Convergence d'algorithme itératif : une méthode nodale totalement explicite pour les problèmes de diffusion

Mohamed Rachid Laydi

Résumé

Une méthode itérative est proposée pour le calcul de solutions de problèmes variationnels par la méthode des éléments finis. Ce calcul peut s'effectuer élément par élément d'une manière totalement explicite. Nous appliquons cette méthode à un schéma nodal pour la résolution de problème de diffusion et nous donnons des résultats de convergence.

Abstract

An iterative method which deals with the computation of solutions of variational equations by the finite element method is presented in this paper. The computation, in some cases, can be done explicitely for each element. We apply this method for a nodal scheme to solve a diffusion problems and we give a convergence results.

Le plan de ce travail est le suivant :

1- Présentation générale de la méthode.

2- Théorème de convergence.

3- Application à la méthode nodale pour la résolution des problèmes de diffusion :

3.1 La méthode nodale.

3.2 Algorithme de résolution.

Received by the editors April 1997.

Communicated by A. Bultheel.

Key words and phrases : nodal schemes, nonconforming finite elements, diffusion equation, algorithm.

3.3 Formulation variationnelle du problème nodal.
3.4 Condition suffisante pour la convergence : application du théorème.
3.5 Condition nécessaire de la convergence et estimation du rayon spectral.
4- Expériences numériques.

1 Présentation générale de la méthode

La discrétisation, par la méthode des éléments finis, de nombreux problèmes aux dérivées partielles conduit à un système algébrique linéaire de grande taille, donné sous la forme variationnelle :

$$\begin{cases} \text{trouver } u_h \in \mathcal{U}_h, \text{ vérifiant :} \\ \\ a_h(u_h, \psi_h) = f_h(\psi_h) \text{ pour tout } \psi_h \in \mathcal{U}_h, \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{U}_h$ est un espace de dimension finie $N >> 1$, engendré par les fonctions de base ϕ_i, $i = 1, .., N$,

$$a_h(.,.) \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur } \mathcal{U}_h, \tag{2}$$

$$f_h(.) \text{ est une forme linéaire sur } \mathcal{U}_h. \tag{3}$$

Plusieurs phases de prétraitement sont nécessaires (*renumérotation des noeuds, stockage de la matrice en ligne de ciel ..*) afin de réduire le coût en mémoire. Ceci oblige à déployer toute une technique laborieuse de programmation et d'organisation matricielle (*assemblage et résolution compatibles avec la structure du stockage,..*), peu adaptée pour les machines parallèles et vectorielles.

Nous proposons, pour cela, un algorithme itératif très peu coûteux en mémoire et dont la résolution peut s'effectuer élément par élément d'une manière totalement explicite.

En effet, considérons :

i) Une décomposition de l'espace $\mathcal{U}_h$ sous la forme

$$\mathcal{U}_h = \mathcal{V}_h \oplus \mathcal{W}_h,$$

pour des espaces $\mathcal{V}_h$ et $\mathcal{W}_h$ engendrés respectivement par les fonctions de base $\phi_1, ..., \phi_m$ et $\phi_{m+1}, ..., \phi_N$, $1 < m < N$.

ii) Un produit scalaire $b_h(.,.)$ sur $\mathcal{V}_h$, par exemple

$$b_h(u_h, \psi_h) = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}_i(u_h)\mathcal{L}_i(\psi_h), \tag{4}$$

où l' opérateur $\mathcal{L}_i$ désigne la forme associée à la fonction de base ϕ_i :

$$\mathcal{L}_i(\phi_j) = \delta_{i,j}.$$

Alors, notre méthode consiste à "approcher" la solution $u_h = v_h + w_h$ par le schéma itératif :

$$\begin{cases} \text{En partant de } v_h^0 \in \mathcal{V}_h, \text{ trouver } \; u_h^n := v_h^n + w_h^{n+1} \forall\ n \in \mathbb{N} : \\ \\ \text{On calcule d'abord } w_h^{n+1} \in \mathcal{W}_h, \text{ vérifiant :} \\ a_h(w_h^{n+1}, \psi_h) = f_h(\psi_h) - a_h(v_h^n, \psi_h)\ \forall \psi_h \in \mathcal{W}_h, \\ \\ \text{On calcule ensuite } v_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h, \text{ vérifiant :} \\ \lambda_h b_h(v_h^{n+1} - v_h^n, \psi_h) = f_h(\psi_h) - a_h(u_h^n, \psi_h)\ \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h, \end{cases} \tag{5}$$

où le scalaire $\lambda_h > 0$ est un paramètre de pénalisation donné.

