majeure (voir formule de récurrence dans [1]).

Le plan de cet article est comme suit. Dans la première section, nous rappelons la notion des opérateurs de type  $\mathcal{T}$  et leurs actions sur les espaces  $L^p(0, T)$ . Nous montrerons aussi quelques propriétés des perturbations qui justifieront les approximations dans les programmations sur MATLAB.

Les opérateurs notés  $\mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^\pm$  et  $\mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^\pm$  seront définis dans ce premier paragraphe ainsi que leurs propriétés.

La deuxième section sera consacrée aux applications : nous exprimerons les valeurs  $\partial_t u(0, t)$  et  $\partial_x u(l, t)$  dans le cas d'une tige avec des conditions mixtes (de dissipation en 0 et de Dirichlet non homogène en  $l$ ) et les valeurs  $\partial_x u(0, t)$  et  $\partial_x u(l, t)$  dans le cas d'une tige avec les conditions de Dirichlet non homogènes. Ces deux configurations permettront d'exprimer l'énergie de la solution du système de

l'arbre générique en fonction de ces données initiales, ce qui fera l'objet du Théorème 1.

La construction numérique des opérateurs de type  $\mathcal{T}$  (en particulier l'inverse et la composée) demandera la vérification de ce qu'on appellera *une propriété de saturation*. Cette propriété permettra dans la troisième section de décrire l'opérateur tronqué

$$\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$$

par une forme matricielle

$$M(k, q) = \begin{cases} \gamma(R(k, q)) & \text{si } R(k, q) > 0 \\ 0 & \text{si } R(k, q) = 0 \end{cases}$$

et de montrer le Théorème 3.

Dans la dernière section nous donnerons deux illustrations numériques telles que le cas d'une tige soumise à une condition de dissipation à une extrémité et à une source  $k(t)$  à l'autre et le cas de l'arbre générique avec les données initiales

$$a_1 \equiv 0, a_2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{l_2}x\right), a_3 \equiv 0, \text{ et } b_k \equiv 0, k = 1, 2, 3.$$

## 2 Opérateurs de type $\tau$

Dans cette section, nous allons rappeler les opérateurs de type  $\mathcal{T}$  et montrer quelques propriétés.

**Définition 1.** Soient  $m = (m(j))_{j \geq 1}$  une suite réelle strictement croissante vérifiant  $m(1) = 0$  et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} m(j) = +\infty$  et  $\gamma = (\gamma(j))_{j \geq 1}$  une suite de nombres réels (ou complexes).

1. On définit l'opérateur  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  par

$$\mathcal{P}_{(m, \gamma)} f(t) = \sum_{j=1}^q \gamma(j) f(t - m(j)), \text{ p.p. } t \in ]m(q), m(q+1)[,$$

$$\forall f \in L^p(0, +\infty), p \in [1, +\infty], \text{ et } \forall q \geq 1$$

et on dit que  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  est un opérateur de type  $\mathcal{T}$ . On notera souvent  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)} \equiv (m, \gamma)$ . Le nombre  $\gamma(1)$  s'appelle le coefficient de  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  et sera noté  $\text{coeff}_{(m, \gamma)} \mathcal{P}$ .

2. Soit  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  et  $T > 0$ , on appelle troncature de  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}$  sur  $(0, T)$ , l'opérateur noté  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}^T$  caractérisé par les suites

$$m(1) = 0 < m(2) < \dots < m(L) \leq T$$

$$\alpha(1), \dots, \alpha(L-1) \text{ si } m(L) = T \text{ ou } \alpha(1), \dots, \alpha(L) \text{ si } m(L) < T.$$

Quitte à changer l'indexation, on peut supposer que  $\mathcal{P}_{(m, \gamma)}^T$  est défini par

$$m(1) = 0 < m(2) < \dots < m(L) = T \text{ et } \alpha(1), \dots, \alpha(L-1).$$

On adoptera aussi la notation  $\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$ .

**Proposition 1.** (voir [1])

1. L'ensemble des opérateurs de type  $\mathcal{T}$  est stable par addition, par composition et par multiplication par un scalaire.
2. Un opérateur  $\mathcal{P}$  de type  $\mathcal{T}$  est inversible si et seulement si  $\text{coeff}\mathcal{P} \neq 0$  et dans ce cas  $\mathcal{P}^{-1}$  est de type  $\mathcal{T}$ .
3. Si  $\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  et  $f \in L^p(0, T)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ), alors  $\mathcal{P}^T f \in L^p(0, T)$  et

$$\|\mathcal{P}^T f\|_{L^p(0, T)} \leq (L-1)^{1/p} \|\gamma\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p(0, T)}$$

où  $p'$  est le conjugué de  $p$ .

**Proposition 2.** Soit  $P^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \min_{1 \leq j \leq L-1} (m(j+1) - m(j))$ ,  $j_0 \in \{2, \dots, L-1\}$ ,  $m_{\varepsilon, j_0}$  la suite définie par

$$m_{\varepsilon, j_0} : \begin{cases} m_{\varepsilon, j_0}(j) = m(j) & \text{si } j \neq j_0 \\ m_{\varepsilon, j_0}(j_0) = m(j_0) + \varepsilon & \text{si } j = j_0 \end{cases}$$

et  $P_{\varepsilon, j_0}^T \equiv \left( m^{\varepsilon, j_0}, (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$ .

1. Si  $f \in L^p(0, T)$ , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(P^T - P_{\varepsilon, j_0}^T)f\|_{L^p} = 0.$$

2. Pour tout  $f \in C^\mu([0, T])$  ( $\mu \in ]0, 1[$ ), on a

$$\|(P^T - P_{\varepsilon, j_0}^T)f\|_{L^p} \leq |\alpha(j_0)| (\varepsilon + T\varepsilon^{p\mu})^{\frac{1}{p}} \|f\|_{C^\mu}.$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon, j_0}^T f(t) &= (P^T - P_{\varepsilon, j_0}^T)f(t) \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad p.p. t \in ]0, m(j_0)[ \\ \alpha(j_0)f(t - m(j_0)) & , \quad p.p. t \in ]m(j_0), m_{\varepsilon, j_0}(j_0)[ \\ \alpha(j_0)(f(t - m(j_0)) - f(t - m_{\varepsilon, j_0}(j_0))) & , \quad p.p. m_{\varepsilon, j_0}(j_0) < t < m(L). \end{cases} \end{aligned}$$

