Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky

Aissa Guesmia

Abstract

In this paper we prove the global existence, uniqueness and stability for a Petrovsky system with internal nonlinear damping. Key point to our proof is the use of the semigroup approach and some integral inequalities.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) de frontière Γ de classe C^4. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante telle que $g(0) = 0$ et soit $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive dans $L^\infty(\Omega)$. On considère le système suivant

(1.1) $$u'' + \Delta^2 u + qu + g(u') = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

(1.2) $$u = \partial_\nu u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+,$$

(1.3) $$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad \text{dans} \quad \Omega.$$

On définit l'énergie de la solution par la formule

(1.4) $$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega ((u')^2 + (\Delta u)^2 + qu^2)dx, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

Received by the editors February 1997 – In revised form June 1997.
Communicated by P. Laubin.
1991 *Mathematics Subject Classification* : 93C20, 93D15.
Key words and phrases : Petrovsky system, nonlinear damping, integral inequality.

E est une fonction positive et on a formellement

$$E'(t) = -\int_{\Omega} u'g(u')dx \leq 0 \tag{1.5}$$

(remarquer que $xg(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$); donc l'énergie est décroissante.

Le but de cette note est d'obtenir la stabilité du système considéré sous des conditions convenables sur la fonction g.

On commence par la définition des espaces de Hilbert suivants

$$H = L^2(\Omega), \quad \|v\|_H^2 = \int_{\Omega} v^2 dx,$$

$$V = H_0^2(\Omega), \quad \|v\|_V^2 = \int_{\Omega} ((\Delta u)^2 + qu^2)dx$$

et

$$W = \{u \in H^4(\Omega) \cap V : \Delta u = \partial_\nu \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \quad \|v\|_W^2 = \int_{\Omega} (\Delta^2 u)^2 dx.$$

On identifie H avec son dual H' on obtient

$$W \subset V \subset H = H' \subset V' \subset W'$$

avec injection compacte et dense.

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème 1.1. *Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in V \times H$, le système (1.1)-(1.3) admet une solution (définie au sense faible) unique u vérifiant*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H).$$

Si z est une autre solution du système (1.1)-(1.3) correspondant à la donnée initiale $(z_0, z_1) \in V \times H$, alors la fonction

$$E(u - z, t) := \frac{1}{2} \int ((u' - z')^2 + (\Delta u - \Delta z)^2 + q(u - z)^2)dx, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

est décroissante.

Comme $g(0) = 0$, on prend $z = 0$ dans la deuxième partie de ce théorème et on trouve la décroissance de l'énergie E et

$$\|E\|_{L^\infty(0;+\infty)} \leq E(0). \tag{1.6}$$

Pour la régularité de la solution on a le résultat suivant

Théorème 1.2. *On suppose que*

$$(u_0, u_1) \in W \times V \quad \textit{et} \quad g(u_1) \in H. \tag{1.7}$$

Alors la solution (dite forte) du système (1.1)-(1.3) vérifie

$$u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V), \quad u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.8}$$

Si g est globalement Lipschitz, alors

$$u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+; W), \quad g(u') \in L^{\infty}(\mathbb{R}^+; H). \tag{1.9}$$

On va supposer des conditions sur la fonction g pour obtenir la stabilité du système (1.1)-(1.3). On suppose que pour des constantes p, $p' \geq 1$ et des constantes positives c_1, c_2, c_3, c_4 on a

$$c_1 \big|x\big|^p \leq \big|g(x)\big| \leq c_2 \big|x\big|^{\frac{1}{p}} \quad \text{si} \quad \big|x\big| \leq 1, \tag{1.10}$$

$$c_3 \big|x\big| \leq \big|g(x)\big| \quad \text{si} \quad \big|x\big| > 1, \tag{1.11}$$

$$\big|g(x)\big| \leq c_4 \big|x\big|^{p'} \quad \text{si} \quad \big|x\big| > 1 \quad \text{et} \quad n \geq 3 \tag{1.12}$$

et

$$p' \leq \frac{n+2}{n-2} \quad \text{si} \quad n \geq 3. \tag{1.13}$$

On a le résultat de stabilité suivant

Théorème 1.3. *On suppose que les conditions (1.10)-(1.13) sont satisfaites. Alors toute solution faible du système (1.1)-(1.3) vérifie pour des constantes positives c et ω l'estimation*

$$E(t) \leq c\, t^{\frac{-2}{p-1}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad p > 1, \tag{1.14}$$

et

$$E(t) \leq E(0) e^{1-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad p = 1. \tag{1.15}$$

ici la constante c dépend de l'énergie initiale $E(0)$, la constante ω ne dépend pas de $E(0)$.