Ainsi, dans le cas où les fonctions de base de l'espace $\mathcal{W}_h$ sont à supports deux à deux disjoints (i.e. $a_h(\phi_i, \phi_j) = 0$ pour $i \neq j,\ i, j = m+1, .., N$), la résolution s'effectue élément par élément d'une manière explicite, par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_i(w_h^{n+1}) = \dfrac{-a_h(v_h^n, \phi_i) + f_h(\phi_i)}{a_h(\phi_i, \phi_i)},\ i = 1, .., m. \\ \\ \mathcal{L}_k(v_h^{n+1}) = \mathcal{L}_k(v_h^n) + \dfrac{(f_h(\phi_k) - a_h(v_h^n + w_h^{n+1}, \phi_k)}{\lambda_h},\ k = m+1, .., N. \end{cases} \tag{6}$$

Il s'agit d'un algorithme itératif de type Gauss-Seidel, inspiré de la méthode de sous-domaines sans recouvrement (voir plus loin), où chaque élément de la triangulation est un sous-domaine. Cette méthode présente, sur la résolution directe de (1), les avantages suivants :

a) Le coût en mémoire est très faible.

b) L'implémentation numérique est plus facile à réaliser : plus besoin de recourir ni à une renumérotation des noeuds, ni à une programation ou stockage particuliers.

c) Elle est relativement rapide en temps de calcul comme le montrent les expériences numériques concernant la résolution du problème de diffusion.

2 Théorème de convergence

Nous donnons dans cette section un résultat optimal de convergence de cette méthode. On utilisera l'hypothèse

$$\begin{cases} b_h(.,.) \text{ une forme bilinéaire symétrique :} \\ \text{semi-définie positive sur } \mathcal{U}_h \text{ et définie positive sur } \mathcal{V}_h. \end{cases} \tag{7}$$

Posons

$$\begin{cases} |.| := \sqrt{b_h(.,.)}, \\ \rho_h := \sup\limits_{\psi_h \in \mathcal{V}_h - \{0\}} \dfrac{a_h(\psi_h, \psi_h)}{|\psi_h|^2}. \end{cases} \tag{8}$$

Compte tenu de ces notations et hypothèses, on a

Théorème 1. *Soit $\mathcal{U}_h$ un espace de dimension finie, muni d'un produit scalaire $b_h(.,.)$, et soient $\mathcal{V}_h$ et $\mathcal{W}_h$ une somme directe de $\mathcal{U}_h$. Alors, sous les hypothèses (2), (3), (7) et l'hypothèse*

$$\frac{\rho_h}{2\lambda_h} < 1, \tag{9}$$

la suite de solutions $\{u_h^n\}$ du problème (5) converge vers la solution du problème (1) lorsque n tend vers l'infini.

Preuve . Grâce aux hypothèses, la forme bilinéaire $2\lambda_h b_h(.,.) - a_h(.,.)$ est symétrique définie positive sur $\mathcal{U}_h$. On notera $|||.|||$ la norme associée :

$$|||\psi_h||| = \sqrt{2\lambda_h |\psi_h|^2 - \| \psi_h \|^2} \text{ pour tout } \psi_h \in \mathcal{U}_h,$$

où

$$\| \, . \, \| := \sqrt{a_h(.,.)}.$$

Par ailleurs, de (2), le problème (1) admet une solution unique $u_h \in \mathcal{U}_h$. Elle peut s'écrire sous la forme

$$u_h = v_h + w_h,$$

où $v_h \in \mathcal{V}_h$ et $w_h \in \mathcal{W}_h$. Posons

$$\begin{cases} v^n = v_h^n - v_h, \\ w^n = w_h^{n+1} - w_h, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\begin{cases} (v^{n+1}, w^n) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h, \text{ vérifiant :} \\ \\ a_h(w^n, \psi_h) = -a_h(v^n, \psi_h) \ \forall \psi_h \in \mathcal{W}_h, \\ \lambda_h b_h(v^{n+1} - v^n, \psi_h) = -a_h(v^n, \psi_h) - a_h(w^n, \psi_h) \ \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \tag{10}$$

En particulier, on a

$$a_h(v^n, w^m) + a_h(w^n, w^m) = 0, \ n, m \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Considérons la deuxième équation de (10) avec $\psi_h = v^{n+1} + v^n$, on obtient l'égalité

$$2\lambda_h b_h(v^{n+1} - v^n, v^{n+1} + v^n) + 2a_h(v^n, v^{n+1} + v^n) + 2a_h(w^n, v^{n+1} + v^n) = 0,$$

qui, compte tenu des relations

$$2a_h(v^n, v^{n+1} + v^n) = - \parallel v^{n+1} \parallel^2 + \parallel v^{n+1} + v^n \parallel^2 + \parallel v^n \parallel^2$$