1. Si  $f \in L^p(0, T)$ , alors

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon, j_0}^T f\|_{L^p(0, T)}^p &= |\alpha(j_0)|^p \left( \int_{m(j_0)}^{m_{\varepsilon, j_0}(j_0)} |f(t - m(j_0))|^p dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{m_{\varepsilon, j_0}(j_0)}^T |f(t - m(j_0)) - f(t - m_{\varepsilon, j_0}(j_0))|^p dt \right) \\ &\leq |\alpha(j_0)|^p \left( \int_0^\varepsilon |f(t)|^p dt + \int_0^T |f(t + \varepsilon) - f(t)|^p dt \right) \\ &= |\alpha(j_0)|^p \left( \int_0^\varepsilon |f(t)|^p dt + \|\tau_{-\varepsilon} f - f\|_{L^p(0, T)}^p \right). \end{aligned}$$

2. Si  $f \in \mathcal{C}^\mu([0, T])$ , alors

$$\begin{aligned} \|R_{\varepsilon, j_0}^T f\|_{L^p(0, T)}^p &\leq |\alpha(j_0)|^p \left( \int_0^\varepsilon |f(t)|^p dt + \int_0^T |f(t + \varepsilon) - f(t)|^p dt \right) \\ &\leq |\alpha(j_0)|^p \left( \|f\|_\infty^p \varepsilon + T [f]_\mu^p \varepsilon^{p\mu} \right) \\ &\leq |\alpha(j_0)|^p (\varepsilon + T \varepsilon^{p\mu}) \|f\|_{\mathcal{C}^\mu}^p. \end{aligned}$$

Avant de donner des exemples d'applications, nous allons introduire d'autres opérateurs notés  $\mathcal{L}^\pm$  et  $\mathcal{S}^\pm$  et donner quelques propriétés.

**Définition 2.** Soient  $l, c$  deux réels strictement positifs et  $\beta \in \mathbb{R}$ . On définit les opérateurs

$$\mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^\pm g(t) = \begin{cases} \beta^q g(ct - 2ql) & \text{si } 2q\frac{l}{c} < t < (2q + 1)\frac{l}{c} \\ \pm \beta^q g((2q + 2)l - ct) & \text{si } (2q + 1)\frac{l}{c} < t < (2q + 2)\frac{l}{c} \end{cases} ; q \in \mathbb{N}$$

et

$$\mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^\pm g(t) = \begin{cases} \pm \beta^q g((2q + 1)l - ct) & \text{si } 2q\frac{l}{c} < t < (2q + 1)\frac{l}{c} \\ \beta^{q+1} g(ct - (2q + 1)l) & \text{si } (2q + 1)\frac{l}{c} < t < (2q + 2)\frac{l}{c} \end{cases} ; q \in \mathbb{N}$$

ou encore si on note par

$$\kappa_1(l, c, t) = \frac{l}{\pi} \arccos \left( \cos \left( \frac{\pi c}{l} t \right) \right) \text{ et } \kappa_2(l, c, t) = \frac{2l}{\pi} \left| \arcsin \left( \cos \left( \frac{\pi c}{2l} t \right) \right) \right|$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^+ g(t) &= \beta^{\left[\frac{ct}{2l}\right]} g(\kappa_1(l, c, t)) \\ \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^- g(t) &= (-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]} \beta^{\left[\frac{ct}{2l}\right]} g(\kappa_1(l, c, t)) = (-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]} \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^+(g)(t) \\ \mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^+ g(t) &= \beta^{\frac{1 - (-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]}}{2} + \left[\frac{ct}{2l}\right]} g(\kappa_2(l, c, t)) \\ \mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^- g(t) &= -(-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]} \beta^{\frac{1 - (-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]}}{2} + \left[\frac{ct}{2l}\right]} g(\kappa_2(l, c, t)) = -(-1)^{\left[\frac{ct}{l}\right]} \mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^+(g)(t). \end{aligned}$$

**Proposition 3.** Soit  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $u$  et  $v \in L^2(0, l)$ , alors

1. Avec la convention  $0^0 = 1$ , on a pour tout  $q \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{2q\frac{l}{c}}^{(2q+2)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^+(u)(t) \pm \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^-(v)(t) \right|^2 dt = \frac{2\beta^{2q}}{c} \left( \|u\|_{L^2(0, l)}^2 + \|v\|_{L^2(0, l)}^2 \right).$$

2. Si  $\beta^2 \in [0, 1[$ , alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left\| \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^\pm u \right\|_{L^2(0, T)}^2 = \frac{2}{c(1 - \beta^2)} \|u\|_{L^2(0, l)}^2.$$

3. Si  $\beta^2 = 1$ , alors

$$\left\| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u \right\|_{L^2(0,T)}^2 \underset{T \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{T}{l} \|u\|_{L^2(0,l)}^2.$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_{2q\frac{l}{c}}^{(2q+2)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^+ u(t) \pm \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^- v(t) \right|^2 dt = \\ & \beta^{2q} \int_{2q\frac{l}{c}}^{(2q+1)\frac{l}{c}} \left| u(ct - 2ql) \pm v(ct - 2ql) \right|^2 dt + \\ & \beta^{2q} \int_{(2q+1)\frac{l}{c}}^{(2q+2)\frac{l}{c}} \left| u((2q+2)l - ct) \mp v((2q+2)l - ct) \right|^2 dt \\ & = \frac{\beta^{2q}}{c} \int_0^l \left( |u(t) \pm v(t)|^2 + |u(t) \mp v(t)|^2 \right) dt = \frac{2\beta^{2q}}{c} \left( \|u\|_{L^2(0,l)}^2 + \|v\|_{L^2(0,l)}^2 \right). \end{aligned}$$

2. et 3. Pour  $q \in \mathbb{N}$ , et  $\beta \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{2q\frac{l}{c}}^{(2q+1)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u(t) \right|^2 dt = \int_{(2q+1)\frac{l}{c}}^{(2q+2)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u(t) \right|^2 dt = \frac{1}{c} \beta^{2q} \|u\|_{L^2(0,l)}^2.$$

$$\int_{2q\frac{l}{c}}^{(2q+1)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{S}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u(t) \right|^2 dt = \frac{1}{c} \beta^{2q} \|u\|_{L^2(0,l)}^2$$

et

$$\int_{(2q+1)\frac{l}{c}}^{(2q+2)\frac{l}{c}} \left| \mathcal{S}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u(t) \right|^2 dt = \frac{1}{c} \beta^{2q+2} \|u\|_{L^2(0,l)}^2.$$

On désigne par  $N(T) := \left\lfloor \frac{cT}{l} \right\rfloor$ .