La condition (1.11) implique que g n'est pas borné, le théorème suivant montre que les estimations (1.14) et (1.15) restent vraies pour les solutions fortes du système (1.1)-(1.3) même si g est borné.

Théorème 1.4. *On suppose que les conditions (1.10), (1.12) et (1.13) sont satisfaites avec*

$$\begin{cases} p \geq 1 & si \quad n = 1, \\ p > 1 & si \quad n = 2, \\ p \geq \frac{n}{2} & si \quad n \geq 3. \end{cases} \tag{1.16}$$

Alors toute solution forte du système (1.1)-(1.3) vérifie les estimations (1.14) et (1.15) pour des constantes positives c et ω dépendant de la solution u.

Le système composé de l'équation (1.1) avec $q = 0$ et $-g(\Delta u')$ au lieu de $+g(u')$, la condition au bord

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \tag{1.17}$$

au lieu de (1.2) et la condition initiale (1.3) a été étudié par Komornik et Kouémou-Patcheu [8] et Komornik [6]. Dans [8], la méthode de Faedo-Galerkin a été appliquée pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution ce qui exige des conditions sur g plus fortes que celles supposées dans notre travail, de plus les estimations (1.14) et (1.15) se montrent seulement pour les solutions fortes. Dans [6], l'auteur a utilisé la théorie des semi-groupes non linéaires qui a permis d'affaiblir les conditions sur g et de montrer les estimations (1.14) et (1.15) pour toute solution faible. Dans ce travail, et avec les même conditions supposées sur g que dans [6], nous montrons ces résultats pour le système (1.1)-(1.3). De plus, nous montrons que les estimations (1.14) et (1.15) restent vraies pour les solutions fortes sans que $\left|g(x)\right|$ ne tende vers l'infini lorsque $\left|x\right| \to +\infty$ ce qui permet de considérer les feedbacks bornés.

Dans la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2 on applique la théorie des semi-groupes non linéaires [1], [2] (voir aussi [5]). Pour la démonstration du théorème 1.3 et 1.4 on utilise la méthode de Liapounov basée sur des inégalités intégrales appliquées dans [4], [6] et [7].

2 L'existence et l'unicité de la solution

Soit

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

et

$$\varphi(v) = \int_\Omega G(v)dx, \quad v \in V.$$

La fonction $\varphi : V \to]-\infty, +\infty]$ est propre, s.c.i, convexe et son sous-differentiel $B := \partial\varphi : V \to V'$ est un opérateur maximal monotone.

On prend l'application duale $A : V \to V'$ et on écrit le système (1.1)-(1.3) sous la forme

$$u'' + Au + Bu' = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1. \tag{2.2}$$

Pour justifier cette interprétation on note premièrement que la condition au bord (1.2) est incluse dans la définition de V. Pour $u \in W$ on a $Au = \Delta^2 u + qu$. En effet, soit $v \in V$ on a

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle_{V',V} &= (u, v)_V = \int_\Omega (\Delta u \Delta v + quv)dx \\ &= \int_\Gamma \Delta u \partial_\nu v d\Gamma - \int_\Gamma \partial_\nu \Delta u v d\Gamma + \int_\Omega (\Delta^2 u + qu)v dx \\ &= (\Delta^2 u + qu, v)_H = \langle \Delta^2 u + qu, v\rangle_{H',H} = \langle \Delta^2 u + qu, v\rangle_{V',V}\end{aligned}$$

d'où $Au = \Delta^2 u + qu$ dans V'.