et

$$\begin{aligned} 2a_h(w^n, v^{n+1} + v^n) &= -2a_h(w^n, w^{n+1} + w^n) \\ &= \parallel w^{n+1} \parallel^2 - \parallel w^{n+1} + w^n \parallel^2 - \parallel w^n \parallel^2, \end{aligned}$$

s'écrit encore sous la forme

$$|||v^{n+1}|||^2 + \parallel w^{n+1} \parallel^2 + \parallel v^{n+1} + v^n \parallel^2 - \parallel w^{n+1} + w^n \parallel^2 = |||v^n|||^2 + \parallel w^n \parallel^2,$$

or, de (11), on a l'égalité

$$\parallel v^{n+1} + v^n \parallel^2 - \parallel w^{n+1} + w^n \parallel^2 = \parallel v^{n+1} + v^n + w^{n+1} + w^n \parallel^2,$$

d'où, par sommation sur n, on a pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$|||v^{n+1}|||^2 + \parallel w^{n+1} \parallel^2 + \sum_{n=0}^{s} \parallel v^{n+1} + v^n + w^{n+1} + w^n \parallel^2 = |||v^0|||^2 + \parallel w^0 \parallel^2 .$$

On en déduit donc que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel (v^{n+1} + w^{n+1}) + (v^n + w^n) \parallel^2 = 0. \tag{12}$$

Par ailleurs, de (10) avec $\psi_h = v^{n+1} - v^n$, on a l'égalité

$$2\lambda_h |v^{n+1} - v^n|^2 + 2a_h(v^n, v^{n+1} - v^n) + 2a_h(w^n, v^{n+1} - v^n) = 0. \tag{13}$$

En utilisant les relations

$$2a_h(v^n, v^{n+1} - v^n) = \parallel v^{n+1} \parallel^2 - \parallel v^{n+1} - v^n \parallel^2 - \parallel v^n \parallel^2,$$

et

$$\begin{aligned} 2a_h(w^n, v^{n+1} - v^n) &= -2a_h(w^n, w^{n+1} - w^n) \\ &= - \parallel w^{n+1} \parallel^2 + \parallel w^{n+1} - w^n \parallel^2 + \parallel w^n \parallel^2, \end{aligned}$$

l'équation (11) s'écrit encore sous la forme

$$\parallel v^{n+1} + w^{n+1} \parallel^2 + |||v^{n+1} - v^n|||^2 + \parallel w^{n+1} - w^n \parallel^2 = \parallel v^n + w^n \parallel^2 . \tag{14}$$

Par conséquent, par sommation sur n dans (14), on a pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$\parallel v^{n+1} + w^{n+1} \parallel^2 + \sum_{n=0}^{s} (|||v^{n+1} - v^n|||^2 + \parallel w^{n+1} - w^n \parallel^2) = \parallel v^0 + w^0 \parallel^2 .$$

D'où finalement, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} |||v^{n+1} - v^n|||^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel w^{n+1} - w^n \parallel^2 = 0. \tag{15}$$

et par suite, on tire

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel (v^{n+1} + w^{n+1}) - (v^n + w^n) \parallel^2 = 0. \tag{16}$$

En combinant les relations (12) et (16), on obtient le résultat recherché. Ce qui achève la démonstration de ce théorème. ∎

Remarque 1. *Ce résultat est optimal. Pour s'en assurer, il suffit de prendre $\mathcal{W}_h$ et $\mathcal{V}_h$ orthogonaux pour le produit scalaire $a_h(.,.)$. La condition (9) devient alors nécessaire pour $b_h(.,.) := a_h(.,.)$.*

Remarque 2. *La condition (9) est toujours satisfaite lorsque*

$$b_h(.,.) := a_h(.,.) \text{ et } \lambda_h = 1.$$

Dans ce cas, cet algorithme revient simplement à utiliser la méthode classique de Gauss-Seidel par blocs :

$$\begin{cases} \text{En partant de } v_h^0 \in \mathcal{V}_h, \text{ trouver pour tout } n \in I\!N, \\ w_h^{n+1} \in \mathcal{W}_h, \text{ vérifiant :} \\ a_h(w_h^{n+1}, \psi_h) = f_h(\psi_h) - a_h(v_h^n, \psi_h) \ \forall \psi_h \in \mathcal{W}_h, \\ v_h^{n+1} \in \mathcal{V}_h \text{ vérifiant :} \\ a_h(v_h^{n+1}, \psi_h) = f_h(\psi_h) - a_h(w_h^{n+1}, \psi_h) \ \forall \psi_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \tag{17}$$

3 Application à une méthode nodale pour la résolution des problèmes de diffusion

Nous allons appliquer cet algorithme pour la résolution, par une méthode nodale, d'un problème modèle de diffusion. En fait, la méthode utilisée est équivalente à la méthode d'éléments finis mixtes de Raviart-Thomas d'ordre le plus bas. Voir [4]-[6] pour la convergence de cette méthode et [2], [9] pour la superconvergence. On pourra consulter également [8],[10] pour la résolution du problème de Stokes.