Dans le cas où  $\beta^2 \in [0, 1[$  si  $N(T)$  est pair, alors

$$\frac{2}{c} \frac{1 - \beta^{N(T)}}{1 - \beta^2} \|u\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \left\| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u \right\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \frac{1}{c} \left( 2 \frac{1 - \beta^{N(T)}}{1 - \beta^2} + \beta^{N(T)} \right) \|u\|_{L^2(0,l)}^2$$

et si  $N(T)$  est impair, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left( 2 \frac{1 - \beta^{N(T)-1}}{1 - \beta^2} + \beta^{N(T)-1} \right) \|u\|_{L^2(0,l)}^2 & \leq \left\| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u \right\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \\ & \frac{2}{c} \frac{1 - \beta^{N(T)+1}}{1 - \beta^2} \|u\|_{L^2(0,l)}^2. \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\beta^2 = 1$ , on a

$$\frac{1}{c} \left\lceil \frac{cT}{l} \right\rceil \|u\|_{L^2(0,l)}^2 \leq \left\| \mathcal{L}_{(\beta,l,c)}^{\pm} u \right\|_{L^2(0,T)}^2 \leq \frac{1}{c} \left( 1 + \left\lceil \frac{cT}{l} \right\rceil \right) \|u\|_{L^2(0,l)}^2.$$

### 3 Applications

Dans cette section nous allons appliquer ces opérateurs à l'équation des ondes 1D pour des différentes données aux extrémités.

Les démonstrations des Propositions 4 et 5 suivantes sont analogues à celle du Théorème 2.2 dans [1].

**Proposition 4.** Soient  $k \in H^1_{loc}(0, +\infty)$ ,  $a \in H^2(0, l)$ ,  $b \in H^1(0, l)$ ,  $\alpha \geq 0$  et  $c > 0$  tels que  $c^2 a'(0) = \alpha b(0)$  et  $k(0) = a(l)$ . On considère le problème

$$(P_1) : \begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0 & , \quad \forall x \in ]0, l[ \text{ et } \forall t > 0 \\ c^2 \partial_x u(0, t) = \alpha \partial_t u(0, t) \text{ et } u(l, t) = k(t) & , \quad \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = a(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = b(x) & , \quad \forall x \in [0, l] \end{cases}$$

alors

$$\partial_t u(0, t) = \frac{2c}{\alpha + c} \mathcal{P}_{\left(m^1_{(l,c)}, \gamma^1_\beta\right)} k'(t) + \frac{c^2}{\alpha + c} \left( \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^+ a'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^- b(t) \right)$$

et

$$\partial_x u(l, t) = \frac{1}{c} \mathcal{P}_{\left(m^2_{(l,c)}, \gamma^2_\beta\right)} k'(t) + \mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^+ a'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{S}_{(\beta, l, c)}^- b(t)$$

où  $\beta = \frac{\alpha - c}{\alpha + c}$ ,

$$m^1_{(l,c)} : \begin{cases} m^1_{(l,c)}(1) = 0 \\ m^1_{(l,c)}(j) = (2j - 3) \frac{l}{c} ; j \geq 2 \end{cases} , \quad \gamma^1_\beta : \begin{cases} \gamma^1_\beta(1) = 0 \\ \gamma^1_\beta(j) = \beta^{j-2} ; j \geq 2 \end{cases}$$

$$m^2_{(l,c)} : m^2_{(l,c)}(j) = 2(j - 1) \frac{l}{c} ; j \geq 1 \text{ et } \gamma^2_\beta : \begin{cases} \gamma^2_\beta(1) = 1 \\ \gamma^2_\beta(j) = 2\beta^{j-1} ; j \geq 2. \end{cases}$$

**Remarque 1.** Si  $k \equiv 0$ , alors

$$\partial_t u(0, t) = \frac{c^2}{\alpha + c} \left( \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^+ a'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{(\beta, l, c)}^- b(t) \right)$$

et par suite

$$\int_0^{T=2\frac{l}{c}} |\partial_t u(0, t)|^2 dt = \frac{2c}{(\alpha + c)^2} \left( c^2 \|a'\|_{L^2(0, l)}^2 + \|b\|_{L^2(0, l)}^2 \right) = \frac{4c}{(\alpha + c)^2} E_u(0)$$

où  $E_u(t)$  est l'énergie totale de la solution à l'instant  $t$  définie par

$$\begin{aligned} E_u(t) &:= \frac{1}{2} \int_0^l \left( |\partial_t u(x, t)|^2 + c^2 |\partial_x u(x, t)|^2 \right) dx \\ &= E_u(0) - \alpha \int_0^t |\partial_t u(0, s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Si  $\alpha = c$ ,

$$E_u \left( T = 2\frac{l}{c} \right) = E_u(0) - c \int_0^T \left| \partial_t u(0, t) \right|^2 dt = 0.$$

Si  $\alpha = 0$ , on retrouve l'inégalité optimale d'observabilité pour une corde

$$\int_0^{T=2\frac{l}{c}} \left| \partial_t u(0, t) \right|^2 dt = \frac{2}{c} \left( c^2 \|a'\|_{L^2(0,l)}^2 + \|b\|_{L^2(0,l)}^2 \right) = \frac{4}{c} E_u(0).$$

**Proposition 5.** Soient  $k, g \in H_{loc}^1(0, +\infty)$ ,  $a \in H^1(0, l)$  avec  $a(0) = k(0)$  et  $a(l) = g(0)$ ,  $b \in L^2(0, l)$ ,  $c > 0$ , on considère le problème

$$(P_2) : \begin{cases} \partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0 & , \quad \forall x \in ]0, l[ \text{ et } \forall t > 0 \\ u(0, t) = k(t) \text{ et } u(l, t) = g(t) & , \quad \forall t > 0 \\ u(x, 0) = a(x) \text{ et } \partial_t u(x, 0) = b(x) & , \quad \forall x \in [0, l] \end{cases}$$

alors

$$\partial_x u(0, t) = -\frac{1}{c} \mathcal{P}_{\left(m_{(l,c)}^2, \gamma^3\right)} k'(t) + \frac{2}{c} \mathcal{P}_{\left(m_{(l,c)}^1, \gamma^4\right)} g'(t) + \mathcal{L}_{(1,l,c)}^+ a'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{(1,l,c)}^- b(t)$$

et

$$\partial_x u(l, t) = -\frac{2}{c} \mathcal{P}_{\left(m_{(l,c)}^1, \gamma^4\right)} k'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{P}_{\left(m_{(l,c)}^2, \gamma^3\right)} g'(t) + \mathcal{S}_{(1,l,c)}^+ a'(t) + \frac{1}{c} \mathcal{S}_{(1,l,c)}^- b(t)$$

où

$$\gamma^3 : \begin{cases} \gamma^3(1) = 1 \\ \gamma^3(j) = 2 ; j \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma^4 : \begin{cases} \gamma^4(1) = 0 \\ \gamma^4(j) = 1 ; j \geq 2. \end{cases}$$