Finalement, on peut vérifier que si g est globalement Lipschitz continue alors on a

$$\langle Bu, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega g(u)v dx$$

pour tout $v \in V$. On multiplie l'équation (1.1) par $v, v \in V$ et on intègre par partie, on obtient

$$\langle u'' + Au + Bu', v\rangle_{V',V} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+$$

i.e. (2.1)

On pose

$$u' = z, \quad U = (u, z) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}U = (-z, Au + Bz),$$

on peut aussi écrire le système (2.1)-(2.2) sous la forme

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+, \quad U(0) = (u_0, u_1). \tag{2.3}$$

On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = V \times H$ et on considère $\mathcal{A}$ comme un opérateur définie dans $\mathcal{H}$ tel que

$$D(\mathcal{A}) = \{U = (u, z) \in V \times V : Au + Bz \in H\}.$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est maximal monotone (voir Barbu [1] et Brézis [2]) dans $\mathcal{H}$. On applique la théorie des semi-groupes non linéaires et on trouve le théorème 1.1 et la première partie du thèorème 1.2.

La deuxième partie du théoreme 1.2 se déduit à partir du lemme suivant

Lemme 2.1. *Si g est globalement Lipschitz, alors $D(\mathcal{A}) = \mathcal{W} \times \mathcal{V}$ et il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|u\|_W \leq c(\|Au + Bz\|_H + \|z\|_V), \quad \forall U \in D(\mathcal{A}). \tag{2.4}$$

Les propriétés (1.8) et (2.1) impliquent que $u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ et $Au + Bz \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. Comme g est globalement Lipschitz et d'après (2.4) on obtient (1.9).

Démonstration du lemme 2.1. On montre premièrement que $W \times V \subset D(\mathcal{A})$. Soit $(u, z) \in W \times V$, il faut montrer que $Au + Bz \in H$. Or $u \in W$ implique $Au = \Delta^2 u + qu \in H$, il suffit de prouver l'estimation

$$\langle\langle Bz, v\rangle_{V',V} \leq c'\|v\|_H, \quad \forall v \in V \tag{2.5}$$

pour une constante c'. On a

$$\langle Bz, v\rangle_{V',V} = \int_\Omega g(z)v dx \leq \Big(\int_\Omega g^2(z)dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega v^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\Big(\int_\Omega z^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|_H \leq c\|z\|_V\|v\|_H,$$

d'où (2.5).

On montre (2.4); soit $(u, z) \in D(\mathcal{A})$, montrons que $u \in W$. Comme $Au+Bz \in H$, donc pour tout $v \in V$ on a

$$\langle Au + Bz, v\rangle_{V',V} = \langle Au + Bz, v\rangle_H$$

et par suite
$$\int_\Omega (\Delta u \Delta v + quv)dx = \int_\Omega fvdx$$
où $f = Au + Bz - g(z)$. Par la formule de Green, on obtient
$$\int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx + \int_\Gamma \Delta u \partial_\nu v d\Gamma - \int_\Gamma \partial_\nu \Delta u v d\Gamma = \int_\Omega fvdx.$$
Comme $v = \partial_\nu v = 0$ sur Γ, donc
$$\int_\Omega (\Delta^2 u + qu)vdx = \int_\Omega fvdx, \quad \forall v \in V.$$
Cette égalité montre que u est la solution faible du problème
$$\Delta^2 u + qu = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad u = \partial_\nu u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$
Or $f \in H$. En effet, $Au + Bz \in H$ par hypothèse et comme g est globalement Lipschitz, on a
$$\|g(z)\|_H \leq c\|z\|_H < \infty,$$
donc $g(z) \in H$ et par suite f l'est aussi. En applique la théorie du régularité elliptique, on conclut que $u \in W$ et
$$\|u\|_W \leq c\|f\|_H \leq (\|Au + Bz\|_H + \|u\|_V)$$
d'où l'estimation (2.4).

3 Démonstration du théorème 1.3

On va montrer ce théorème pour les solutions fortes et on généralise la situation par argument de densité (voir lemme 2.1 et [6]).

On montre premièrement deux identités.