3.1 La méthode nodale

On considère la résolution du problème :

$$\begin{cases} \text{trouver } u \in H_0^1(\Omega), \text{ solution de :} \\ -\text{div}(p\nabla u) + qu = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

où Ω est un domaine polygonal borné dans $I\!R^2$, de frontière $\partial\Omega$; avec les donnés $p(x) \geq d > 0$ et $q(x) \geq 0$ deux fonctions constantes par morceau et $f \in L^2(\Omega)$.

Pour cela, soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation destiné à tendre vers zéro et soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière de Ω, composée de rectangles κ, de diamètre inférieur à h, compatibles avec les morceaux où p et q sont constants. La méthode nodale du plus bas ordre consiste à chercher une fonction u_h, $u_{h_{|\kappa}} \in P_\kappa := \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2\}$, vérifiant le système (18) dans le sens faible suivant :

$$\begin{cases} -\text{div}(p\nabla_h u_h) + q\,\overline{\overline{u}}_h = \overline{\overline{f}} \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \overline{[u_h]} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{A}_h, \\ \overline{u}_h = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{A}_h, \end{cases} \tag{19}$$

où $\nabla_h(.)_{|\mathcal{K}} := \nabla(.|\kappa)\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h$, $\partial\mathcal{A}_h$ et $\mathcal{A}_h$ désignent respectivement l'ensemble des arêtes du maillage contenues dans $\partial\Omega$ et dans Ω, et où $[v]$ désigne le saut de la trace de v sur γ. Les fonctions $\overline{v}$ et $\overline{\overline{v}}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \overline{v}_{|\gamma} &:= \frac{1}{|\gamma|}\int_\gamma v(x)dx, \\ \overline{\overline{v}}_{|\kappa} &:= \frac{1}{|\kappa|}\int_\kappa v(x)dx \end{aligned}$$

où $|\gamma|$ et $|\kappa|$ sont les mesures respectives de γ et κ.

On associe à l'espace P_κ, l'ensemble des degrés de liberté Σ_κ constitué de la moyenne à l'intérieur de κ et des moyennes le long de ses arêtes, et l'espace d'approximation :

$$\mathcal{U}_h := \left\{\psi_h;\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h,\ \psi_{h_{|\mathcal{K}}} \in P_\kappa,\ \overline{[\psi_h]}\ = 0 \text{ sur } \mathcal{A}_h,\ \overline{\psi}_h = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{A}_h\right\}. \tag{20}$$

3.2 Algorithme de résolution

On se place dans le cas où :

$$\mathcal{V}_h := \{\phi_\gamma;\ \forall \gamma \in \mathcal{A}_h\} \tag{21}$$

et

$$\mathcal{W}_h := \{\phi_\kappa;\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}, \tag{22}$$

les fonctions ϕ_γ et ϕ_κ désignent respectivement les fonctions de base associées à la moyenne sur γ et à la moyenne sur κ :

$$\overline{\phi_\gamma} = \begin{cases} 1 \text{ sur } \gamma, \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}, \quad \overline{\overline{\phi_\kappa}} = \begin{cases} 1 \text{ sur } \kappa, \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}.$$

On verra plus loin que l'algorithme (6) revient simplement à calculer :

$$u_h = \sum_{\gamma\in\mathcal{A}_h} u_\gamma\phi_\gamma + \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h} u_\kappa\phi_\kappa,$$

par la méthode de sous-domaines discrète [3] :

$$\begin{cases} \text{En partant de } u_h^0 \in \mathcal{U}_h, \text{ on détermine } u_h^{n+1} \in \mathcal{U}_h,\ n \in \mathbb{N} : \\ \text{On calcule d'abord } u_\gamma^{n+1} \text{ sur } \gamma \in \mathcal{A}_h :\ u_\gamma^{n+1} = u_\gamma^n - \dfrac{1}{\lambda_h}[p\dfrac{\partial u_h^n}{\partial n_\gamma}], \\ \text{On calcule ensuite } u_\kappa^{n+1} \text{sur } \kappa \in \mathcal{T}_h \text{ par : } -p\Delta u_h^{n+1} + q\ u_\kappa^{n+1} = \overline{\overline{f}}, \end{cases} \tag{23}$$

où n_γ est le vecteur normal à l'arête $\gamma \in \kappa$, extérieur à κ.