Reprenons maintenant l'arbre générique  $\mathcal{AG}$  dont les équations sont données par le système suivant :

$$(P_g) : \begin{cases} \partial_t^2 u_j(x, t) - c_j^2 \partial_x^2 u_j(x, t) = 0 & , \quad \forall x \in ]0, l_j[, \forall t > 0, j \in \{1, 2, 3\} \\ c_1^2 \partial_x u_1(0, t) = \alpha \partial_t u_1(0, t) & , \quad \forall t \geq 0 \\ u_j(l_j, t) = 0 & , \quad \forall t \geq 0, j \in \{2, 3\} \\ u_1(l_1, t) = u_j(0, t) & , \quad \forall t \geq 0, j \in \{2, 3\} \\ c_1^2 \partial_x u_1(l_1, t) = \sum_{j=2}^3 c_j^2 \partial_x u_j(0, t) & , \quad \forall t \geq 0 \\ u_j(x, 0) = a_j(x) \text{ et } \partial_t u_j(x, 0) = b_j(x) & , \quad \forall x \in [0, l_j], j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

On rappelle que les méthodes standards de semi-groupe (voir [9]) permettent de montrer que le système  $(P_g)$  admet une unique solution dans l'espace d'énergie en question. Plus précisément, si

$$a = (a_j)_{1 \leq j \leq 3} \in V = \left\{ (\varphi_j)_{1 \leq j \leq 3} \in \prod_{j=1}^3 H^1(0, l_j) ; \varphi_2(l_2) = \varphi_3(l_3) = 0 \text{ et} \right. \\ \left. \varphi_1(l_1) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) \right\}$$

et

$$b = (b_j)_{1 \leq j \leq 3} \in X = \prod_{j=1}^3 L^2(0, l_j)$$

alors pour chaque  $T > 0$ , le système  $(P_g)$  admet une unique solution

$$u = (u_j)_{1 \leq j \leq 3} \in \mathcal{C}(0, T; V) \cap \mathcal{C}^1(0, T; X)$$

vérifiant

$$\|u_1(0, \cdot)\|_{H^1(0, T)} \leq C \|(a, b)\|_{V \times X}$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend que de  $T$ .

Par ailleurs la décroissance forte de l'énergie est complètement liée à la dégénérescence de l'arbre :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E_u(t) = 0$  si et seulement si  $\mathcal{AG}$  est non dégénéré (voir par exemple [1], [3] et [4]).

**Théorème 1.** *Sous les hypothèses précédentes et en posant  $\beta = \frac{\alpha - c_1}{\alpha + c_1} \in [-1, 1[$ , on a*

$$\partial_t u_1(0, t) = QF(t) + \frac{c_1^2}{\alpha + c_1} \left( \mathcal{L}_{(\beta, l_1, c_1)}^+ a_1' + \frac{1}{c_1} \mathcal{L}_{(\beta, l_1, c_1)}^- b_1 \right) (t)$$

où

$$Q = \mathcal{P}_{(m^1, \gamma^1)} \circ \left( \sum_{k=1}^3 \mathcal{P}_{(n^k, \alpha^k)} \right)^{-1}$$

$$m^1 : \begin{cases} m^1(1) = 0 \\ m^1(j) = (2j-3) \frac{l_1}{c_1}; j \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma^1 : \begin{cases} \gamma^1(1) = 0 \\ \gamma^1(j) = \frac{2c_1}{\alpha + c_1} \beta^{j-2}; j \geq 2 \end{cases}$$

$$n^k : n^k(j) = 2(j-1) \frac{l_k}{c_k}; j \geq 1 \quad \text{et} \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\alpha^1 : \begin{cases} \alpha^1(1) = c_1 \\ \alpha^1(j) = 2c_1 \beta^{j-1}; j \geq 2 \end{cases}, \quad \alpha^k : \begin{cases} \alpha^k(1) = c_k \\ \alpha^k(j) = 2c_k; j \geq 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad k \in \{2, 3\}$$

$$F = -c_1^2 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^+ a_1' - c_1 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^- b_1 + \sum_{k=2}^3 \left( c_k^2 \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^+ a_k' + c_k \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^- b_k \right).$$

*Preuve.* D'après la Proposition 4, on a

$$\partial_t u_1(0, t) = \mathcal{P}_{(m^1, \gamma^1)} k'(t) + \frac{c_1^2}{\alpha + c_1} \left( \mathcal{L}_{(\beta, l_1, c_1)}^+ a_1'(t) + \frac{1}{c_1} \mathcal{L}_{(\beta, l_1, c_1)}^- b_1(t) \right)$$

où  $k(t) = u_1(l_1, t) = u_j(0, t)$  (pour  $j = 2, 3$ ).

Pour éliminer la fonction  $k'$ , il suffit d'écrire la condition d'équilibre des forces

$$c_1^2 \partial_x u_1(l_1, t) = \sum_{j=2}^3 c_j^2 \partial_x u_j(0, t), \quad \forall t \geq 0$$

et utiliser la Proposition 5 pour obtenir l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\binom{n^1, \alpha^1}{n^1, \alpha^1}} k'(t) + c_1^2 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^+ a_1'(t) + c_1 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^- b_1(t) = \\ - \sum_{k=2}^3 \mathcal{P}_{\binom{n^k, \alpha^k}{n^k, \alpha^k}} k'(t) + \sum_{k=2}^3 \left( c_k^2 \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^+ a_k'(t) + c_k \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^- b_k(t) \right) \end{aligned}$$

ou encore

$$k' = \left( \sum_{k=1}^3 \mathcal{P}_{\binom{n^k, \alpha^k}{n^k, \alpha^k}} \right)^{-1} \left( -c_1^2 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^+ a_1' - c_1 \mathcal{S}_{(\beta, l_1, c_1)}^- b_1 + \sum_{k=2}^3 \left( c_k^2 \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^+ a_k' + c_k \mathcal{L}_{(1, l_k, c_k)}^- b_k \right) \right).$$

#### 4 Construction numérique des opérateurs de type $\mathcal{T}$

On se propose dans cette section de construire numériquement l'inverse et la composée dans l'algèbre des opérateurs de type  $\mathcal{T}$  sur un intervalle  $]0, T[$ , où  $T > 0$  est un temps arbitrairement choisi.

On rappelle que si  $\mathcal{P} \equiv (m, \alpha)$  est de type  $\mathcal{T}$  et  $T > 0$ , alors l'opérateur tronqué  $\mathcal{P}^T$  est bien défini (après réindexation) par la donnée des suites finies

$$m(1) = 0 < m(2) < \dots < m(L) = T \text{ et } \alpha(1), \dots, \alpha(L-1).$$

Pour pouvoir inverser un opérateur  $\mathcal{P}^T \equiv \left( (m(j))_{1 \leq j \leq L}, (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  de type  $\mathcal{T}$ , il est nécessaire que la suite  $m$  vérifie la propriété suivante dite de saturation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall 2 \leq p < L, \forall 1 \leq j \leq p, \exists! 1 \leq k \leq p; \\ m(k) \leq m(p) - m(j) < m(p+1) - m(j) \leq m(k+1). \end{array} \right.$$

##### 4.1 Saturation

Soit  $\mathcal{P}^T \equiv \left( (m(j))_{1 \leq j \leq L}, (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  (on rappelle que  $m(L) = T$ ). On considère les ensembles

$$A_2 = \left\{ k m(2) ; 0 < k \leq \left\lceil \frac{T}{m(2)} \right\rceil \right\}$$

et pour  $2 < j < L$

$$A_j = \left\{ m(j) + k m(2) ; 0 \leq k \leq \left\lceil \frac{T - m(j)}{m(2)} \right\rceil \right\}$$

où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Remarque 2.** Si  $A_2$  est un singleton, alors pour tout  $2 < j < L$ ,  $A_j$  est aussi un singleton et la suite  $m$  est saturée.