Lemme 3.1. *L'énergie $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante, localement absolument continue et*
$$E'(t) = -\int_\Omega u'g(u')dx \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq S < T < \infty$, d'après (1.1), (1.2) et (1.4) on a
$$0 = \int_S^T \int_\Omega u'(u'' + \Delta^2 u + qu + g(u'))dxdt$$
$$= \int_S^T \int_\Omega (u'u'' + \Delta u \Delta u' + quu' + u'g(u'))dxdt$$
$$= E(T) - E(S) + \int_S^T \int_\Omega u'g(u')dxdt,$$
donc
$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_\Omega u'g(u')dxdt, \quad 0 \leq S < T < \infty. \tag{3.2}$$

Par hypothèse sur g on a $xg(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$, donc E est décroissante. L'identité (3.2) implique aussi que E est localement absolument continue et l'égalité (3.1) est satisfaite.

Lemme 3.2. *Pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a l'estimation*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt = -[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u'udx]_S^T \tag{3.3}$$

$$+\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega u'udxdt + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (2(u')^2 - ug(u'))dxdt.$$

Démonstration. On a

$$0 = \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u(u'' + \Delta^2 u + qu + g(u'))dxdt$$

$$= [E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega uu'dx]_S^T - \frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega uu'dxdt$$

$$+\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ((\Delta u)^2 + qu^2 + ug(u') - (u')^2)dxdt.$$

On utilise la définition de l'énergie et on obtient (3.3).

Lemme 3.3. *L'énergie E vérifie l'estimation*

$$2\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) + \int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (2(u')^2 - ug(u'))dxdt \tag{3.4}$$

pour tout $0 \leq S < T < \infty$.

Où c désigne, à partir de ce lemme, une constante positive indépendante de $E(0), S$ et de T.

Démonstration. La condition au bord (1.2) implique que

$$\int_\Omega u^2 dx \leq c\int_\Omega (\Delta u)^2 dx. \tag{3.5}$$

On utilise (3.5) et la définition de l'énergie on obtient

$$\left|E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u'udx\right| \leq cE^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ((u')^2 + (\Delta u)^2)dx \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(t).$$

Comme E est décroissante on conclut que

$$[E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega u'udx]_S^T \leq c(E^{\frac{p+1}{2}}(S) + E^{\frac{p+1}{2}}(T)) \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

D'autre part, on a

$$\left|\frac{p-1}{2}\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega u'udxdt\right| \leq c\int_S^T E^{\frac{p-3}{2}}(t)(-E'(t))E(t)dt$$

$$\leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S) - cE^{\frac{p+1}{2}}(T) \leq cE^{\frac{p+1}{2}}(S).$$

On remplace par ces deux estimations dans (3.3) et on trouve (3.4).

Lemme 3.4. *Soit $0 \le S < T < \infty$, pour tout $\epsilon > 0$ on a l'estimation*

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u')^2 dxdt \le \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$ fixé, on pose

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : \left|u'(x)\right| > 1\} \quad \text{et} \quad \Omega_- = \{x \in \Omega : \left|u'(x)\right| \le 1\}. \tag{3.7}$$

On utilise l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_\Omega (u')^2 dx = \int_{\Omega_-} (u')^2 dx + \int_{\Omega_+} (u')^2 dx$$

$$\le c\Big(\int_{\Omega_-} \left|u'\right|^{p+1} dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} + \int_{\Omega_+} (u')^2 dx,$$

donc par les inégalitées (1.10), (1.11) et l'identité (3.1) on trouve

$$\int_\Omega (u')^2 dx \le c(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}} - cE'(t),$$

et par suite

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u')^2 dxdt \le -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt + c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}dt,$$

on utilise l'inégalité de Young sur le dernier terme de cette inégalité on obtient pour tout $\epsilon > 0$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega (u')^2 dxdt \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt - c(\epsilon)\int_S^T E'(t)dt - c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt$$

$$\le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S)$$

d'où l'estimation (3.6).