Remarque 3. *C'est pour simplifier les notations que nous présentons cette étude en géométrie à deux dimensions, la généralisation des résultats se fait d'une manière simple en dimension supérieure.*

Remarque 4. *Il est possible d'utiliser cette méthode sur un maillage composé de triangles. On peut prendre comme espace des fonctions de base :*

$$P_\kappa = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_\kappa\},$$

où les λ_i sont les fonctions des coordonnées barycentriques sur κ, et

$$\mu_\kappa = \nabla\lambda_1.\nabla\lambda_2\ \lambda_3^2 + \nabla\lambda_2.\nabla\lambda_3\ \lambda_1^2 + \nabla\lambda_3.\nabla\lambda_1\ \lambda_2^2.$$

La propriété de base des espaces P_κ est :

$$P_\kappa \subset \left\{\psi \in H^2(\kappa);\ \triangle\psi \in \mathcal{P}_0(\kappa),\ \frac{\partial\psi}{\partial n_\gamma} \in \mathcal{P}_0(\gamma)\ \textit{sur chaque arête}\ \gamma\right\}. \tag{24}$$

L'ensemble $\mathcal{P}_m(.)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à m.

3.3 Formulation variationnelle du problème nodal

Introduisons les formes :

$$a_h(u_h, \psi_h) := \sum_\kappa \int_\kappa (p\nabla u_h \nabla\psi_h + q\overline{\overline{u}}_h\overline{\overline{\psi}}_h)dx,$$

et

$$f_h(\psi_h) := \int_\Omega \overline{\overline{f}}\ \overline{\overline{\psi}}_h dx.$$

Pour la formulation du problème (19) on a :

Proposition 1. *Une fonction $u_h \in \mathcal{U}_h$ est solution unique du problème nodal (19) si et seulement si elle est solution du problème (1).*

Preuve. Nous multiplions l'équation (19) par la fonction test $\psi_h \in \mathcal{U}_h$. Après intégration par parties sur chaque κ et sommation sur tous les éléments, nous obtenons la formulation (1) en utilisant (24).
Réciproquement, choisissons $\psi_h := \phi_\kappa$ dans (1), ϕ_κ étant la fonction de base associée à l'élément κ. Après intégration par parties sur κ, on déduit :

$$\int_\kappa -\mathrm{div}(p\nabla u_h)\phi_\kappa dx + \int_{\partial\kappa} p\frac{\partial u_h}{\partial n_\gamma}\phi_\kappa dt + \int_\kappa q\ \overline{\overline{u}}_h\ \overline{\overline{\phi}}_\kappa dx = |\kappa|\overline{\overline{f}}, \tag{25}$$

d'où, de (24), il résulte :

$$-\mathrm{div}(p\nabla u_h) + q\ \overline{\overline{u}}_h = \overline{\overline{f}} \quad \text{dans } \kappa. \tag{26}$$

Ensuite, soient γ un élément quelconque de $\mathcal{A}_h$ et $\phi\gamma$ la fonction de base associée. Grâce à (24) et (26), nous obtenons sans peine de (25) :

$$[p\frac{\partial u_h}{\partial n_\gamma}] = 0.$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Pour la formulation variationnelle du problème (23), on utilisera la forme bilinéaire (4) :

$$b_h(u_h, \psi_h) := \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_h} \overline{u}_h \overline{\psi}_h, \tag{27}$$

Compte tenu de ces notations, on a :

Proposition 2. *Le problème (23) s'écrit, d'une manière équivalente, sous la forme (5).*

Preuve. Comme $\mathcal{W}_h$ est un espace orthogonal à $\mathcal{V}_h$ dans $\mathcal{U}_h$ muni du produit scalaire $b_h(.,.)$, alors, le problème (5) s'écrit encore sous la forme :

$$\begin{cases} \text{En partant de } v_h^0 \in \mathcal{V}_h, \text{ trouver pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ u_h^n := v_h^n + w_h^{n+1}, v_h^n \in \mathcal{V}_h, \ w_h^{n+1} \in \mathcal{W}_h, \text{ vérifiant :} \\ \lambda_h b_h(u_h^{n+1} - u_h^n, \psi_h) + a_h(u_h^n, \psi_h) = f_h(\psi_h) \text{ pour tout } \psi_h \in \mathcal{U}_h. \end{cases} \tag{28}$$

Les deux équations du système (23) sont obtenues en procédant de la même manière que pour la proposition 1, en choisissant respectivement $\psi_h := \phi_\kappa$ et $\psi_h := \phi_\gamma$ dans (28), et réciproquement. ∎

3.4 Condition suffisante pour la convergence : application du théorème

Les fonctions de base associées à la moyenne à l'intérieur de l'élément κ et aux moyennes le long de ses arêtes γ_j, sont données respectivement en coordonnées réduites (voir figure 1), par :

$$\begin{cases} \widehat{\phi}_0(\widehat{x}) &= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(1 - 3\widehat{x}_k^2), \\ \widehat{\phi}_k(\widehat{x}) &= -\frac{1}{2}\widehat{x}_k - \frac{1}{4}(1 - 3\widehat{x}_k^2), \quad k = 1, 2, \\ \widehat{\phi}_{k+2}(\widehat{x}) &= +\frac{1}{2}\widehat{x}_k - \frac{1}{4}(1 - 3\widehat{x}_k^2), \quad k = 1, 2. \end{cases}$$