Si  $A_2$  n'est pas un singleton, on considère la suite  $m^1 = (m^1(j))_{1 \leq j \leq L^1}$  dont les termes sont ceux de  $\bigcup_j A_j$  ordonnés dans l'ordre strictement croissant (remarquons que  $m^1(1) = m(2)$ ). On pose

$$A_2^1 = \left\{ k m^1(2) ; 0 < k \leq \left\lfloor \frac{T}{m_2^1} \right\rfloor \right\}$$

et pour  $j > 2$

$$A_j^1 = \left\{ m_j^1 + k m_2^1 ; 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{T - m_j^1}{m_2^1} \right\rfloor \right\}.$$

Si  $A_2^1$  est un singleton on arrête, sinon on considère la suite  $m^2 = (m^2(j))_{1 \leq j \leq L^2}$  dont les termes sont ceux de  $\bigcup_j A_j^1 \setminus \{m^1(2)\}$  ordonnés dans l'ordre strictement croissant (remarquons que  $m^2(1) = m^1(3)$ ), et on pose

$$A_2^2 = \left\{ k m^2(2) ; 0 < k \leq \left\lfloor \frac{T}{m^2(2)} \right\rfloor \right\}$$

et pour  $j > 2$

$$A_j^2 = \left\{ m^2(j) + k m^2(2) ; 0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{T - m^2(j)}{m^2(2)} \right\rfloor \right\}.$$

De proche en proche jusqu'à arriver à  $A_2^p$  un singleton pour un certain  $p$ . On considère alors la suite  $\tilde{m} = (\tilde{m}_j)_{1 \leq j \leq \tilde{L}}$  dont les éléments sont ceux de l'ensemble

$$\{0\} \cup \bigcup_{s \leq p} \bigcup_j A_j^s$$

ordonnés dans l'ordre strictement croissant.

**Exemple.** Si  $m$  est donnée par

$$m = (0, 1, 3, \pi, 4, 12, 13.5 \dots)$$

et  $T = 5.5$ , alors

$$\tilde{m} = (0, 1, 2, 3, \pi, 4, 1 + \pi, 5, 2 + \pi, 5.5).$$

**Proposition 6.** Soit  $m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}$  une suite et  $\tilde{m} = (\tilde{m}(j))_{1 \leq j \leq \tilde{L}}$  la suite ainsi construite à partir de  $m$ , alors pour tout  $2 \leq p < \tilde{L}$  et pour tout  $1 \leq j \leq p$ , il existe un unique  $1 \leq k \leq p$  tels que

$$\tilde{m}(k) \leq \tilde{m}(p) - \tilde{m}(j) < \tilde{m}(p+1) - \tilde{m}(j) \leq \tilde{m}(k+1).$$

*Preuve.* Soit  $2 \leq p < \tilde{L}$  et  $2 \leq j \leq p$ . On considère le plus grand entier  $k$  tel que  $\tilde{m}(k) \leq \tilde{m}(p) - \tilde{m}(j)$ , il vient alors que  $\tilde{m}(p+1) \leq \tilde{m}(k+1) + \tilde{m}(j)$  car sinon on aura

$$\tilde{m}(k) + \tilde{m}(j) \leq \tilde{m}(p) < \tilde{m}(k+1) + \tilde{m}(j) < \tilde{m}(p+1)$$

(la deuxième inégalité découle de la définition de  $k$ ) et cela est en contradiction avec la construction de  $\tilde{m}$ .

**Définition 3.** Soient  $m = (m_j)_{1 \leq j \leq L}$  une suite et  $\tilde{m} = (\tilde{m}_j)_{1 \leq j \leq \tilde{L}}$  la suite construite plus haut à partir de  $m$ . On dit que  $\tilde{m}$  est la saturée de  $m$ . Si  $\tilde{m} = m$ , on dit que  $m$  est une suite saturée.

**Définition 4.** Soit  $m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}$  une suite saturée, pour  $1 \leq q \leq L - 1$  et  $1 \leq k \leq q$ , on désigne par  $H(k, q)$  l'unique entier vérifiant

$$m(H(k, q)) \leq m(q) - m(k) < m(q + 1) - m(k) \leq m(H(k, q) + 1).$$

On dit que  $H = (H(k, q))_{\substack{1 \leq k \leq L-1 \\ 1 \leq q \leq L-1}}$  est la matrice caractéristique de  $m$ .

**Exemple.** Si  $m$  est la suite saturée donnée par

$$m = (0, 1, 2, 3, \pi, 4, 1 + \pi, 5, 2 + \pi, 5.5).$$

alors sa matrice caractéristique  $H$  est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La proposition suivante décrit quelques propriétés immédiates qui découlent de la définition d'une suite saturée et de sa matrice caractéristique.

**Proposition 7.** Soit  $m$  une suite saturée et  $H$  sa matrice caractéristique, alors

1.  $H$  est triangulaire supérieure d'ordre  $L - 1$ .
2. Pour tout  $1 \leq q \leq L - 1$ ,  $H(q, q) = 1$ .
3. Pour tout  $1 \leq k \leq L - 1$ , la suite  $(H(k, q))_{1 \leq q \leq L-1}$  est croissante.
4. Pour tout  $1 \leq q \leq L - 1$ ,  $H(1, q) = q$ ,  $H(2, q) < q$  et la suite  $(H(k, q))_{1 \leq k \leq L-1}$  est décroissante.

Nous avons besoin à présent d'analyser les coefficients de la matrice  $H$ . Ceci est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 2.** Pour tout  $2 \leq q \leq L - 1$  et  $1 \leq k \leq q$ , on a

$$H(k, q) \in \{H(k, q - 1), H(k, q - 1) + 1\}$$

c'est-à-dire

$$H(k, q - 1) \stackrel{(1)}{\leq} H(k, q) \stackrel{(2)}{\leq} H(k, q - 1) + 1.$$

*Preuve.* L'inégalité  $\leq^{(1)}$  est évidente par définition même de l'entier  $H(k, q)$  et de la stricte monotonie de la suite  $m$ .