Lemme 3.5. *Soit $0 \le S < T < \infty$, on a*

$$\left|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u')dxdt\right| \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) \tag{3.8}$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Démonstration. On définit Ω_+ et Ω_- par (3.7) aussi. D'après (1.10) et (3.5) on a pour tout $\epsilon' > 0$

$$\left|\int_{\Omega_-} ug(u')dx\right| \le \epsilon'\int_{\Omega_-} (\Delta u)^2 dx + c(\epsilon')\int_{\Omega_-} g^2(u')dx \tag{3.9}$$

$$\le 2\epsilon' E(t) + c(\epsilon)\Big(\int_{\Omega_-} \left|g(u')\right|^{p+1} dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} \le 2\epsilon' E(t) + c(\epsilon)(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}.$$

Par la même manière, on utilise (1.12) et l'injection de Sobolev (voir (1.13))

$$H^1(\Omega) \subset L^{p'+1}(\Omega),$$

on a

$$\Big|\int_{\Omega_+} ug(u')dx\Big| \le \Big(\int_{\Omega_+} \big|u\big|^{p'+1}\Big)^{\frac{1}{p'+1}} \Big(\int_{\Omega_+} \big|g(u')\big|^{\frac{p'+1}{p'}}\Big)^{\frac{p'}{p'+1}} \tag{3.10}$$

$$\le c(E(t))^{\frac{1}{2}}(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}.$$

D'après (3.9) et (3.10) on constate que

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u')dxdt\Big|$$

$$\le 2\epsilon'\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon')\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}dt + c\int_S^T E^{\frac{p}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{p'}{p'+1}}dt,$$

on utilise l'inégalité de Young sur les deux dernières intégrales on obtient

$$\Big|\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega ug(u')dxdt\Big|$$

$$\le 3\epsilon'\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt - c(\epsilon')\int_S^T E'(t)dt + \epsilon'\int_S^T E^{\frac{p(p'+1)}{2}}(t)dt;$$

on utilise l'inégalité $p(p'+1) \ge p+1$, la décroissance de E et on conclut (3.8).

LEMME 3.6. *On a l'estimation*

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \le c(1+E^{\frac{p-1}{2}}(0))E(S), \quad 0 \le S < T < \infty. \tag{3.11}$$

Démonstration. Il suffit de choisir $\epsilon = \frac{1}{3}$ dans (3.6), (3.8) et d'utiliser linégalité (3.4).

Le lemme 3.1. et 3.6 impliquent que $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante et vérifie l'inégalité

$$\int_t^\infty E^{\frac{p+1}{2}}(s)ds \le cE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Donc pour obtenir les estimations (1.14)-(1.15) il suffit d'appliquer la proposition suivante

PROPOSITION 3.7. *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante vérifie pour deux constantes $\alpha \ge 0$ et $T > 0$ l'estimation*

$$\int_t^\infty E^{\alpha+1}(s)ds \le TE^\alpha(0)E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Alors

$$E(t) \le E(0)\Big(\frac{T+\alpha t}{T+\alpha T}\Big)^{\frac{-1}{\alpha}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad \alpha > 0$$

et

$$E(t) \le E(0)e^{1-\frac{1}{T}t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad \alpha = 0.$$

Pour la démonstration de cette proposition voir V. Komornik [5].

4 Démonstration du théorème 1.4

On prend $(u_0,u_1)\in W\times V$ tel que $g(u_1)\in H$, donc la solution du système (1.1)-(1.3) vérifie la propriété (1.8). (Remarquer que dans le théorème 1.4, les constantes c et ω dépendent de la solution u ce qui ne nous permet pas de généraliser les estimations (1.14) et (1.15) par argument de densité aux solutions faibles).

Dans la démonstration du théorème 1.3, les estimations (3.4) et (3.8) impliquent que (choisissons $\epsilon=1$ dans (3.8))

$$\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S)+cE(S)+2\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_\Omega \left|u'\right|^2 dxdt. \tag{4.1}$$

Donc il nous reste à majorer la dernière intégrale dans (4.1). Comme dans la démonstration du lemme (3.4), on a