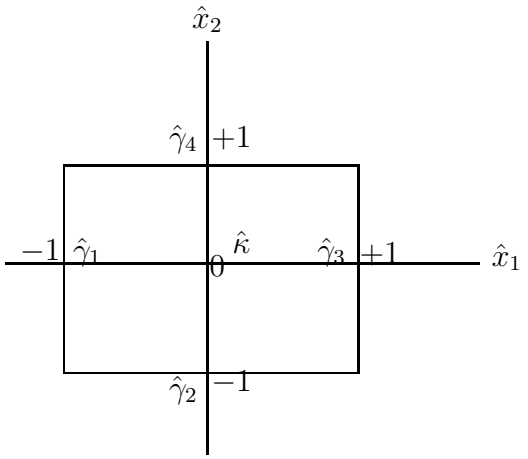

Fig. 1

Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice symétrique associée aux fonctions de base ϕ_j relatives aux arêtes $\gamma_j \in \mathcal{A}_h$. Comme le paramètre ρ_h est égal au rayon spectral de A, par l'application du théorème 1, on a :

Proposition 3. *L'inégalité :*

$$\lambda_h > \frac{1}{2}\rho(A) \tag{29}$$

est une condition suffisante pour la convergence du problème itératif (23).

Afin de simplifier le calcul, considérons le cas où

$$\text{le maillage est formé exclusivement de rectangles carrés.} \tag{30}$$

Proposition 4. *Sous l' hypothèse (30), l'inégalité :*

$$\lambda_h \geq \frac{9}{2}\sup_{x\in\Omega}|p(x)| \tag{31}$$

est une condition suffisante pour la convergence du problème itératif (23). ∎

Preuve. Soit $C = (c_{i,j})$ la matrice telle que :

$$c_{i,j} = \sup_{x\in\Omega}|p(x)| \times \begin{cases} 8 \text{ si } i = j, \\ 2 \text{ si } \gamma_i, \gamma_j \text{ sont deux arêtes opposées du même élément,} \\ 0 \text{ ailleurs .} \end{cases}$$

On vérifie que la matrice A est positive et que :

$$a_{i,j} \leq c_{i,j} \ \forall i, j.$$

En utilisant le théorème de Frobenius, le rayon spectral est une valeur propre et il existe au moins un vecteur propre réel associé $\mathbf{v} := (v_j)$, tel que $v_j \geq 0$. On déduit facilement que :

$$\rho(A) \leq \rho(C) < 9\sup_{x\in\Omega}|p(x)|. \tag{32}$$

D'où, de (29), nous obtenons le résultat recherché. ∎

3.5 Condition nécessaire de la convergence et estimation du rayon spectral

Notons par κ_{j^+} et κ_{j^-} les deux éléments d'interface commune γ_j comme indiqué dans la figure 2.

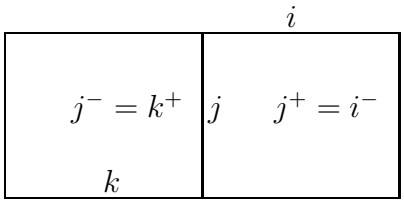

Fig.2

Posons :

$$\psi_{j^+} = \frac{a_h(\phi_{j^+}, \phi_j)}{a_h(\phi_{j^+}, \phi_{j^+})}\ \phi_{j^+},$$

$$\psi_{j^-} = \frac{a_h(\phi_{j^-}, \phi_j)}{a_h(\phi_{j^-}, \phi_{j^-})}\ \phi_{j^-},$$

et

$$\psi_j = \phi_j - \psi_{j^-} - \psi_{j^+}.$$

Soit B la matrice symétrique $(b_{i,j})$, telle que :

$$b_{i,j} = a_h(\psi_j, \phi_i). \tag{33}$$

et soit θ_λ l'opérateur :

$$\theta_\lambda = I - \frac{1}{\lambda_h} B, \tag{34}$$

Alors,

Proposition 5. *L'algorithme (23) converge si et seulement si le rayon spectral de θ_λ est inférieur strictement à un :*

$$\rho(\theta_\lambda) < 1. \tag{35}$$

Preuve. De (5), on déduit facilement que :

$$w_h^{n+1} = \sum_\kappa \frac{f_h(\phi_\kappa) - a_h(v_h^n, \phi_\kappa)}{a(\phi_\kappa, \phi_\kappa)}\ \phi_\kappa,$$

et par suite, on a :

$$a_h(w_h^{n+1}, \phi_j) = f_h(\psi_{j^-} + \psi_{j^+}) - a_h(v_h^n, \psi_{j^-} + \psi_{j^+}).$$