Supposons que l'inégalité  $\leq^{(2)}$  n'est pas vérifiée pour un certain couple  $(k, q)$ . Alors

$$H(k, q) > H(k, q - 1) + 1$$

ce qui implique que

$$m(H(k, q)) > m(H(k, q - 1) + 1) \geq^{(*)} m(q) - m(k)$$

$\geq^{(*)}$  est due à la définition de  $H$  et bien sûr l'inégalité " $m(H(k, q)) > m(q) - m(k)$ " est contradictoire.

**Remarque 3.** 1. Si  $H(k, q) = H(k, q - 1)$ , alors  $m(q) - m(k) \notin m$  car sinon

$$m(q) - m(k) = m(H(k, q)) = m(H(k, q - 1)) \leq m(q - 1) - m(k)$$

et par suite  $m(q) \leq m(q - 1)$ , ce qui est absurde.

2. Si  $H(k, q) = H(k, q - 1) + 1$ , alors

$$m(q) - m(k) = m(H(k, q)) \left( \iff m(H(k, q)) + m(k) = m(q) \right)$$

car sinon

$$m(q) - m(k) > m(H(k, q)) = m(H(k, q - 1) + 1) \geq m(q) - m(k)$$

ce qui est absurde.

## 4.2 Construction de l'inverse

**Théorème 3.** Soit  $\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \alpha = (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  avec  $m$  saturée,  $\alpha(1) \neq 0$  et  $H = (H(k, q))_{\substack{1 \leq k \leq L-1 \\ 1 \leq q \leq L-1}}$  sa matrice caractéristique. On désigne par  $R$  et  $M$  les matrices définies par

$$R(k, q) = \begin{cases} H(k, q) & \text{si } H(k, q) > H(k, q - 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$M(k, q) = \begin{cases} \alpha(R(k, q)) & \text{si } R(k, q) > 0 \\ 0 & \text{si } R(k, q) = 0 \end{cases}$$

alors  $(\mathcal{P}^T)^{-1} \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \beta = (\beta(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  où  $\beta = \left( M^{-1}(j, 1) \right)_{1 \leq j \leq L-1}$ .

*Preuve.* Soit  $\mathcal{P}^T \equiv \left( m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \alpha = (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1} \right)$  un opérateur de type  $\mathcal{T}$  avec  $m$  saturée et  $\alpha(1) \neq 0$ .

Pour inverser  $\mathcal{P}^T$  on doit résoudre sur  $]0, T[$  l'équation

$$(*) : \mathcal{P}^T f = g.$$

Pour  $m(1) < t < m(2)$ , l'équation (\*) s'écrit tout simplement

$$f(t) = \frac{1}{\alpha(1)} g(t)$$

ce qui permet de trouver  $\beta(1) = \frac{1}{\alpha(1)}$ .

Supposons construire  $\beta(1), \dots, \beta(q-1)$ , c'est-à-dire que pour tout  $1 \leq j \leq q-1$  et pour presque tout  $m(j) < t < m(j+1)$ , on a

$$f(t) = \sum_{k=1}^j \beta(k)g(t - m(k)).$$

Pour construire  $\beta(q)$ , il faut résoudre (\*) sur l'intervalle  $]m(q), m(q+1)[$ . L'équation (\*) s'écrit alors : pour presque tout  $t \in ]m(q), m(q+1)[$

$$f(t) = \frac{1}{\alpha(1)}g(t) - \frac{1}{\alpha(1)} \sum_{k=2}^q \alpha(k)f(t - m(k)).$$

Comme  $m(q) < t < m(q+1)$ , alors pour tout  $2 \leq k \leq q$ , on a

$$m(H(k, q)) \leq m(q) - m(k) < t - m(k) < m(q+1) - m(k) \leq m(H(k, q) + 1) \leq m(q)$$

(la dernière inégalité est due au fait que pour tout  $k \geq 2$ ,  $H(k, q) + 1 \leq q$  : voir la propriété 4 de la Proposition 7.) ce qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence et écrire pour tout  $2 \leq k \leq q$

$$f(t - m(k)) = \sum_{i=1}^{H(k, q)} \beta(i)g(t - m(k) - m(i))$$

et par suite

$$f(t) = \frac{1}{\alpha(1)}g(t) - \frac{1}{\alpha(1)} \sum_{k=2}^q \sum_{i=1}^{H(k, q)} \alpha(k)\beta(i)g(t - (m(k) + m(i))).$$

**Lemme 4.** Pour tout  $2 \leq k \leq q$  et pour tout  $1 \leq i \leq H(k, q)$  on a :

1.  $m(k) + m(i) \leq m(q)$  et  $m(k) + m(i) \in m$ .
2.  $m(k) + m(i) = m(q)$  si et seulement si  $H(k, q) = H(k, q-1) + 1$  et  $i = H(k, q)$ .

Pour trouver le terme  $g(t - m(q))$ , il faut et il suffit de déterminer les  $2 \leq k \leq q$  tels que  $H(k, q) > H(k, q-1)$  et prendre  $i = H(k, q)$ . Le coefficient  $\beta(q)$  de  $g(t - m(q))$  est alors donné par

$$\beta(q) = -\frac{1}{\alpha(1)} \sum_{\substack{k=2 \\ H(k, q) > H(k, q-1)}}^q \alpha(k)\beta(H(k, q)).$$

On note par  $R$ , la matrice

$$R(k, q) = \begin{cases} H(k, q) & \text{si } H(k, q) > H(k, q-1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors d'une part on a la propriété suivante :

**Lemme 5.** (de changement d'indices) Pour tout  $1 \leq k, p \leq q$ , on a l'équivalence :

$$R(k, q) = p \iff R(p, q) = k.$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \beta(q) = -\frac{1}{\alpha(1)} \sum_{\substack{k=2 \\ R(k,q) \neq 0}}^q \alpha(k)\beta(R(k, q)) &\iff \sum_{\substack{k=1 \\ R(k,q) \neq 0}}^q \alpha(k)\beta(R(k, q)) = 0 \\ &\iff \sum_{\substack{k=1 \\ R(k,q) \neq 0}}^q \alpha(R(k, q))\beta(k) = 0. \end{aligned}$$

On considère maintenant la matrice  $M$  donnée par

$$M(k, q) = \begin{cases} \alpha(R(k, q)) & \text{si } R(k, q) > 0 \\ 0 & \text{si } R(k, q) = 0. \end{cases}$$

Les formules de récurrence s'écrivent alors

$$M\beta = U$$

où  $\beta = (\beta(1), \dots, \beta(L-1))^t$  et  $U = (1, 0, \dots, 0)^t$  ce qui permet de trouver  $\beta$  tout simplement par  $\beta = M^{-1}U$ .