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_-}(u')^2dxdt \le \epsilon\int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S) \tag{4.2}$$

pour tout $\epsilon>0$. D'autre part, on a

Cas: $n=1$. On observe que (1.10) et la croissance de g impliquent $\inf\{\left|g(x)\right| : \left|x\right|\ge 1\}>0$. Alors on utilise (1.8), (3.1) et l'injection $V\subset H^1(\Omega)\subset L^\infty(\Omega)$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_+}(u')^2dx &\le c\int_{\Omega_+}\left|u'\right|u'g(u')dx\\ &\le c\|u'\|_{L^\infty(\Omega)}(-E'(t)) \le -cE'(t),\end{aligned}$$

et par suite

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_+}\left|u'\right|^2dxdt \le -c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)E'(t)dt \le cE^{\frac{p+1}{2}}(S). \tag{4.3}$$

Cas: $n\ge 2$. On a

$$\int_{\Omega_+}\left|u'\right|dx \le c\int_{\Omega_+}\left|u'\right|^{\frac{2p}{p+1}}(u'g(u'))^{\frac{2}{p+1}}dx \tag{4.4}$$

$$\le c\Big(\int_\Omega \left|u'\right|^{\frac{2p}{p-1}}dx\Big)^{\frac{p-1}{p+1}}\Big(\int_\Omega u'g(u')dx\Big)^{\frac{2}{p+1}} \le c\|u'\|^{\frac{2p}{p+1}}_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)}(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}.$$

Par (1.8) et l'injection (voir (1.16))

$$V\subset H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)$$

on conclut à partir de (4.4)

$$\int_{\Omega_+}\left|u'\right|^2dx \le c(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}},$$

par l'utilisation de l'inégalité de Young on trouve

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_+}(u')^2dxdt \le c\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p+1}}dt$$

$$\leq \epsilon \int E^{\frac{p+1}{2}}(t) - c(\epsilon)\int_S^T E'(t)dt,$$

donc

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_+}\left|u'\right|^2 dxdt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t)dt + c(\epsilon)E(S). \tag{4.5}$$

Les inégalités (4.3) et (4.5) impliquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_S^T E^{\frac{p-1}{2}}(t)\int_{\Omega_+}\left|u'\right|^2 dxdt \leq \epsilon \int_S^T E^{\frac{p+1}{2}}(t) + c(\epsilon)E(S) + cE^{\frac{p+1}{2}}(S),$$

on choisit $\epsilon = \frac{1}{6}$ dans cette inégalité et dans (4.2), on remplace par suite dans (4.1) on obtient (3.11). Ansi les estimations (1.14) et (1.15) se déduisent par l'application de la proposition 3.7.

Remarque. Si la fonction g vérifie (1.10) pour $p = 1$ alors cette condition est vérifiée pour tout $p \geq 1$, on choisit p le plus petit nombre qui vérifie (1.16), c'est à dire $p = 1$ si $n = 1$, $p = 1 + \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$ si $n = 2$ et $p = \frac{n}{2}$ si $n \geq 3$. On constate dans ce cas là que toute solution forte du système (1.1)-(1.3) vérifie l'estimation (1.15) si $n = 1$,

$$E(t) \leq c\,t^{-2m}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \text{si} \quad n = 2$$

et

$$E(t) \leq c\,t^{\frac{-4}{n-2}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{si} \quad n \geq 3.$$

Références

[1] V. Barbu, Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems, Academic Press, New York, 1993.

[2] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures Appl., 51(1972), 1-168.

[3] F. Conrad and M. Pierre, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, Ann. Inst. Henri Poincaré, 11(1994), 485-515.

[4] F. Conrad and B. Rao, Decay of solution of wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Analysis, 7(1993), 159-177.

[5] V. Komornik, Exact controllability and stabilization, The multiplier method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[6] V. Komornik, Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semigroup approach, Acta Sci. Math. (Szeged), 60(1995), 451-466.

[7] V. Komornik, On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, Chin. Ann. of Math. 14B: 2(1993), 153-164.

[8] V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu, Estimations d'énergie pour un système de Petrovsky avec amortissement interne, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., 319 (1994), 1185-1189.

[9] J. -L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, SIAM Review, 30(1988), 1-68.

IRMA, ULP et CNRS, 7 rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex, France.
E-mail: guesmia@math.u-strasbg.fr