De (5), nous obtenons alors que :

$$\lambda_h(v_j^{n+1} - v_j^n) = f_h(\psi_j) - a_h(v_h^n, \psi_j). \tag{36}$$

D'où le résultat. ∎

Afin de simplifier le calcul pour obtenir des estimations sur le rayon spectral $\rho(\theta_\lambda)$, considérons le cas où

$$p_{|\kappa} = d\ \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \text{ et } q = 0, \tag{37}$$

Théorème 2. *Sous les hypothèses (30), (37) et l'hypothèse :*

$$\lambda_h = 7d, \tag{38}$$

le rayon spectral de la matrice θ_λ satisfait à l' inégalité :

$$\rho(\theta_\lambda) < \frac{5}{7}. \tag{39}$$

Preuve. Un calcul élémentaire montre que :

$$a_h(\phi_{j^+}, \phi_{j^+}) = a_h(\phi_{j^-}, \phi_{j^-}) = 24d,$$

$$a_h(\phi_{j^+}, \phi_j) = a_h(\phi_{j^-}, \phi_j) = -6d,$$

et

$$a_h(\phi_j, \phi_i) = d \times \begin{cases} 8 \text{ si } i = j, \\ 2 \text{ si } \gamma_i, \gamma_j \text{ sont deux arêtes opposées du même élément,} \\ 0 \text{ ailleurs .} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$b_{i,j} = d \times \begin{cases} +5 \text{ si } i = j, \\ +\dfrac{1}{2} \text{ si } \gamma_i, \gamma_j \text{ sont deux arêtes opposées du même élément,} \\ -\dfrac{3}{2} \text{ si } \gamma_i, \gamma_j \text{ sont deux arêtes adjacentes du même élément,} \\ 0 \text{ ailleurs .} \end{cases}$$

Par l'application du théorème de localisation des valeurs propres de Gershgorin pour les matrices irréductibles, on déduit que les valeurs propres $\mu_j(B)$ de la matrice B vérifient l'estimation :

$$-2d < \mu_j(B) < 12d. \tag{40}$$

Par ailleurs, de (34), le rayon spectral $\rho(\theta_\lambda)$ est donné par :

$$\rho(\theta_\lambda) := \sup_j |1 - \frac{\mu_j(B)}{\lambda_h}|. \tag{41}$$

De (38) et de (40), on a :

$$-\frac{5}{7} < 1 - \frac{\mu_j(B)}{\lambda_h} < \frac{5}{7}.$$

D'où le résultat. ∎

3.6 Expériences numériques

Nous avons pris comme référence la méthode directe de Gauss (MDG). Nous l'avons comparée avec la méthode itérative (MI) pour la résolution nodale du problème de Laplace (i.e. $p = 1$ et $q = 0$) avec des conditions aux limites non homogènes sur le bord de $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. La solution exacte de référence est la fonction :

$$u_h(x) = u(x) = 1 + 3x_1^2 + 3x_2^2.$$

Le maillage est composé de rectangles carrés comportant successivement (20×20), (25×25), (30×30), (35×35), (40×40) et (50×50) éléments. Les noeuds sont numérotés suivant l'axe des x_1 en débutant en bas à gauche puis de bas en haut. Le stockage de la matrice est fait sous forme de ligne de ciel (voir la figure 3 pour le stockage).

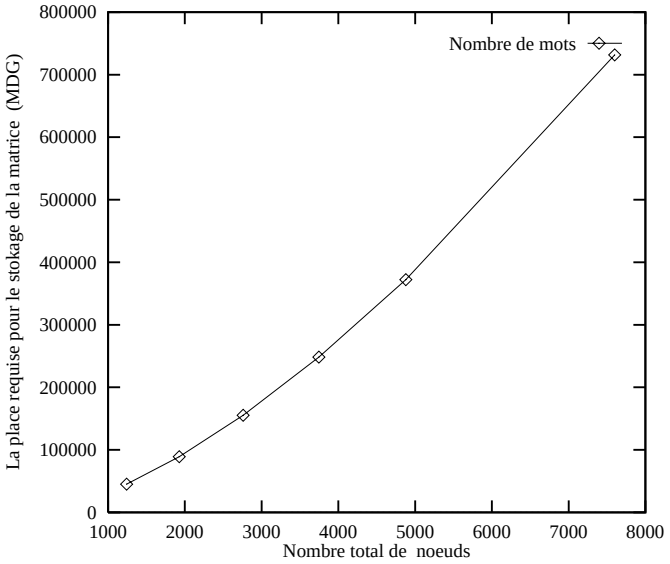

Fig. 3

La condition de départ est $v_h = 0$ et les paramètres algorithmiques sont :

$$\begin{cases} \text{Le paramètre de pénalisation.....} : & \lambda_h = 4.5 \text{ (donné par (31))}. \\ \text{Le pourcentage d'erreur en norme uniforme} : & E_{\%} = 0.01\%,\ 0.1\%,\ 1\%,\ 10\%. \\ \text{Le critère de convergence .....} : & 100 \times \dfrac{\sup_\gamma |u_\gamma^n - u_\gamma|}{\sup_\gamma |u_\gamma|} < E_{\%}. \end{cases}$$