*Preuve du Lemme 4.*

1. Pour  $2 \leq k \leq q$  et  $1 \leq i \leq H(k, q)$ , l'inégalité  $m(k) + m(i) \leq m(q)$  découle de la monotonie de  $m$  et de la définition de  $H(k, q)$  et cela implique que  $m(k) + m(i) \in m$  car  $m(q) \leq T$ .
2. Si  $m(k) + m(i) = m(q)$ , alors  $H(k, q) = H(k, q-1) + 1$  car sinon  $m(q) - m(k) \notin m$ , et  $i = H(k, q)$  car si  $i < H(k, q)$  alors

$$m(k) + m(i) < m(k) + m(H(k, q)) \leq m(k) + m(q) - m(k) = m(q)$$

ce qui est bien sûr absurde.

La réciproque est déjà démontrée dans la remarque précédente.

*Preuve du Lemme 5.* Pour  $1 \leq k, p \leq q$ , on a

$$\begin{aligned} R(k, q) = p &\iff \begin{cases} H(k, q) = p \\ H(k, q) = H(k, q-1) + 1 \end{cases} \iff m(k) + m(p) = m(q) \\ &\iff \begin{cases} H(p, q) = k \\ H(p, q) = H(p, q-1) + 1 \end{cases} \iff R(p, q) = k. \end{aligned}$$

### 4.3 Construction de la composée

Soient  $\mathcal{P}^T \equiv (m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \alpha = (\alpha(j))_{1 \leq j \leq L-1})$  et  $\mathcal{Q}^T \equiv (m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \beta = (\beta(j))_{1 \leq j \leq L-1})$  deux opérateurs de type  $\mathcal{T}$  avec  $m$  une suite saturée. Pour déterminer  $\mathcal{P}^T \circ \mathcal{Q}^T \equiv (m = (m(j))_{1 \leq j \leq L}, \gamma = (\gamma(j))_{1 \leq j \leq L-1})$ , on considère une fonction  $f$  et on calcule  $\mathcal{P}^T(\mathcal{Q}^T(f))$ . Pour  $t \in ]m(1), m(2)[$ ,

$$\mathcal{P}^T(\mathcal{Q}^T(f))(t) = \alpha(1)\beta(1)f(t) \implies \gamma(1) = \alpha(1)\beta(1).$$

Supposons construire  $\gamma(1), \dots, \gamma(q-1)$  ( $q < L$ ), alors pour calculer  $\gamma(q)$ , on considère  $t \in ]m(q), m(q+1)[$  et on aura

$$\mathcal{P}^T(\mathcal{Q}^T(f))(t) = \sum_{k=1}^q \alpha(k)(\mathcal{Q}^T(f))(t - m(k)).$$

Or

$$m(H(k, q)) \leq m(q) - m(k) < t - m(k) < m(q+1) - m(k) \leq m(H(k, q) + 1)$$

et donc

$$f(t - m(k)) = \sum_{j=1}^{H(k, q)} \beta(j)f(t - (m(k) + m(j)))$$

ce qui donne

$$\mathcal{P}^T(\mathcal{Q}^T(f))(t) = \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{H(k, q)} \alpha(k)\beta(j)f(t - (m(k) + m(j)))$$

et comme pour l'inverse et avec la même matrice

$$M(k, q) = \begin{cases} \alpha(R(k, q)) & \text{si } R(k, q) > 0 \\ 0 & \text{si } R(k, q) = 0 \end{cases}$$

on obtient

$$\gamma = {}^t M * \beta.$$

## 5 Applications numériques

### 5.1 Exemple 1

Soit  $k \in H_{loc}^1(0, +\infty)$ . On considère l'équation des ondes sur une corde de longueur  $l$

$$\begin{cases} \partial_t^2 v(x, t) + c^2 \partial_x^2 v(x, t) = 0 & , \quad x \in ]0, l[ \text{ et } t > 0 \\ c^2 \partial_x v(0, t) = \alpha \partial_t v(0, t) \text{ et } v(l, t) = k(t) & , \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 \text{ et } \partial_t v(x, 0) = 0 & , \quad x \in [0, l] \end{cases}$$

L'énergie de  $v$  est donnée par

$$E_v(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left( |\partial_t v(x, t)|^2 + c^2 |\partial_x v(x, t)|^2 \right) dx$$

et on a

$$\frac{dE_v}{dt}(t) = c^2 k'(t) \partial_x v(l, t) - \alpha |\partial_t v(0, t)|^2.$$

Comme

$$\partial_t v(0, t) = \mathcal{P}_1 k'(t) \text{ et } \partial_x v(l, t) = \mathcal{P}_2 k'(t)$$

où  $\mathcal{P}_k \equiv (m_k, \alpha_k)$  ( $k = 1, 2$ ) avec

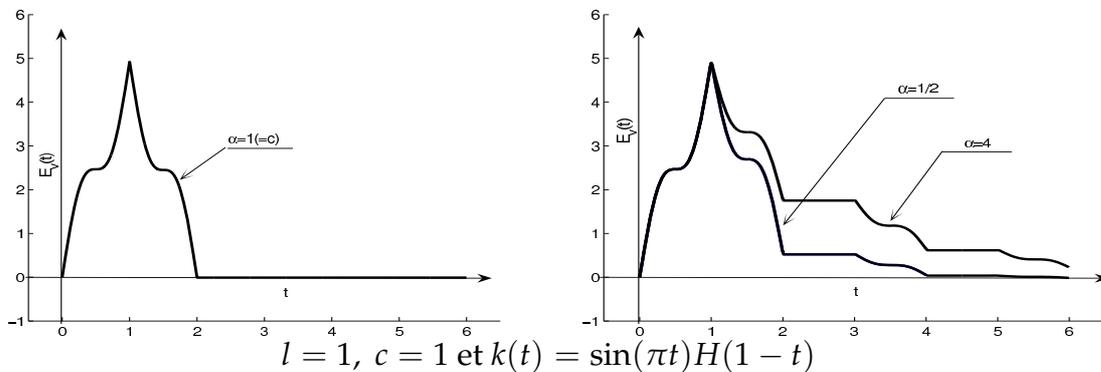
$$m_1 : \begin{cases} m_1(1) = 0 \\ m_1(j) = (2j-3)\frac{l}{c}; j \geq 2 \end{cases}, \quad \alpha_1 : \begin{cases} \alpha_1(1) = 0 \\ \alpha_1(j) = \frac{2c}{\alpha+c} \beta^{j-2}; j \geq 2 \end{cases}$$

$$m_2 : m_2(j) = 2(j-1)\frac{l}{c}; j \geq 1, \quad \alpha_2 : \begin{cases} \alpha_2(1) = \frac{1}{c} \\ \alpha_2(j) = \frac{2}{c} \beta^{j-1}; j \geq 2 \end{cases} \quad \text{et } \beta = \frac{\alpha-c}{\alpha+c}$$

alors

$$E_v(t) = \int_0^t \left( -\alpha |\mathcal{P}_1 k'(t)|^2 + c^2 k'(t) \mathcal{P}_2 k'(t) \right) dt.$$