Nous présentons dans la figure 4 le rapport du temps de résolution par (MDG) sur le temps que nécessite (MI) pour satifaire le critère de convergence.

Il ressort de cette étude que l'on peut obtenir pour une bonne précision (i.e. $E_{\%} < 0.1\%$) un gain de temps de calcul en n'utilisant pour cela que très peu de mémoire.

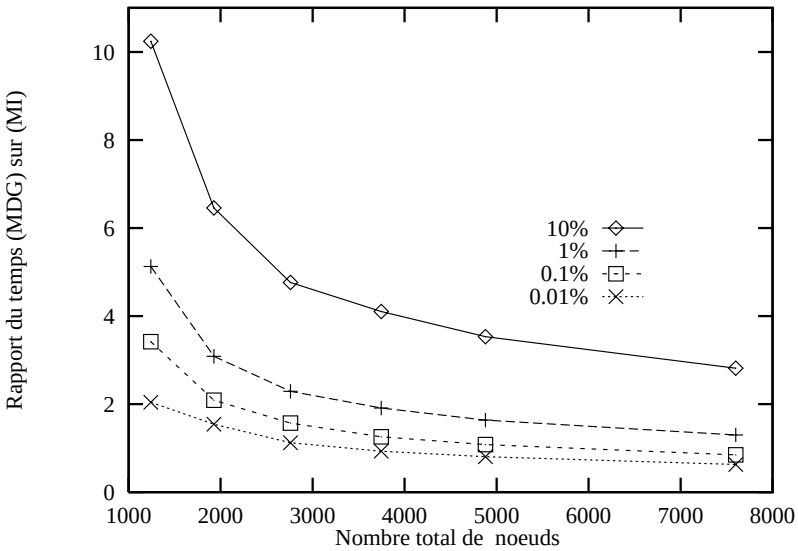

Fig. 4

L'auteur remercie M. Laghsal pour différentes remarques fructeuses et L. Zealouk pour la réalisation des essais numériques.

Références

[1] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] R. E. Ewing, R. D. Lazarov et J. Wang, *Superconvergence of the velocities along the Gauss lines in mixed finite elzment methods*. Siam J. Numer. Anal., **28** (1991) 1015-1029.

[3] R. Glowinski, Q. V. Dinh and J. Périaux, *Domain Decomposition for Elliptic Problems, Finite Elements in Fluids*. John Wiley & Sons Limited **5** (1984) .

[4] J. P. Hennart, *A General Family of Nodal Schemes*. Siam J. Sci. Stat. Comput., **7** (1986) 264-287.

[5] J. P. Hennart, J. Jaffre et J. Roberts, *A Constructive Method for Deriving Finite Elements of Nodal type*. Numer. Math., **53** (1988) 701-738.

[6] J. P. Hennart, E. Valle, *On the relationship betwenn nodal schemes and mixed-hybrid finite elements*. Numer. Methods Partial Diff. Equations, **9** (1993) 411-430.

[7] M. Laghsal , *Étude des méthodes nodales pour la résolution de certains problèmes elliptiques sur divers types de maillages*. Thèse, Université de Besançon (1995).

[8] M. R. Laydi, L. Zealouk, *Méthode itérative totalement explicite pour la résolution du problème de Stokes*. C. R. Acad. Sci. Paris, t.321, série I, (1995) 641-644.

[9] M. R. Laydi, *Superconvergence des solutions approchées par une méthode nodale pour la résolution de problèmes de diffusion*. Rev. Roumaine Math. Pures Appli. à paraître.

[10] M. R. Laydi, *Une méthode nodale à deux niveaux pour la résolution du problème de Stokes* C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, série I. (1997) 1075-1078.

[11] P. Lesaint et D. Verwaerde, *Mathematical Relations Between the Nodal Method et the not Conform Finite Element Method*. HT-12/9101A EDF Paris (1991).

[12] P. A. Raviart, J.M. Thomas, *Primal hybrid finite element methods for 2nd order elliptic equations*. Math. Comp., **31** (1977) 391-413.

Université de Franche-Comté,
LCS UMR CNRS 6623,
16, route de Gray,
25300 Besançon