On trace à présent les courbes des fonctions  $t \mapsto E_v(t)$  avec  $k(t) = \sin(\pi t)Y(1-t)$ , où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside,  $t \geq 0$  pour des différentes valeurs de  $c$  et  $\alpha$  :



**Remarque 4.** Lorsque  $\alpha = c$  (c'est-à-dire  $\beta = 0$ ), alors l'opérateur  $\mathcal{P}_2$  devient un multiple de l'identité (plus précisément  $\mathcal{P}_2 k' = \frac{1}{c} k'$ ) et

$$\mathcal{P}_1 k'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < m_1(2) = \frac{l}{c} \\ k'(t - m_1(2)) & \text{si } t > m_1(2) \end{cases}$$

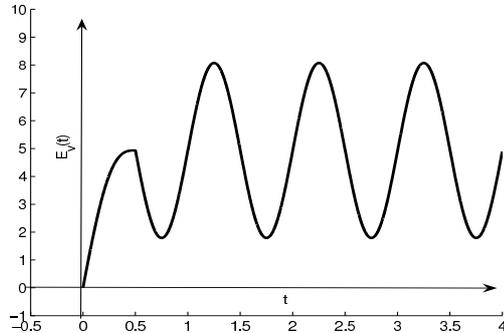
et par suite

$$E_v(t) = \begin{cases} c \int_0^t |k'(s)|^2 ds & \text{si } 0 < t < m_1(2), \\ c \int_{t-m_1(2)}^t |k'(s)|^2 ds & \text{si } t > m_1(2). \end{cases}$$

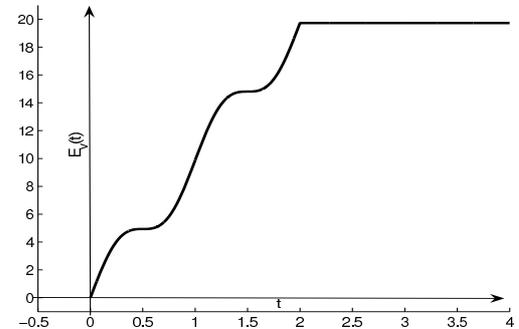
On remarque aussi que la fonction

$$t \mapsto \int_{t-m_1(2)}^t |k'(s)|^2 ds$$

est constante dans le cas où  $k$  est périodique et  $m_1(2)$  est une période.



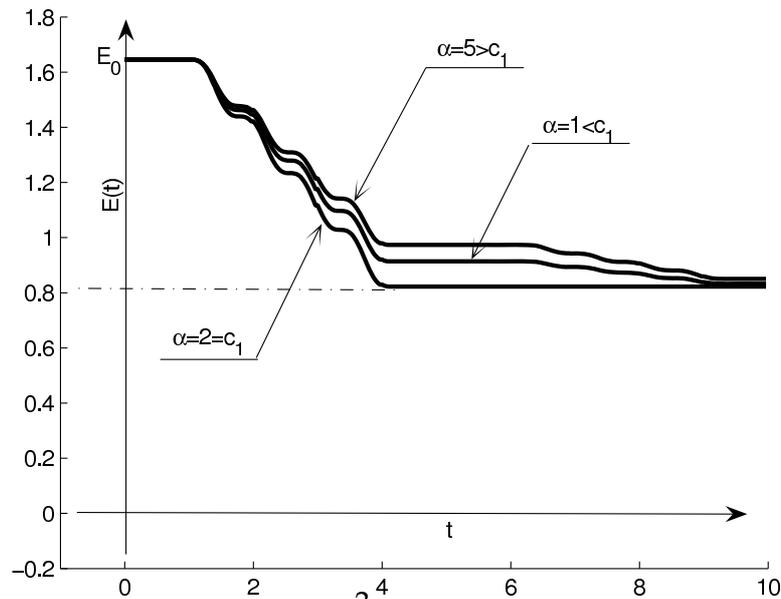
$m_1(2)$  n'est pas une période



$m_1(2)$  est une période

$$l = 1, c = 2, \alpha = 2 \text{ et } k(t) = \sin(\pi t)$$

### 5.2 Exemple 2



$$l_1 = 1, l_2 = l_3 = \frac{3}{2}, c_1 = 2 \text{ et } c_2 = c_3 = 1$$

Reprenons maintenant l'exemple de l'arbre générique  $\mathcal{AG}$  avec (pour simplifier) les données initiales suivantes

$$a_1 \equiv 0, a_2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{l_2}x\right), a_3 \equiv 0 \text{ et } b_k \equiv 0, k = 1, 2, 3$$

la fonction  $t \mapsto \partial_t u_1(0, t)$  est alors donnée par

$$\partial_t u_1(0, t) = \mathcal{P}_{\binom{1}{m}, \gamma^1} \circ \left( \sum_{k=1}^3 \mathcal{P}_{\binom{k}{n^k}, \alpha^k} \right)^{-1} \left( c_2^2 \mathcal{L}_{(1, l_2, c_2)}^+(a_2') \right) (t)$$

et l'énergie totale de l'arbre est

$$E_u(t) = E_u(0) - \alpha \int_0^t \left| \partial_t u_1(0, s) \right|^2 ds.$$

## Références

- [1] K. Ammari and M. Jellouli, Remark in stabilization of tree-shaped networks of strings, *Appl. Maths.*, **4** (2007), 327-343.
- [2] K. Ammari and M. Jellouli, Stabilization of star-shaped networks of strings, *Diff. Integral. Equations*, **17** (2004), 1395-1410.
- [3] K. Ammari, M. Jellouli and M. Khenissi, Stabilization of generic trees of strings, *J. Dyn. Cont. Syst.*, **11** (2005), 177-193.
- [4] R. Dáger, Observation and control of vibrations in tree-shaped networks of strings, *SIAM. J. Control Optim.*, **43** (2004), 590-623.
- [5] R. Dáger, E. Zuazua, *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, Mathématiques et Applications, Vol. 50. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [6] Ph. Destuynder, *Vibrations des structures et des systèmes couplés*, Lavoisier, 2007.
- [7] V. Komornik and P. Loreti, *Fourier series in control theory*, Springer Monographs in Mathematics, New York, 2005.
- [8] J. Lagnese, G. Leugering and E. J. P. G. Schmidt, *Modeling, Analysis of dynamic elastic multi-link structures*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.
- [9] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, New York, 1983.
- [10] S. Nicaise and J. Valein, Stabilization of the wave equation on 1-D networks with a delay term in the nodal feedbacks, *Netw. Heterog. Media.*, **3** (2007), 425-479.

Département de Mathématiques,  
Faculté des Sciences de Monastir,  
5019 Monastir, Tunisie  
email :kais.ammari@fsm.rnu.tn, mohamed.jellouli@fsm.rnu.tn